

不圧地下水を対象とした拡張カルマンフィルタによる透水係数の空間分布推定法

奥野哲夫*・鈴木 誠**

本論文では、地下水問題において重要なパラメータとなる透水係数の空間分布推定を目的として、地下水位と流量を観測量とする逆解析法を提案する。また、領域の一部において透水係数が測定されている場合は、これも観測量とすることができる。特に、ここでは不圧地下水を対象とする。逆解析手法としては拡張カルマンフィルタを用い、状態量である地下水位と流量に関する非定常計算は有限要素法を使用する。

Key Words : groundwater, hydraulic conductivity, identification, Kalman filter, finite element method

1. 序論

土木・建築構造物の基礎工事における地盤物性値の評価や構造物建設後における周辺地盤への影響評価は、よりよい地盤環境を確保するために重要な問題である。また、社会的問題になっている地下水汚染¹⁾の防止や対策には主要な汚染経路を把握することが重要となり、透水係数の空間分布が推定できれば地下水流動を予測する上で貴重な資料になるものと考えられる。以上の背景から、本研究では透水係数の空間分布推定を目的とし、地下水位、流量(揚水量や注水量)および領域の一部の透水係数が測定されている場合も想定し、これらの観測値を有効に利用した推定法を提案する。

一般に、逆問題は(1)境界/領域逆問題、(2)支配方程式逆問題、(3)境界値/初期値逆問題、(4)負荷逆問題、(5)材料特性逆問題、に分類される²⁾。これらの逆問題のうち、ここで対象とする問題は材料特性逆問題である。また、逆解析手法には多くの手法があるが、大きくは直接法(Direct method or Equation error criterion)と間接法(Indirect method or Output error criterion)に分類される³⁾。

直接法は、場を支配する偏微分方程式を有限要素法などで離散化し、これに観測値を代入した場合の方程式の残差を最小にするよう未知パラメータ(材料特性値)を決める方法である。この方法の残差には離散化の誤差と観測の誤差が含まれ、一般に最小二乗法による1回の計算で未知パラメータを求める。

また、間接法では求めようとする未知パラメータを仮定して支配方程式を解き、観測値とそれに対応する計算値の誤差を最小にするよう未知パラメータを決める方法である。この方法では誤差からなる目的関数が未知パラメ-

ータに関して非線形となるため、反復計算を必要とする。

これらの方法では観測値の数と未知パラメータの数の関係は、観測値の数の方が多くなることが必要とされる。このため地盤統計学⁴⁾を用いて、観測値のない節点のデータを補間し、この値も観測値に含めた逆解析が行われている⁵⁾。これに対して観測値の数が未知パラメータの数より少ない場合は、事前情報を考慮した方法として、ベイズ推定法、カルマンフィルタ、最尤推定法などが用いられる。

地下水問題全般における逆解析の研究は主に1960年代から進められており、最近の間接法を中心に事前情報を用いた推定法や最適なパラメータ数の設定などの研究が行われている³⁾。国内においては、上田ら⁶⁾、藤間ら⁷⁾、大西ら⁸⁾、青木ら⁹⁾、本城ら¹⁰⁾、河野ら¹¹⁾などの研究がある。また、カルマンフィルタを用いた研究としては、Wilson, et al. ¹²⁾、上田ら⁶⁾、平野¹³⁾などの研究がある。Wilson, et al. は被圧地下水を対象として定常問題への適用を行っており、上田らや平野は地下水流れに関する支配方程式と透水量係数の空間分布式をシステム状態方程式に導入した定式化を行っている。一方、カルマンフィルタを用いた地盤の力学定数の推定も行われており、村上¹⁴⁾や鈴木ら¹⁵⁾の研究がある。

地下水流動を観測するにあたって、一般に流量が指定される境界の一部で地下水位が、また地下水位が指定される境界の一部で流量が観測される。しかし、地下水を対象とした以上の研究においては地下水位を観測量とする場合が多く、流量も観測量とした定式化は示されていない。そこで本研究では、以下の特徴を有する逆解析手法を提案する。(1)地下水位と流量(揚水量や注水量)を観測量とした逆解析が可能であり、さらに領域内の一部の透水係数が測定されている場合、これも観測量として用いることができる。(2)Wilson et al.¹²⁾は被圧地下水を対象とした平面2次元非定常問題を差分法で定式化

* 工修、清水建設(株)大崎研究室(〒100千代田区内幸町2-2-2 富国生命ビル)

** 工博、同上

しているが、本研究では不圧地下水を対象とした平面2次元非定常問題を有限要素法により定式化して逆解析を行う。(3) 観測点数が未知パラメータ(透水係数)数より少ない場合でも計算可能なように、逆解析手法として拡張カルマンフィルタを用い、その状態量である地下水位と流量の時間更新に上記の有限要素法(非定常解析)を用いる。

本報告では、特に地下水位および揚水量をそれぞれ独立に観測した場合の逆解析結果を比較し、本手法の妥当性を検討する。また、同検討において観測点数の影響も調べる。なお、透水係数の空間分布推定に必要な統計的特性は既知と仮定する。

2. 有限要素法の定式化

非定常状態の不圧地下水の支配方程式は、平面2次元状態を仮定すると質量保存則、ダルシー則、Dupuitの仮定から式(1)で、また初期条件、境界条件は式(4)、(5)、(6)で表わされる。

$$\text{支配方程式} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left(T_{ij}(h) \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) = c \frac{\partial h}{\partial t} - q \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$T_{ij}(h) = (h - a) K_{ij} \quad (2)$$

$$i, j = 1, 2$$

ダルシー則

$$v_i = -K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad (3)$$

初期条件

$$h(x, t = 0) = h_0(x) \quad \text{in } \Omega \quad (4)$$

境界条件

$$h(x, t) = \bar{h}(x, t) \quad \text{on } \partial\Omega_h \quad (5)$$

$$q(x, t) = - \left(T_{ij}(h) \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) n_i = \bar{q}(x, t) \quad \text{on } \partial\Omega_q \quad (6)$$

ここで、 x_i は水平面内の直交座標、 h は地下水位、 a は基底不透水面の鉛直座標、 T_{ij} は透水量テンソル、 K_{ij} は透水係数テンソル、 c は有効間隙率(貯留係数)、 q は単位水平面積当たりの水の湧き出し量、 n_i は境界面の外向き法線ベクトルの成分、 t は時間である。さらに Ω は解析領域、 $\partial\Omega_h$ は地下水位境界、 $\partial\Omega_q$ は流量境界であり、 $h_0(x)$ は初期地下水位、 $\bar{h}(x, t)$ は境界地下水位、 $\bar{q}(x, t)$ は境界流量である。以上の解析領域と境界条件については、図-1に示している。

式(1)、(5)、(6)に対して、形状関数 N_k を用いて領域および境界上で離散化すると式(7)~(10)が得られる。

$$K(h) - q = -S \frac{dh}{dt} \quad (7)$$

$$K(h) = \int_{\Omega} T_{ij}(h) \frac{\partial N_k}{\partial x_i} \frac{\partial N_l}{\partial x_j} dV \quad (8)$$

$$S = \int_{\Omega} c N_k N_l dV \quad (9)$$

$$q = \int_{\Omega} q N_k dV - \int_{\partial\Omega_q} \bar{q} N_k dS \quad (10)$$

上記の式(7)を時間に関して差分をとると、式(11)~(15)が得られる¹⁶⁾。

$$A(h_{t+\theta}) h_{t+1} = B(h_{t+\theta}) h_t + q_{t+\theta} \quad (11)$$

$$A(h_{t+\theta}) = \frac{1}{\Delta t} S + \theta K(h_{t+\theta}) \quad (12)$$

$$B(h_{t+\theta}) = \frac{1}{\Delta t} S + (\theta - 1) K(h_{t+\theta}) \quad (13)$$

$$h_{t+\theta} = (1 - \theta) h_t + \theta h_{t+1} \quad (14)$$

$$q_{t+\theta} = (1 - \theta) q_t + \theta q_{t+1} \quad (15)$$

ここで足文字 t は離散時間ステップ、 Δt は時間増分、 θ は $0 \leq \theta \leq 1$ のパラメータで前進差分、中央差分、後退差分などの各方法により決定される。式(11)から時系列に関して t ステップの地下水位 h_t がわかれば、 $t+1$ ステップの地下水位 h_{t+1} を求めることができる。解析領域の境界条件により、式(11)を未知量と既知量に分けて表示すると次式となる。

$$\begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_{t+1}^1 \\ h_{t+1}^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{11} & B^{12} \\ B^{21} & B^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_t^1 \\ h_t^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_{t+\theta}^1 \\ q_{t+\theta}^2 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

式(16)の h に関する肩文字1と2はそれぞれ未知地下水位と境界(既知)地下水位を表わし、これと逆に q に関する肩文字1と2はそれぞれ境界(既知)流量と未知流量を表わす。したがって、 h_{t+1}^2 、 $q_{t+\theta}^1$ は、式(5)、(6)で与えられる境界条件より、それぞれ \bar{h} 、 \bar{q} を与えた境界節点の $t+1$ 、 $t+\theta$ ステップの値である。また、 A と B の肩文字は、 h の未知地下水位と境界地下水位に対応する項を表わしている。以上より、未知地下水位について解くべき方程式は式(17)となり、これを求めた後、式(15)を用いると未知流量は式(18)で求められる。

$$h_{t+1}^1 = [A^{11}]^{-1} \cdot [B^{11} h_t^1 + B^{22} h_t^2 - A^{12} h_{t+1}^2 + q_{t+\theta}^1] \quad (17)$$

$$q_{t+1}^2 = \frac{1}{\theta} [A^{21} h_{t+1}^1 + A^{22} h_{t+1}^2 - B^{21} h_t^1 - B^{22} h_t^2 - (1 - \theta) q_t^2] \quad (18)$$

式(17)の計算において、式(8)、(12)、(13)、(14)から A 、 B は求めるべき地下水位 h_{t+1} の関数となるため非線形性を示し、一般に繰り返し計算を行う必要がある。この繰り返し計算で $i-1$ 回目の解を $(h^{i-1})_{t+1}$ 、 i 回目の解を $(h^i)_{t+1}$ とすると、 $i+1$ 回目の繰り返し計算の $(h^{i+1})_{t+1}$ を次式で求める。

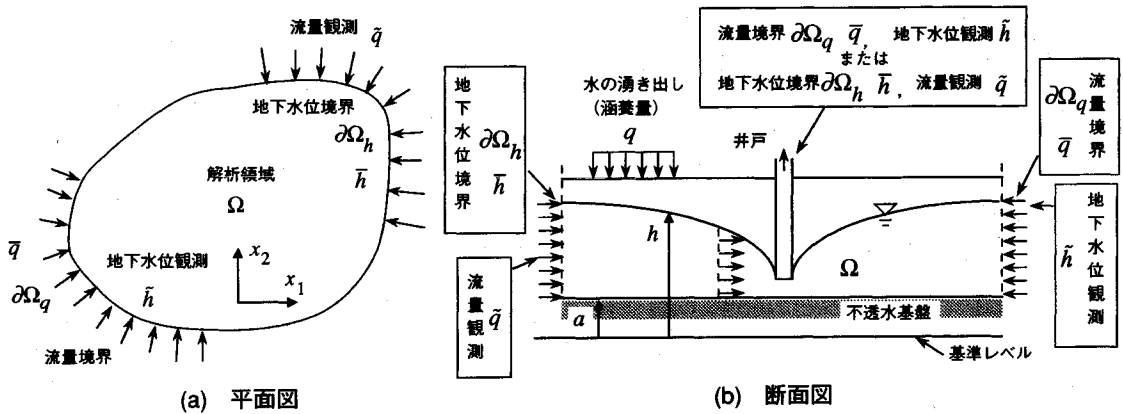


図-1 不圧帯水層の解析領域と境界条件

$$(h^{i+1})_{t+1} = (1 - \alpha)(h^{i-1})_{t+1} + \alpha(h^i)_{t+1} \dots (19)$$

ここで α は $0 \leq \alpha \leq 1$ のパラメータで、十分小さな正値 ϵ に対して次式を満足するまで繰り返し計算を行い、上記の $K(h_{t+\theta})$ を求める。

$$\| (h^i)_{t+1} - (h^{i-1})_{t+1} \| \leq \epsilon \dots (20)$$

以上の式(17), (18)により次期ステップの地下水位と流量の非線形計算を行い、その結果は後述する拡張カルマンフィルタの状態方程式において状態量の時間更新に用いられる。

一方、観測量に関しては、境界 $\partial\Omega_h$ 上で地下水位 \tilde{h} を与えて流量 \tilde{q} を観測するか、あるいは境界 $\partial\Omega_q$ 上で流量 \tilde{q} を与えて地下水位 \tilde{h} を観測することになる。しかし、原位置において図-1(a)の周辺境界上の流量を指定あるいは観測することは一般に困難である。これに対して図-1(b)の井戸の揚水量は容易に指定あるいは観測できる。揚水量を指定すると地下水位が観測され、指定される揚水量は有限要素法で離散化を行った後の節点流量として一般にモデル化され、式(10)に加えられる。また、井戸において地下水位を指定して揚水量を観測することも行われる。この例としてディープウェル工法などで強制的に地下水位を低下させた場合の揚水量があり、指定される地下水位は有限要素法の節点水位としてモデル化できる。したがって井戸の水位と揚水量は数値解析において境界条件としてモデル化でき、観測も容易なことから、以下ではこれらを実際に観測可能な地下水位と流量とする。以上より、井戸の水位と揚水量も含めて境界条件と考え、観測境界条件を次式のように導入する。

$$h(x, t) = \tilde{h}(x, t) \quad \text{on } \partial\Omega_q \dots (21)$$

$$q(x, t) = - \left(T_{ij}(h) \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) n_i = \tilde{q}(x, t) \quad \text{on } \partial\Omega_h \dots (22)$$

式(21), (22)の観測境界条件は、流量境界の一部において地下水位が、地下水位境界の一部において流量が観測されることから、離散化した節点の地下水位と流量に関して式(23), (24)の関係で表わされる。

$$G_i^h h_i^1 = \tilde{h}_i^1 \dots (23)$$

$$G_i^q q_i^2 = \int_{\partial\Omega_h} \tilde{q} N_k dS = \tilde{q}_i^2 \dots (24)$$

ここで G_i^h , G_i^q は観測点を選択するマトリクスであり、それぞれ地下水位、流量が観測されている節点に対する成分のみ1、他は0のマトリクスである。以上の式(23), (24)は、以下の拡張カルマンフィルタの観測方程式に用いられる。

3. 拡張カルマンフィルタの定式化

状態ベクトルを X_t 、観測ベクトルを Y_t とし、一般的な拡張カルマンフィルタのシステム状態方程式と観測方程式は以下のように与えられる。

$$X_{t+1} = f_t(X_t) + w_t \dots (25)$$

$$Y_t = g_t(X_t) + v_t \dots (26)$$

ここで式(25)と式(26)は状態ベクトルに関して非線形で、 w_t と v_t はそれぞれシステム誤差、観測誤差であり、正規白色性を有する。本手法で提案するシステム状態方程式と観測方程式を以下に示す。

$$X_{t+1} \equiv \begin{Bmatrix} h_{t+1}^1 \\ L_{t+1} \\ q_{t+1}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_t^h(X_t) \\ L_t \\ f_t^q(X_t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} w_t^h \\ w_t^L \\ w_t^q \end{Bmatrix} \dots (27)$$

$$\begin{aligned}
 Y_t &\equiv \begin{Bmatrix} \tilde{h}_t^1 \\ \tilde{L}_t \\ \tilde{q}_t^2 \end{Bmatrix} \\
 &= G_t X_t + v_t \\
 &= \begin{bmatrix} G_t^h & 0 & 0 \\ 0 & G_t^L & 0 \\ 0 & 0 & G_t^q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_t^1 \\ L_t \\ q_t^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} v_t^h \\ v_t^L \\ v_t^q \end{Bmatrix} \dots \dots (28)
 \end{aligned}$$

システム状態方程式は、式(27)に示すように先の式(17)、(18)で求められる地下水位 h_{t+1}^1 と流量 q_{t+1}^2 を用いる。システム誤差 w_t^h と w_t^q は式(1)の支配方程式中に含まれていないが、有限要素法による地盤のモデル化や離散化の過程などで生じる誤差で、式(17)と式(18)に付加される。また、状態ベクトルには透水係数の常用対数をとった値 L も用いる。これは拡張カルマンフィルタの計算において透水係数の分布をオーダー的に評価し、比較的小さなオーダーの透水係数も正確に求めるためである。同様の設定は Wilson et al.¹²⁾、上田ら⁶⁾、平野¹³⁾、本城ら¹⁰⁾なども行っており、一般に現場試験などから得られるデータから、透水係数は対数正規分布に近い分布を示す場合が多いという統計的データに基づいている。このように、システム状態方程式では非線形計算を有限要素法で実施し、透水係数に関しては時間的な変化がないものとする。

次に、観測方程式において \tilde{h}_t^1 は観測される地下水位、 \tilde{L}_t は調査や試験により測定される一部領域の透水係数の常用対数をとった値、 \tilde{q}_t^2 は観測される流量である。また、観測方程式は線形とし、 G_t^h 、 G_t^L 、 G_t^q はそれぞれ地下水位、透水係数、流量が観測されている成分のみ1、他は0のマトリクスである。すなわち、地下水位と流量は先の観測境界条件式(23)、(24)が導入され、透水係数に関しては別途調査・試験によって一部の領域の透水係数が測定されている場合、この常用対数をとった値を観測量として用いることができる。

以上のシステム状態方程式と観測方程式を基に、状態ベクトルと推定誤差共分散マトリクスの初期値 $\hat{X}_{0/t-1}$ 、 $P_{0/t-1}$ が与えられた後、カルマンゲイン K_t 、フィルタ方程式、推定誤差共分散マトリクス $P_{t/t}$ は以下のように求められる¹⁷⁾。

初期値

$$\hat{X}_{0/t-1} = \bar{X}_0 \dots \dots \dots (29)$$

$$P_{0/t-1} = \bar{P}_0 \dots \dots \dots (30)$$

カルマンゲイン

$$K_t = P_{t/t-1} G_t^T [G_t P_{t/t-1} G_t^T + R_t]^{-1} \dots \dots \dots (31)$$

$$R_t = E \left[\begin{Bmatrix} v_t^h \\ v_t^L \\ v_t^q \end{Bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} [v_t^h]^T & [v_t^L]^T & [v_t^q]^T \end{bmatrix} \right\} \right] \dots \dots (32)$$

フィルタ方程式

$$\hat{X}_{t/t} = \hat{X}_{t/t-1} + K_t [Y_t - G_t \hat{X}_{t/t-1}] \dots \dots \dots (33)$$

$$\hat{X}_{t+1/t} = \begin{Bmatrix} \hat{h}_{t+1/t}^1 \\ \hat{L}_{t+1/t} \\ \hat{q}_{t+1/t}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_t^h(\hat{X}_{t/t}) \\ \hat{L}_t \\ f_t^q(\hat{X}_{t/t}) \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (34)$$

推定誤差共分散マトリクス

$$P_{t/t} = P_{t/t-1} - K_t G_t P_{t/t-1} \dots \dots \dots (35)$$

$$P_{t+1/t} = F_t P_{t/t} F_t^T + Q_t \dots \dots \dots (36)$$

$$Q_t = E \left[\begin{Bmatrix} w_t^h \\ w_t^L \\ w_t^q \end{Bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} [w_t^h]^T & [w_t^L]^T & [w_t^q]^T \end{bmatrix} \right\} \right] \dots \dots (37)$$

上記の式中で、 $\hat{\cdot}$ は推定値を、肩文字 T は転置を、足文字 $t+1/t$ は時刻 t ステップの情報に基づく時刻 $t+1$ ステップの値を表わす。拡張カルマンフィルタにおいて、上記の推定誤差共分散マトリクスの計算に含まれる状態遷移マトリクス(Jacobian行列) F_t は、非線形なシステム状態方程式(27)を推定値のまわりでテーラー展開し、線形化すると次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 F_t &= \begin{bmatrix} J^{hh} & J^{hL} & J^{hq} \\ J^{Lh} & J^{LL} & J^{Lq} \\ J^{qh} & J^{qL} & J^{qq} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial h_{t+1}^1}{\partial h_t^1} \right)_{h_t^1=\hat{h}_{t/t}^1} & \left(\frac{\partial h_{t+1}^1}{\partial L_t} \right)_{L_t=\hat{L}_{t/t}} & \left(\frac{\partial h_{t+1}^1}{\partial q_t^2} \right)_{q_t^2=\hat{q}_{t/t}^2} \\ \left(\frac{\partial L_{t+1}}{\partial h_t^1} \right)_{h_t^1=\hat{h}_{t/t}^1} & \left(\frac{\partial L_{t+1}}{\partial L_t} \right)_{L_t=\hat{L}_{t/t}} & \left(\frac{\partial L_{t+1}}{\partial q_t^2} \right)_{q_t^2=\hat{q}_{t/t}^2} \\ \left(\frac{\partial q_{t+1}^2}{\partial h_t^1} \right)_{h_t^1=\hat{h}_{t/t}^1} & \left(\frac{\partial q_{t+1}^2}{\partial L_t} \right)_{L_t=\hat{L}_{t/t}} & \left(\frac{\partial q_{t+1}^2}{\partial q_t^2} \right)_{q_t^2=\hat{q}_{t/t}^2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial h_{t+1}^1}{\partial h_t^1} \right)_{h_t^1=\hat{h}_{t/t}^1} & \left(\frac{\partial h_{t+1}^1}{\partial L_t} \right)_{L_t=\hat{L}_{t/t}} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \left(\frac{\partial q_{t+1}^2}{\partial h_t^1} \right)_{h_t^1=\hat{h}_{t/t}^1} & \left(\frac{\partial q_{t+1}^2}{\partial L_t} \right)_{L_t=\hat{L}_{t/t}} & \frac{\partial-1}{\theta} I \end{bmatrix} \dots \dots (38)
 \end{aligned}$$

ここで状態遷移マトリクス内の感度マトリクス J^{hh} 、 J^{hL} 、 J^{qh} 、 J^{qL} は、Appendixに示す式で求められる。

なお、以下に示す逆解析例においては、上記のカルマンフィルタの演算精度を向上させるためU-D分解フィルタ¹⁷⁾を用いている。

4. 逆解析例

以上の逆解析手法の妥当性を検討するため、平面2次元領域に透水係数が分布する地盤モデルを想定し、この地盤モデルにおける地下水位と揚水量の模擬観測データを作成し、これを観測量として透水係数の空間分布推定を行う。特に、本論文では地下水位および揚水量をそれぞれ独立に観測量とした場合の逆解析結果を比較し、本手法の妥当性を検討する。

表一 設定した透水係数の空間分布特性

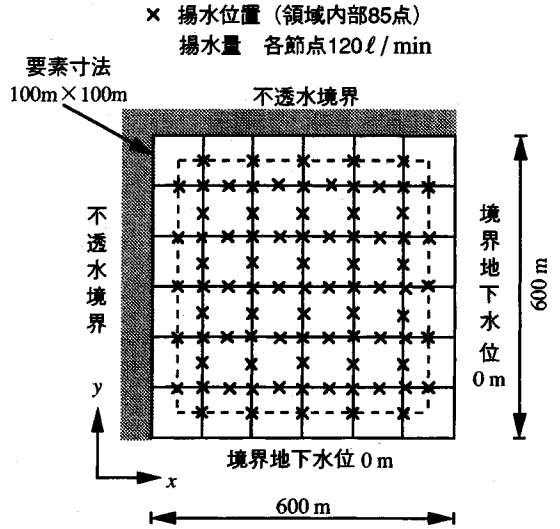
透水係数 (単位cm/s) の常用対数値に対する
平均値と共分散関数

平均値	共分散関数
-2 (1.0×10^{-2} cm/s)	$C(d) = \sigma^2 \cdot \exp \left[- \left\{ \left(\frac{d_x}{a_x} \right)^2 + \left(\frac{d_y}{a_y} \right)^2 \right\}^{1/2} \right]$ $\sigma^2 = 1.0, a_x = a_y = 200m, d = (d_x^2 + d_y^2)^{1/2}$

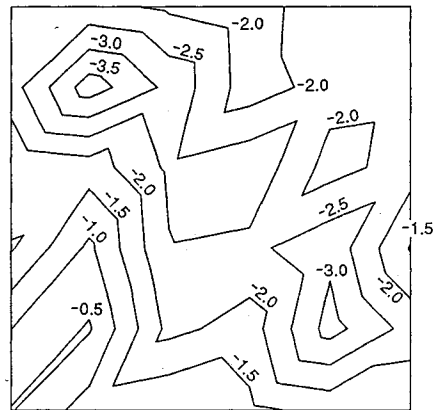
(1) 解析モデルと解析ケース

はじめに、地盤モデルの作成方法を示す。透水係数は等方性を仮定し、その空間分布モデルを表一のように設定する。すなわち、透水係数分布は対数正規分布に従うものとし、cm/sの単位の透水係数に対して常用対数をとった値の平均値が-2.0、分散が1.0の母集団を設定する。また、共分散関数としては2次元の指数型の関数を仮定した。共分散関数の変数である d_x 、 d_y はそれぞれx、y方向の距離、パラメータ a_x 、 a_y はそれぞれx、y方向の相関距離である。この関数で表わされる共分散は同一地点では分散 σ^2 に等しく、隣接する2点間では相関性が高く透水係数は同様の値を示すが、離れるに従って指数関数的に相関性が低下して2点間で異なる値を示す特徴を有する。このような共分散関数は、地盤物性値の空間分布特性を表わすモデルとして用いられている^{4),18)}。

以上の母集団から標本となる透水係数の空間分布モデルを1つ発生させ、ここで用いる地盤モデルとする。図一2には要素分割モデルを示しており、対象とする平面領域は600m×600mの正方領域で、不透水基盤までの深さは一律50mとする。要素の寸法は100m×100mで、8節点のアイソパラメトリック要素を用いおり、領域全体の要素数は36、節点数は133である。このモデルの各要素に一定の透水係数を割り当てる。その手順として、はじめに表一の共分散関数により、要素中心距離dに依存した相関を持つ共分散マトリクスを作成する。次に、先の母集団から発生させた乱数に、共分散マトリクスをコレスキュー分解して得られる下三角マトリクスを乗じて透水係数の空間分布モデルを作成する¹⁹⁾。こうして作成したモデルを図一3に示す。図一3は透水係数の常用対数をとった値を示しており、本モデルでは各要素内で一定の透水係数を有するが、便宜的に要素中心位置に透水係数を割り当てて描いたコンターである。したがって、図一2の破線で示した正方領域(500m×500m)の透水係数の巨視的な分布傾向を示している。なお、有効間隙率は全要素とも6.0%とする。



図一2 解析モデル図



図一3 設定した透水係数の空間分布モデル (単位 cm/s の透水係数の常用対数値)

次に、模擬観測データの作成方法を述べる。本論文では、地下水位および揚水量をそれぞれ独立に観測量とした場合の逆解析結果(後述する2シリーズ)を比較する。このため同一の地下水流動を対象に、両観測量に関する観測点数や観測位置などの観測条件を一致させることが望ましい。そこで次のような条件で模擬観測データを作成する。

地下水位の観測データを作成するため、周辺境界を除く領域内部の全節点(図一2の揚水位置85点)から120l/min($2.0 \times 10^{-3} m^3/s$)の一定流量を揚水するものとし、この場合の地下水位の経時変化を有限要素法の順解析

- 凡例
- × CASE-A1 地下水位観測位置 (85点)
 - CASE-A2 地下水位観測位置 (36点)
 - CASE-A3 地下水位観測位置 (25点)

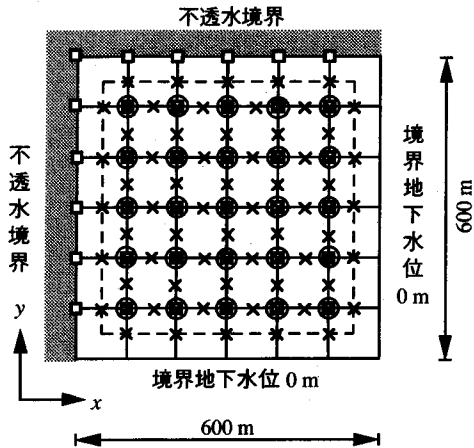


図-4 Aシリーズの観測点配置

- 凡例
- × CASE-B1 流量観測位置 (85点)
 - CASE-B2 流量観測位置 (36点)
 - CASE-B3 流量観測位置 (25点)

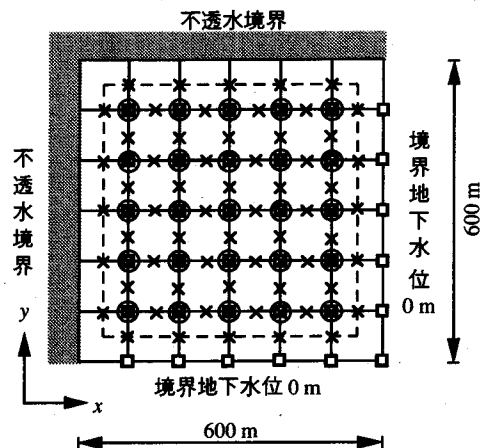


図-5 Bシリーズの観測点配置

表-2 推定誤差共分散の初期値, システム誤差分散および観測誤差分散

分散	関係する状態量	地下水位 (m) ²	透水係数: 単位(cm/s)の透水係数の常用対数に対する分散	流量 上段: (m ³ /s) ² , 下段: (ℓ/min) ²
推定誤差共分散の初期値		1.1×10 ⁻¹ (分散のみ)	表-1の共分散関数から求める値	7.0×10 ⁻⁵ 25.2×10 ⁴ (分散のみ)
システム誤差分散		0.0	0.0	0.0 0.0
観測誤差分散		1.1×10 ⁻⁵	1.0×10 ⁻⁵	7.0×10 ⁻⁹ 25.2

により求め、これを模擬観測データとする。ただし、揚水量は $8.7 \times 10^4 \text{ sec}$ 後 (約1日後) に所定の 120 l/min となるように時間に関して線形に増加させ、その後 120 l/min で一定の揚水量とする。以上の条件で地下水位を観測する場合をAシリーズとし、図-4に示すように観測点数を85点、36点、25点と変えた3ケースを、それぞれCASE-A1, A2, A3とする。次に、揚水量の観測データを作成するため、Aシリーズにおいて揚水を行った領域内部の全節点に、揚水時の地下水位の経時変化を境界条件として設定する。この条件で有限要素法の順解析から各節点の揚水量を求め、これを模擬観測データとする。したがって、先に揚水量 120 l/min を与えた節点では、計算誤差がなければ観測データとして 120 l/min が求まるが、

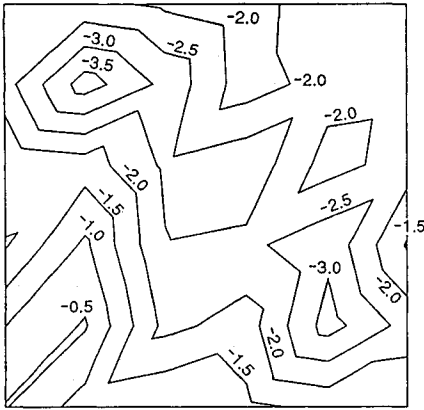
実際には数値計算誤差を含んでいる。このように揚水量を観測する場合をBシリーズとし、図-5のように観測点数を85点、36点、25点と変えた3ケースを、それぞれCASE-B1, B2, B3とする。AシリーズとBシリーズの観測点配置のうち、CASE-A1, A3はCASE-B1, B3と同一の位置である。一方、CASE-A2とCASE-B2は周辺境界にも観測点を設定しており、CASE-A2では地下水位を観測量とするため流量指定境界に、CASE-B2は揚水量を観測量とするため地下水位指定境界にそれぞれ観測点を配置している。なお、初期水位はいずれも深さ 0.0 m で一律とする。

ところで、実際の試験で85点もの多くの揚水を同時に行うことは困難であるが、ここでは後述する統計処理により上記の揚水量の観測誤差を評価するため、サンプルデータとして揚水位置を多く設定する。

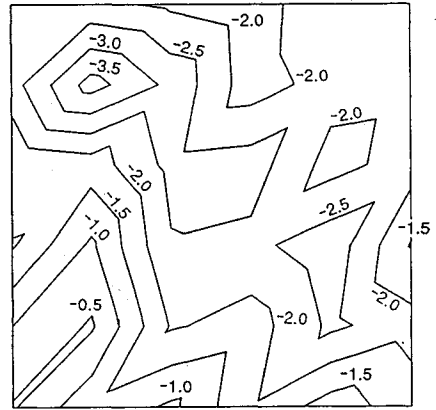
さて、カルマンフィルタを用いた逆解析では、推定誤差共分散の初期値、システム誤差、観測誤差を設定する必要があり、本解析では表-2のように設定する。なお、本解析例においてシステム誤差と観測誤差の共分散マトリクスは、分散 (対角成分) のみ下記の方法で仮定し、共分散 (非対角成分) は0と仮定した。

まず、システム誤差に関しては、模擬観測データを有限要素解析により作成し、逆解析においても同一の有限要素法を用いていることから、地下水位と揚水量に関する同値は0と仮定する。また、透水係数についても0とする。

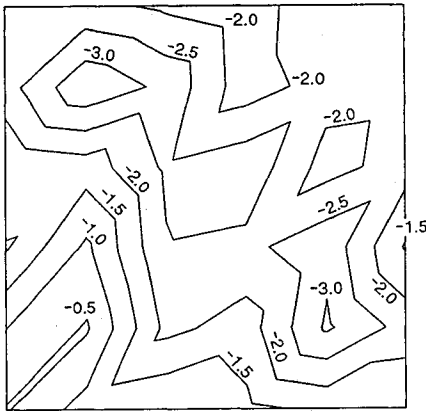
観測誤差は、実際には観測計器類の測定精度などから



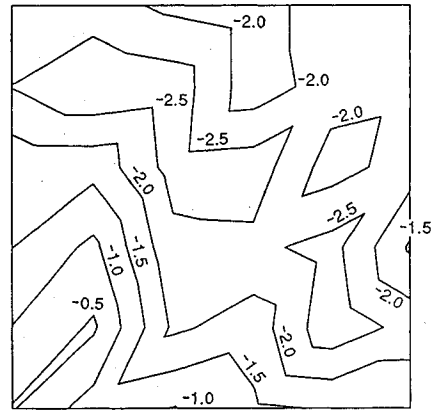
図—6 CASE-A1の透水係数の推定結果 (単位 cm/s の透水係数の常用対数値)



図—8 CASE-A2の透水係数の推定結果 (単位 cm/s の透水係数の常用対数値)



図—7 CASE-B1の透水係数の推定結果 (単位 cm/s の透水係数の常用対数値)



図—9 CASE-B2の透水係数の推定結果 (単位 cm/s の透水係数の常用対数値)

評価される。ここでは模擬観測データを用いており、有限要素法の収束判定式 (20) において $\epsilon = 1.0cm$ と設定しており、このことを参考に地下水位の観測誤差は $\pm 3\sigma = \pm 1.0cm$ (σ^2 : 分散) と仮定した。また、揚水量に関する観測誤差は、Bシリーズの観測量として求まる揚水量のうち、領域内部の85点において $120l/min$ となるべき揚水量を統計処理して求めた値 (分散) を与える。

最後に、推定誤差共分散の初期値は、透水係数に関しては先の表—1の共分散関数により決まる値とする。また、地下水位と揚水量に関する推定誤差共分散は分散のみ考慮し、共に観測誤差分散の 1.0×10^4 倍の値を仮定する。

(2) 逆解析結果と考察

式 (29) の状態量の初期値 \bar{x}_0 として、地下水位は初期水位の $0.0m$ を、透水係数の常用対数値は平均値 -2 を、揚水量は $0.0l/min$ を設定して36個の透水係数の逆解析を行った。図—6～11は逆解析結果を示しており、推定された透水係数の常用対数をとった値を示している。これらの結果は時間 $1.0 \times 10^7 sec$ (約116日) までの327ステップの模擬観測データを用いた結果である。地下水位および揚水量を観測量としたAシリーズとBシリーズで、観測点数が同一のCASE-A1とCASE-B1、CASE-A2とCASE-B2、CASE-A3とCASE-B3の結果を、先の図—3を基準として比較する。

観測点数が85点と最も多いCASE-A1とCASE-B1では、比較的良好な推定結果が得られている。CASE-A1で

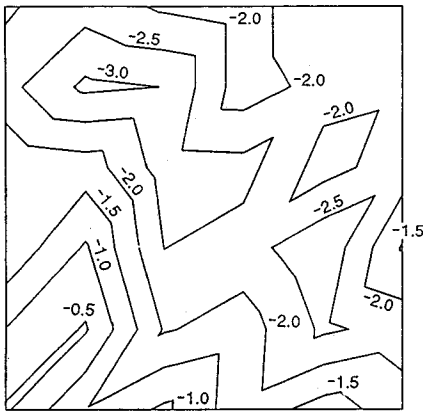


図-10 CASE-A3の透水係数の推定結果 (単位 cm/s の透水係数の常用対数値)

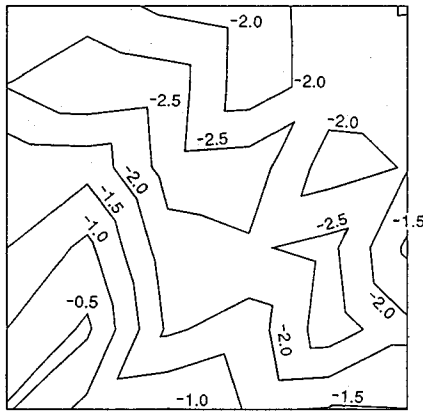


図-11 CASE-B3の透水係数の推定結果 (単位 cm/s の透水係数の常用対数値)

は、設定した図-3の透水係数分布によく一致している。また、CASE-B1では透水係数の小さな $10^{-3} cm/sec$ オーダーの透水係数の推定精度が若干低下するものの、ほぼ設定した透水係数分布が得られていると言える。CASE-A2とCASE-B2を比較すると、それぞれ先のCASE-A1とCASE-B1より推定精度は低下する。これは観測点数が未知パラメータ数と同一の36点に減少した影響と考えられる。CASE-B2では、透水係数の小さな $10^{-3} cm/sec$ オーダーの透水係数の推定精度がCASE-B1よりも低下している。CASE-A3とCASE-B3では、さらに観測点数が低下するため推定精度は低下する。

以上の逆解析結果について領域全体の平均的な推定精度を評価するため、式(39)、(40)に示す S_m 、 E_m の2種類の指標を求める。 S_m は先の式(35)で求められる透水

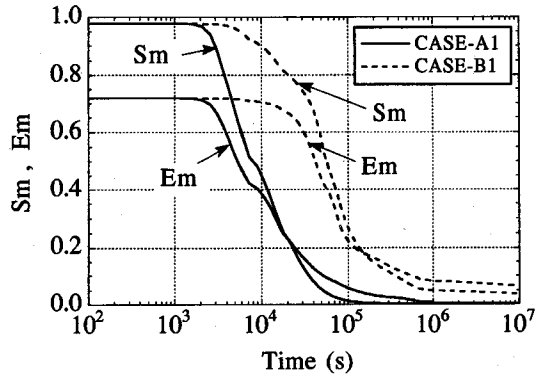


図-12 CASE-A1,B1の推定過程における S_m と E_m の変化

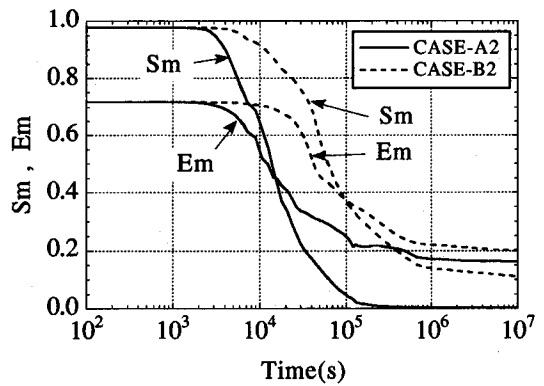


図-13 CASE-A2,B2の推定過程における S_m と E_m の変化

係数の常用対数値の推定誤差分散 $Var(\log K)$ を全要素 (要素数 $n = 36$) で平均し、その平方根をとった値である。また、 E_m は設定した透水係数の常用対数値 $\log K$ を基準に、推定された透水係数の常用対数値 $\log \hat{K}$ の残差二乗和を全要素で平均し、その平方根をとった値である。

$$S_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n Var(\log K_i)}{n}} \dots\dots\dots (39)$$

$$E_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\log \hat{K}_i - \log K_i)^2}{n}} \dots\dots\dots (40)$$

逆解析の計算過程において、時間ステップと共に上記の値の変化を示したものが図-12~14である。図-12はCASE-A1とCASE-B1の S_m 、 E_m を示しており、CASE-A1では S_m が初期値 1.0 から減少して十分小さな値に収束

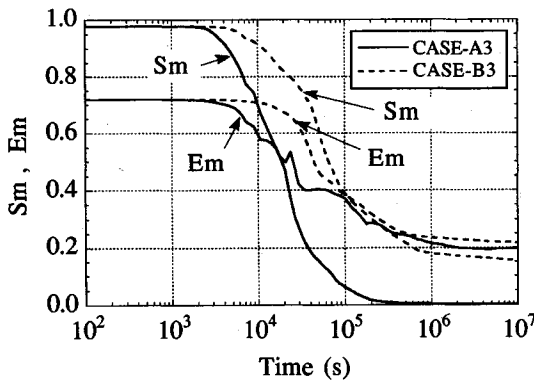


図-14 CASE-A3,B3の推定過程における S_m と E_m の変化

している。また、CASE-B1の S_m はCASE-A1よりは遅れて減少し、最終段階でも若干大きな値に収束している。 E_m も同様の傾向で収束し、CASE-A1の方が若干推定精度はよいと言える。同様に図-13はCASE-A2とCASE-B2における同値の変化を示しているが、図-12と比較すると両ケースとも S_m 、 E_m が若干大きな値に収束している。図-14にはCASE-A3とCASE-B3について同値の変化を示すが、図-13と同様の傾向がさらに強まっている。

以上の図-12~14を通して、地下水位を観測量としたAシリーズの方が推定精度がよい。この理由として観測誤差の設定において揚水量よりも地下水位の方が相対的な観測誤差が小さいことが挙げられる。すなわち、今回用いた有限要素法の定式化では、地下水位を計算したのちその値を用いて揚水量を計算するため、一般に揚水量より地下水位の方が精度がよい。実際、最終時間ステップの $1.0 \times 10^7 \text{ sec}$ において、地下水位は $-0.185 \text{ m} \sim -8.984 \text{ m}$ の範囲で低下しており、これに対する観測誤差(標準偏差)の割合は先に仮定した表-2から $1.8\% \sim 0.037\%$ である。一方、揚水量は約1日($8.7 \times 10^4 \text{ sec}$)経過したのちはほぼ 120 l/min であり、これに対する観測誤差(標準偏差)の割合は同じく表-2から 5.0% である。このような特徴は有するものの、揚水量を用いても実用的には十分な推定が行えるものと判断でき、両方の観測量が得られている場合、限られた観測量を有効に利用するためにこれらを共に用いた解析が望まれる。

また、観測点数が低下すると推定精度も低下するが、与えられた観測点配置の下では十分な推定が行われていると言える。観測点数の低下に伴い推定精度が低下する理由は、観測点数の減少により36個の未知パラメータの決定に必要な情報が十分得られないためである。これ

は観測誤差などにも依存するが、極端に観測点数が少ない場合などは不適切な(ill-posed)問題となり、推定値が安定せず実際の値と大きく異なる結果になることがある。このような場合はパラメータ(透水係数)の数を減少させることなどで解を安定化させることが可能となる³⁾。本研究ではベイズ理論の立場から拡張カルマンフィルタを用い、事前情報により観測点数より多くのパラメータを扱うことが可能になっている。

最後に、 S_m と E_m の収束状況が類似しており、実際の問題では E_m が評価できないことを勘案すると、時間軸上で S_m (一般には推定誤差共分散)が小さな値に収束すれば、時間方向に十分な観測点数が得られた推定結果であると判断できる。

5. 結論

本論文では、地下水問題において重要なパラメータとなる透水係数の空間分布推定を目的として、地下水位と流量を観測量とする逆解析手法を提案した。また、領域内の一部の透水係数が測定されている場合に、これも観測量として用いることができるよう定式化を行った。特に、ここでは不圧地下水を対象とした平面2次元問題を有限要素法により定式化し、非定常状態の観測値を用いた手法を示した。さらに、逆解析手法には拡張カルマンフィルタを用いており、観測点数が未知パラメータ(透水係数)数より少ない場合でも計算可能である。

一方、地盤モデルを用いた数値シミュレーションにより模擬観測データを作成し、これを用いた逆解析例を示した。その結果から、地下水位と揚水量をそれぞれ独立に観測量とした結果と比較し、本手法の妥当性を検討した。その結果以下の結論が得られた。

(1) 地下水位を観測量とした場合と揚水量を観測量とした場合を比較すると、地下水位を観測量とする方が特に透水係数の小さな領域の推定精度がよい。

(2) 上記(1)の特性はあるものの、揚水量を用いても実用的には十分な推定が行えるものと判断でき、地下水位と揚水量の観測が共に行われている場合は、限られた観測量を有効に利用するためこれらを共に用いた解析が望まれる。

(3) 実際の問題では、推定誤差共分散が時間軸上で小さな値に収束すれば、時間方向に十分な観測点数が得られた推定結果であると判断できる。

ただし、実際に適用する場合、(1)、(2)の特性はシステム誤差や観測誤差の設定により異なる可能性があるため、解析モデルの作成や観測システムの構築において適切な評価を行うことが今後の課題となろう。

Appendix

感度マトリックス J^{hh} , J^{hL} , J^{qh} , J^{qL} は、式(17), (18) の両辺を偏微分することで次式のように与えられる。

$$J^{hh} = \left(\frac{\partial h_{i+1}^1}{\partial h_i^1} \right)_{h_i^1 = \hat{h}_{i/t}^1} = [A^{11}]^{-1} \cdot \left[B^{11} + \left(\frac{\partial B^{11}}{\partial h_i^1} \right) \hat{h}_{i/t}^1 + \left(\frac{\partial B^{12}}{\partial h_i^1} \right) h_i^2 - \left(\frac{\partial A^{11}}{\partial h_i^1} \right) \hat{h}_{i+1/t}^1 + \left(\frac{\partial A^{12}}{\partial h_i^1} \right) h_i^2 \right] \quad (A.1)$$

$$J^{hL} = \left(\frac{\partial h_{i+1}^1}{\partial L_t} \right)_{L_t = \hat{L}_{i/t}} = [A^{11}]^{-1} \cdot \left[\left(\frac{\partial B^{11}}{\partial L_t} \right) \hat{h}_{i/t}^1 + \left(\frac{\partial B^{12}}{\partial L_t} \right) h_i^2 - \left(\frac{\partial A^{11}}{\partial L_t} \right) \hat{h}_{i+1/t}^1 + \left(\frac{\partial A^{12}}{\partial L_t} \right) h_i^2 \right] \quad (A.2)$$

$$J^{qh} = \left(\frac{\partial q_{i+1}^2}{\partial h_i^1} \right)_{h_i^1 = \hat{h}_{i/t}^1} = \left[\left(\frac{\partial A^{21}}{\partial h_i^1} \right) \hat{h}_{i+1/t}^1 + \left(\frac{\partial A^{22}}{\partial h_i^1} \right) h_i^2 + A^{21} \cdot \left(\frac{\partial h_{i+1}^1}{\partial h_i^1} \right) - B^{21} + \left(\frac{\partial B^{21}}{\partial h_i^1} \right) \hat{h}_{i/t}^1 + \left(\frac{\partial B^{22}}{\partial h_i^1} \right) h_i^2 \right] \quad (A.3)$$

$$J^{qL} = \left(\frac{\partial q_{i+1}^2}{\partial L_t} \right)_{L_t = \hat{L}_{i/t}} = \left[\left(\frac{\partial A^{21}}{\partial L_t} \right) \hat{h}_{i+1/t}^1 + \left(\frac{\partial A^{22}}{\partial L_t} \right) h_i^2 + A^{21} \cdot \left(\frac{\partial h_{i+1}^1}{\partial L_t} \right) - \left(\frac{\partial B^{21}}{\partial L_t} \right) \hat{h}_{i/t}^1 + \left(\frac{\partial B^{22}}{\partial L_t} \right) h_i^2 \right] \quad (A.4)$$

また、 J^{hq} , J^{qq} も上記と同様の計算により式(38)のよう
に求まり、 J^{Lh} , J^{LL} , J^{Lq} は式(27)から求まる。

参考文献

- 1) 地下水問題研究会編：地下水汚染論 —その基礎と応用—, 共立出版, 1991.
- 2) 久保司郎：逆問題, 計算力学とCAEシリーズ10, 培風館, 1992.
- 3) Yeh, W. W-G.: Review of parameter identification procedures in groundwater hydrology: the inverse problem, Water Resources Research, Vol.22, No.2, pp.95~108, 1986.
- 4) Marsily, G. de : Quantitative Hydrogeology, Academic Press Inc., 1986.

- 5) 古市徹：環境移流拡散現象の解析手法と数値シミュレーションに関する研究—有限要素法を軸として—, 京都大学学位論文, 1984.
- 6) 上田年比古, 神野健二, 平野文昭：室見川流域の透水量係数と非定常地下水位の推定, 第28回水理講演会論文集, pp.601~608, 1984.
- 7) 藤間聡, 中田満洋：空間分布構造を有する透水係数の統計的推定法, 日本地下水学会誌, 第28巻, 第1号, pp.15~24, 1986.
- 8) 大西有三, 井尻祐二：不均質地盤における浸透流の逆問題解析手法に関する基礎的研究, 土木学会論文集, 第376号 / III-6, pp.121~130, 1986.
- 9) 青木一男, 嘉門雅史：不均質地盤における帯水層定数の同定について, 土木学会論文集, 第382号 / III-7, pp.91~99, 1987.
- 10) 本城勇介, 森嶋章：地下水浸透流解析モデルのパラメータ推定：推定の不確実性とその予測への影響, 土木学会論文集, 第400号 / III-10, pp.215~224, 1988.
- 11) 河野伊一郎, 西垣誠, 竹下祐二：逆解析手法を用いた被圧帯水層における揚水試験結果の解析方法, 土質工学会論文報告集, Vol.29, No.2, pp.159~168, 1989.
- 12) Wilson, J., P. Kitanidis and M., Dettinger: State and parameter estimation in groundwater models, Proceedings of AGU Chapman Conference on Application of Kalman Filter to Hydrology, Hydraulics, and Water Resources, pp.657~679, Pittsburgh, Penn., 1978.
- 13) 平野文昭：広領域における透水量係数および非定常地下水水頭の空間分布の推定に関する基礎的研究, 九州大学学位論文, 1985.
- 14) 村上章, 長谷川高士：Kalman フィルター有限要素法による逆解析と観測点配置, 土木学会論文集, 第388号 / III-8, pp.227~235, 1987.
- 15) 鈴木誠, 石井清：拡張カルマンフィルタによる土質定数の空間分布推定, 土木学会論文集, 第406号 / III-11, pp.71~78, 1989.
- 16) Huyakorn, P. S. and G. F. Pinder (赤井浩一 訳監修)：地下水解析の基礎と応用 上巻 基礎編, 現代工学社, 1987.
- 17) 片山徹：応用カルマンフィルタ, 朝倉書店, 1983.
- 18) Gelhar, L. W., : Stochastic subsurface hydrology from theory to applications, Water Resources Research, Vol.22, No.9, pp.1358~1458, 1986.
- 19) 星谷勝, 石井清：構造物の信頼性設計法, pp.88~91, 鹿島出版会, 1986.

(1992.10.7 受付)

PARAMETER IDENTIFICATION IN UNCONFINED AQUIFER USING EXTENDED KALMAN FILTER ALGORITHM

Tetsuo OKUNO and Makoto SUZUKI

In this paper, we propose a new methodology for parameter identification of groundwater systems. Observations of either groundwater heads, pumping rates or hydraulic conductivities estimated from permeability tests, can be used to identify the distributed parameter system in a unconfined aquifer. Based on the extended Kalman filter algorithm, a finite element analysis is used to predict the groundwater heads and the pumping rates at the next time step, both of which are treated as the state variables in addition to the hydraulic conductivities. Finally, the proposed methodology is verified with the case using simulated data in a model of groundwater system, and is found to be reasonably accurate.