

# 全ての flow regime に適用可能な波・流れ共存場抵抗則

田中 仁\*・Aung THU\*\*

著者の一人による乱流理論をもとに、遷移域を含めた全ての flow regime に適用可能な波・流れ共存場での摩擦係数および位相差の算定式を得た。さらに、これらの式をもとに、任意の交差角を有する波・流れ共存場における剪断力値・作用方向の位相変化を求め的手法を導いた。これらの式は完全に陽形式の式であり、flow regime の判定や繰り返し計算を必要としないので、任意の水利条件・底質条件下での底面剪断応力を容易に算定することが出来る。

**Key Words**: waves and current, turbulent flow, bottom shear stress, friction coefficient, flow regime

## 1. 序 論

波・流れ共存場における摩擦係数に関する研究は、渦動粘性モデルをもとにした解析的研究 (Grant and Madsen<sup>1)</sup>, 田中・首藤<sup>2)</sup>, 田中・チャン・首藤<sup>3)</sup>, Christoffersen and Jonsson<sup>4)</sup>, 出口<sup>5)</sup>) と、混合距離モデルあるいは  $k-\epsilon$  モデルに代表される多方程式モデルを用いた数値計算に基づく研究 (Bakker<sup>6)</sup>, Bakker and Van Doorn<sup>7)</sup>, 浅野・岡本・岩垣<sup>8)</sup>, 田中<sup>9)</sup>, Aydin<sup>10)</sup>, Davies et al.<sup>11)</sup>, 伊福・後藤<sup>12)</sup>) に大別される。さらに、これらと異なる手法による研究として、Fredsoe<sup>13)</sup>, Myrhaug and Slaattelid<sup>14)</sup> らがある。 $k-\epsilon$  モデル等の高次のモデルを用いることにより、乱流構造の細部に関する情報を得ることが可能であるが、数値計算によらざるを得ないため、実用上の問題には前者のモデルによる解が用いられることが多い。

渦動粘性モデルにより粗面乱流・滑面乱流の双方に対する摩擦係数が得られているが、それぞれの flow regime の判定条件は明らかでなく、実用上は砂粒を対象とする場合には粗面乱流のそれが用いられることが多い。近年、波と流れによる底泥の移動に関する研究も行われており、この様な滑らかな底質上の抵抗則の適用に当たっては flow regime の判定が必要となる。さらに、条件によっては遷移域に相当するケースもあり得るが、現在のところ適当な補間方法も確立されてはいない。

田中・首藤<sup>2)</sup> は波・流れ共存場摩擦係数に対して Moody 図表と同様な図を提案しているが、遷移条件の判定法が幾分複雑であり、また遷移域での計算法も得られてはいない。Myrhaug and Slaattelid<sup>14)</sup> は共存場に対して遷移域を含めた摩擦係数表示式を提案している。こ

こで言う遷移域とは粗面乱流・滑面乱流間のそれであり、管内定常流で得られた知見をもとにしている。波動下においては層流から粗面乱流への遷移も見られる<sup>15)</sup> ため、Myrhaug らの遷移域計算法では十分とは言えない。香取・榊山・渡辺<sup>16)</sup> は便宜的な方法として、層流・滑面乱流・粗面乱流の式を用いてそれぞれに対する摩擦係数を求め、それらのうちの最大値をもって解としているが、定常流場、波動場で見られる遷移域での摩擦係数の不連続的な変化 (例えば、Patel and Head<sup>17)</sup>, Kamphuis<sup>15)</sup>) を反映したものとはなっていない。

以上の状況を鑑み、本研究ではまず Tanaka and Shuto<sup>18)</sup> の解をもとに、滑面摩擦係数および底面剪断力の位相差に関する陽形式近似式を得た。次に、波・流れ共存場の各 flow regime の判定条件を検討し、実用的な判定式を導いた。以上の成果と、既に提案した粗面乱流の陽形式摩擦係数表示式 (田中<sup>19)</sup>) をもとに、遷移領域にも適用可能な摩擦係数および位相差の表示式を導いた。これらは完全陽形式であるため、きわめて実用性の高いものと言える。実験値との比較を行ったところ、従来のモデルでは説明できなかった遷移域での摩擦係数・位相差の挙動を極めて良好に表現できることが判った。また、今回得られた摩擦係数、位相差に関する実用的算定式の組合せにより、任意の交差角を有する波・流れ共存下での底面剪断力位相変化の簡便な計算法を得た。従来の解析解は特殊関数で表現されるものが多いため、剪断応力の経時変化の計算が煩雑であった。今回得られた手法によればきわめて簡単に計算を行うことが出来、一周期内の底質移動量・移動方向のモデル化等に容易に応用することができる。

## 2. 各 flow regime に対する摩擦係数の算定式

本節では、著者のひとりによる理論 (Tanaka and Shuto<sup>18)</sup>, 田中<sup>20)</sup>) をもとにした各 flow regime に対す

\*正会員 工博 アジア工科大学助教授 水資源工学科  
(GPO Box 2754, Bangkok 10110, Thailand)

\*\*M. Eng. アジア工科大学助手 水資源工学科

る陽的な摩擦係数表示式について述べる。

まず、波・流れ共存場における摩擦係数  $f_{cw}$  は次式で定義されている。

$$\tau_{\max} = \rho \bar{u}_{cw}^{*2} = \rho \frac{f_{cw}}{2} \bar{U}_w^2 \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $\tau_{\max}$  : 波・流れ共存時の底面剪断力の最大値、 $\rho$  : 流体の密度、 $\bar{u}_{cw}^*$  : 波・流れ共存時の摩擦速度の最大値、 $\bar{U}_w$  : 微小振幅波理論によって得られる波動流速の境界層外縁での最大値である。以下で、添え字  $cw$ ,  $c$ ,  $w$  はそれぞれ波・流れ共存場での諸量、定常流成分および波動成分を表し、また、添え字  $L$ ,  $R$  および  $S$  はそれぞれ、層流、粗面乱流および滑面乱流での諸量を示す。

(1) 層流

層流解はすでに田中・首藤<sup>2)</sup>により得られている。その際、水表面での境界条件として定常成分・波動成分のいずれに対しても shear free condition を用いたが、通常波動成分に対しては水深の効果が無視できるので、摩擦係数表示式を簡素化することができ、出口<sup>5)</sup>とほぼ同様な次式を得る。

$$f_{cw(L)} = \{f_{c(L)}^2 + 2f_{c(L)} \cdot f_{w(L)} \cos \phi' + f_{w(L)}^2\}^{1/2} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、

$$f_{c(L)} = \frac{6}{R_c} \left( \frac{\bar{u}_c}{\bar{U}_w} \right)^2 \dots\dots\dots (3)$$

$$f_{w(L)} = \frac{2}{\sqrt{R_a}} \dots\dots\dots (4)$$

$$R_c = \frac{\bar{u}_c z_h}{\nu} \dots\dots\dots (5)$$

$$R_a = \frac{\bar{U}_w a_m}{\nu} \dots\dots\dots (6)$$

であり、また、 $\bar{u}_c$  : 定常流成分の断面平均流速、 $z_h$  : 水深、 $a_m$  : 波動による底面水粒子軌道振幅、 $\nu$  : 流体の動粘性係数である。さらに、 $\phi' = \cos^{-1}(|\cos \phi|)$  であり、ここに、 $\phi$  : 波の進行方向と定常流の流下方向がなす角度である。 $\phi$  の範囲に制限は無いが、 $\phi'$  は  $0 \leq \phi' \leq \pi/2$  とする。上式は  $f_{cw}$  に関して陽な表示式になっており、 $R_c$ ,  $R_a$ ,  $\bar{u}_c/\bar{U}_w$  および  $\phi$  の関数となる<sup>(注)</sup>。

(2) 粗面乱流

渦動粘性係数の導入により乱流解が得られる (Tanaka and Shuto<sup>18)</sup>)。さらに、摩擦係数に関する近似解も得られているが、陰形式の算定式であった。そこで、田中<sup>19)</sup>は粗面乱流に対して次の陽形式の近似式を提案している。

$$f_{cw(R)} = f_{c(R)} + 2\sqrt{f_{c(R)} \cdot \beta_{(R)} f_{w(R)}} \cos \phi' + \beta_{(R)} f_{w(R)} \dots\dots\dots (7)$$

ここに、

$$f_{c(R)} = \frac{2\kappa^2}{\{\ln(z_h/z_0) - 1\}^2} \left( \frac{\bar{u}_c}{\bar{U}_w} \right)^2 \dots\dots\dots (8)$$

(注) : 前報<sup>2)</sup>では  $R_c$  の代わりに  $z_h/a_m$  を用いたが、ここでは後述の滑面乱流摩擦係数表示の都合上、上記の4変数に変更した。

$$f_{w(R)} = \exp \left\{ -7.53 + 8.07 \left( \frac{\bar{U}_w}{\sigma z_0} \right)^{-0.100} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

$$\beta_{(R)} = \frac{1}{1 + 0.769\alpha^{0.830}} \left\{ 1 + 0.863\alpha \exp(-1.43\alpha) \left( \frac{2\phi'}{\pi} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots (10)$$

$$\alpha = \frac{1}{\ln(z_h/z_0) - 1} \frac{\bar{u}_c}{\bar{U}_w} \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $\kappa$  : カルマン定数、 $z_0$  : 粗度長さ ( $z_0 = k_s/30$ ,  $k_s$  : 相当粗度)、 $\sigma$  : 波の角振動数 ( $\sigma = 2\pi/T$ ,  $T$  : 周期) である。また、 $\phi'$  の単位はラジアンとする。結局、 $f_{cw(R)}$  は4つの無次元数、 $\bar{U}_w/(\sigma z_0)$ ,  $z_h/z_0$ ,  $\bar{u}_c/\bar{U}_w$  および  $\phi$  に支配される。これらのうち、第2、第3番目の変数は式 (11) に見られる様に新たな一つの変数  $\alpha$  にまとめられる。

(3) 滑面乱流

式 (7) の様に粗面に対する摩擦係数表示式が求まっている場合、定常流に対して得られている粗度長さと粘性底層厚  $\delta_L$  との関係を表わす式

$$z_0 = \frac{\delta_L}{105} \dots\dots\dots (12)$$

を用いることにより、滑面乱流へ拡張することが可能である (例えば Myrhaug and Slaattelid<sup>14)</sup>, Tanaka and Shuto<sup>18)</sup>)。ただし、 $\delta_L$  は  $f_{cw}$  の関数であるため、この様にして得られた滑面乱流摩擦係数の表示式は陰形式となり、実用上不便な式形となる。そこで、今回、あらたに滑面乱流摩擦係数の陽形式近似式について検討を行い、Tanaka and Shuto<sup>18)</sup> の解を近似する式として、式 (7) に類似した次式を得た。

$$f_{cw(S)} = f_{c(S)} + 2\sqrt{f_{c(S)} \cdot \beta_{(S)} f_{w(S)}} \cos \phi' + \beta_{(S)} f_{w(S)} \dots\dots\dots (13)$$

ここに、

$$f_{c(S)} = \exp \left\{ -7.60 + 5.98 R_c^{-0.0977} \right\} \left( \frac{\bar{u}_c}{\bar{U}_w} \right)^2 \dots\dots\dots (14)$$

$$f_{w(S)} = \exp \left\{ -7.94 + 7.35 R_a^{-0.0748} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

$$\beta_{(S)} = \frac{1 + 0.871 R_c^{-0.0362} f_{c(S)}^{0.177} \left( \frac{2\phi'}{\pi} \right)^{2.5}}{1 + 5.04 R_c^{-0.0303} f_{c(S)}^{0.379}} \dots\dots\dots (16)$$

上式の適用範囲は、 $10^5 \leq R_a \leq 10^7$ ,  $10^8 \leq R_c \leq 10^6$ ,  $0 \leq \bar{u}_c/\bar{U}_w \leq 5$  であり、交差角  $\phi$  に関しては制限がない。支配パラメータは層流のそれと全く同一である。粗面の場合には摩擦係数を支配する4つの変数の内、 $z_h/z_0$  と  $\bar{u}_c/\bar{U}_w$  を式 (11) のように新たな変数  $\alpha$  にまとめることができた。これに対して、滑面乱流ではこのような変数の低減ができず、このために式 (16) は式 (10) に比べ幾分複雑な関数形となっている。

パラメータを上記の範囲で変化させて誤差の検討を行ったところ、その絶対値は3%以下であった。 $f_{cw(S)}$  の計算例を図-1 (a), (b), (c), (d) に示した。厳密解

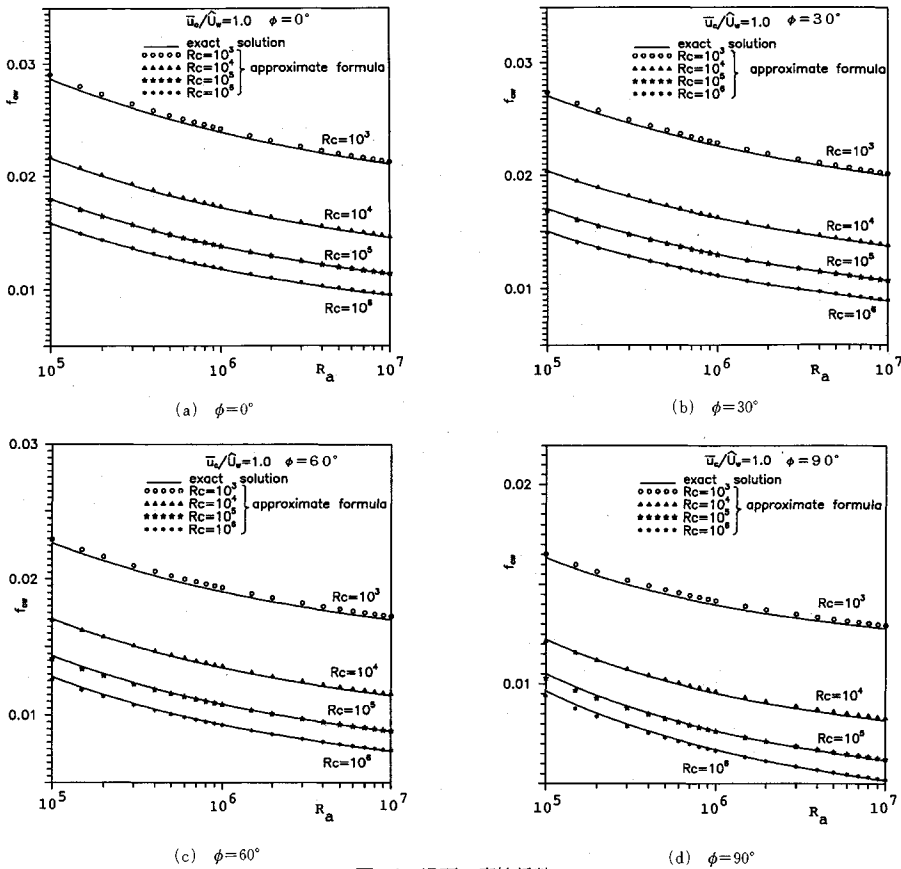


図-1 滑面の摩擦係数

との対応はきわめて良好である。

### 3. 各 flow regime に対する位相差の算定式

境界層外縁流速と底面剪断応力の間には位相のずれが存在する。通常、波動下あるいは共存場における底質移動量を定式化する際には底面剪断力の最大値を用いることが多く(例えば、堀川<sup>21)</sup>、このような場合は位相差を考慮する必要はないが、底面剪断力による波エネルギーの消散を見積る際にはその評価が必要となる(Kajiura<sup>22)</sup>。そこで、以下では位相差の算定手法について検討を行う。

乱流時の位相差  $\theta$  を求めるには、次の複素関数  $f$  の偏角を計算すればよい(田中<sup>20)</sup>。

$$f(\xi_0) = \frac{H_1^{(1)}(\xi_0)}{H_0^{(1)}(\xi_0)} e^{-\pi i/4} \dots \dots \dots (17)$$

ここに、 $H_n^{(1)}$  :  $n$  次の第1種ハンケル関数、 $\xi_0 = 2e^{-\pi i/4} \sqrt{c z_0}$ 、 $c = \sigma / (\kappa \hat{u}_{*w}^2)$  である。よって、 $\theta$  は摩擦係数と同様に無次元量  $\hat{U}_w / (\sigma z_0)$  等の関数として表現されるが、式(17)は  $c z_0$  のみの関数と見なすこともできる。すなわち、上記の無次元量は  $\hat{u}_{*w}$  (あるいは、 $f_{*w}$ ) の支配パラメータとして陰的に現れるに過ぎないことが判る。そ

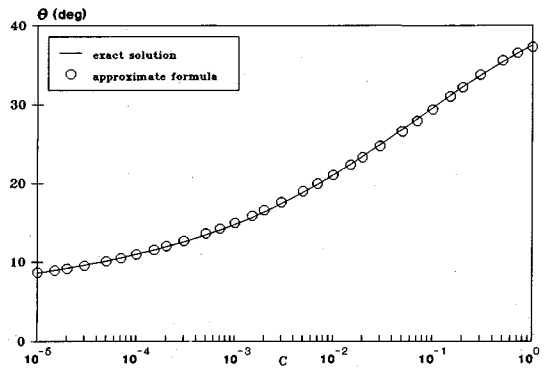
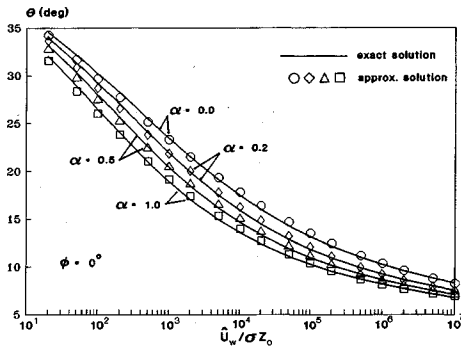


図-2 位相差  $\theta$  と  $C$  との関係

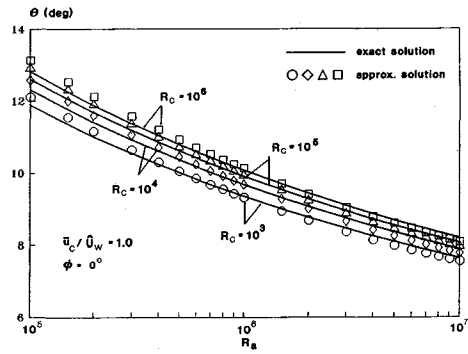
ここで、 $\theta$  と  $C = cz_0$  の関係を示したものが図-2の実線である。また、○印は次の近似式であり、その精度は十分である。

$$\theta = 42.4 C^{0.153} \frac{1 + 0.00279 C^{-0.357}}{1 + 0.127 C^{0.563}} \dots \dots \dots (18)$$

ただし、 $\theta$  の単位は度である。実際に位相差を計算する際は、滑面・粗面に応じて、次式を使い分けて式(18)に代入すれば、 $\theta_{(s)}$ 、 $\theta_{(R)}$  が得られる。



(a) 粗面



(b) 滑面

図-3 位相差

$$\text{滑面} : C = \frac{0.111}{\kappa \frac{f_{cw(s)}}{2} R_a} \dots\dots\dots (19)$$

$$\text{粗面} : C = \frac{1}{\kappa \sqrt{\frac{f_{cw(R)}}{2}} \frac{\hat{U}_w}{\sigma z_0}} \dots\dots\dots (20)$$

ここで、<sup>\*</sup>上式を得るに際し、式(1)および式(12)を用いた。上式中の摩擦係数の計算には前節の近似式を用いればよい。よって、本節に示した位相差に関する近似式も、やはり初等関数で表された陽的な表示式となっている。計算の一例を図-3に示した。式(18)は十分な精度を有すると判断される。

なお、層流の場合の位相差  $\theta_w$  は、よく知られるように次式で与えられる。

$$\theta_w = 45^\circ \dots\dots\dots (21)$$

#### 4. flow regime の検討

前節では各 flow regime に対する摩擦係数・位相差の算定式を示したが、実際にこれらを用いる際には事前に flow regime の判定を行う必要がある。田中・首藤<sup>2)</sup>は定常流に対して得られた知見をもとに、共存場での flow regime の判定法を提案した。また、Christoffersen and Jonsson<sup>4)</sup>は粗面に対して得られた摩擦係数算定式を、遷移域・滑面乱流域に拡張する方法を提案している。すなわち、粗面式中の粗度長さ  $z_0$  を次式で置き換えればよい。

$$z_0 = \frac{k_s}{30} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{k_s \hat{u}_{cw}^*}{27\nu}\right) \right\} + \frac{\nu}{9\hat{u}_{cw}^*} \dots\dots\dots (22)$$

上式を用いれば、flow regime の判定を行う必要がなく、自動的に遷移域を含む任意の条件下での乱流摩擦係数が得られる。ただし、ここで言う遷移域とは粗面乱流・滑面乱流間のそれである。定常流においては実用上層流が維持されることがほとんど無いため、このような補間が行えば十分であった。これに対し、波動境界層においては層流から粗面乱流への遷移も見られる (Kamphuis<sup>15)</sup>)。

したがって、波・流れ共存場においても波動成分が卓越する場合には同様な遷移が生じることもあり得、式(22)では不十分である。さらに不都合な点は、式(22)が摩擦係数に関し陰形式となっている点である。そこで、以下ではまず flow regime の検討を行い、さらにその成果をもとに第5節において、全 flow regime に適用可能な摩擦係数および位相差の算定式を導く。

##### (1) 層流・乱流の判定条件

開水路定常流での層流から乱流への遷移条件に関しては、Chow<sup>23)</sup>、Patel and Head<sup>17)</sup>等をもとにすれば、その下限値および上限値はほぼ次式で与えられる。

$$\text{下限値} : R_c = 500 \dots\dots\dots (23)$$

$$\text{上限値} : R_c = 1200 \dots\dots\dots (24)$$

また、波動場に対しては、Kamphuis<sup>15)</sup>の実験をもとにすれば

$$\text{下限値} : R_a = 2.5 \times 10^5 \dots\dots\dots (25)$$

$$\text{上限値} : R_a = 6.0 \times 10^5 \dots\dots\dots (26)$$

となる。なお、Kamphuis<sup>15)</sup>は自身の実験結果をもとに、式(25)に代わるものとして  $R_a = 1.0 \times 10^4$  を提案しているが、Jonsson<sup>24)</sup>が述べるように、より高いレイノルズ数まで層流が維持されると見ることが出来る。式(23)と(25)および式(24)と(26)の比は一定であるため、波・流れ共存場では次式

$$R = 500 R_c + R_a \dots\dots\dots (27)$$

で定義された新たなレイノルズ数  $R$  を用い、限界値を次式とする。

$$\text{下限値} : R = 2.5 \times 10^5 \dots\dots\dots (28)$$

$$\text{上限値} : R = 6.0 \times 10^5 \dots\dots\dots (29)$$

この時、上記の限界値は  $R_a \rightarrow 0$  および  $R_c \rightarrow 0$  の極限で、それぞれ式(23)、(24)および式(25)、(26)に一致する。

##### (2) 粗面・滑面の判定条件

ここでは、田中・首藤<sup>2)</sup>、Myrhaug and Slaattelid<sup>14)</sup>と同様に次式を基にする。

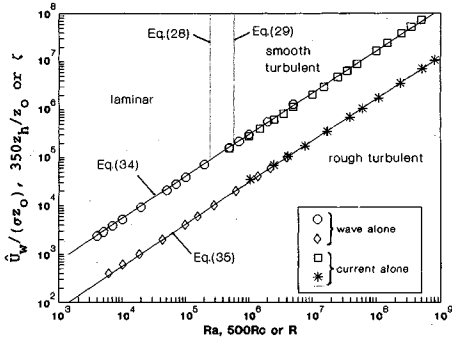


図-4 flow regime

$$\frac{\hat{u}_{cw}^* k_s}{\nu} = 5 \dots \dots \dots (30)$$

$$\frac{\hat{u}_{cw}^* k_s}{\nu} = 70 \dots \dots \dots (31)$$

ここで、まず定常流の flow regime について考える。上式に、前節に示した摩擦係数式で波動成分をゼロとした定常流の表示式を代入すれば、 $z_h/z_0$  と  $R_c$  の関係として表示される。結果を図-4 に□と米で示した。ただし、ここでは後に示す理由からそれぞれの変数に 350, 500 を乗じて図示した。

次に、波動場については、式 (30), (31) の  $\hat{u}_{cw}^*$  を波動下での最大値  $\hat{u}_{cw}^*$  に置き換える。これに第2節に示した波の摩擦係数を代入すれば、 $R_a$  と  $\hat{U}_w / (\sigma z_0)$  との関係を得る。図-4 に○と◇を用いてこの関係を示した。図-4 によれば、両者はほぼ同一線上に位置していることがわかる。 $R_c$  に乗じた定数 500 は先の式 (27) による。350 については、定常流と波動の flow regime が重なるように定めたものである。図より、新たな変数、

$$\zeta = 350\gamma \frac{z_h}{z_0} + (1-\gamma) \frac{\hat{U}_w}{\sigma z_0} \dots \dots \dots (32)$$

ここに、

$$\gamma = \frac{\hat{u}_c / \hat{U}_w}{1 + \hat{u}_c / \hat{U}_w} \dots \dots \dots (33)$$

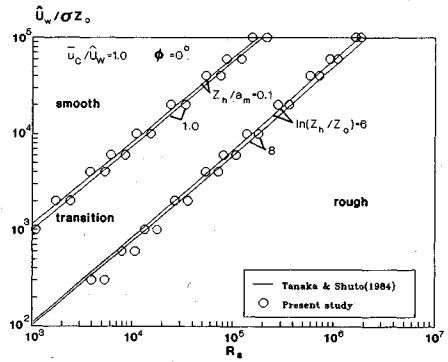
を用いれば、波のみおよび流れのみの極限で上記の結果に矛盾しない陽的な表現式

$$\text{下限値: } R_1 = 0.501 \zeta^{1.15} \dots \dots \dots (34)$$

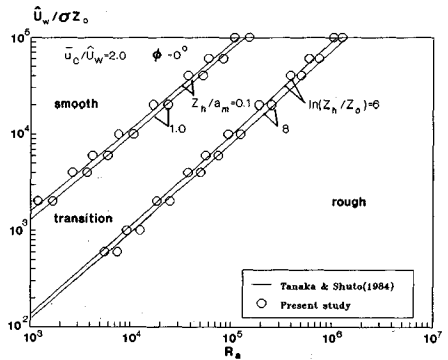
$$\text{上限値: } R_2 = 7.00 \zeta^{1.15} \dots \dots \dots (35)$$

が得られる。図-4 には上式を実線で示した。また、鎖線は式 (28), (29) を示す。なお、式 (32) の右辺に重み関数を乗じており、この点、式 (27) と異なる。これは、波のみの場合に式 (32) 右辺の  $z_h/z_0$  がゼロにならないことによる。

現在までのところ、共存場における flow regime に関する研究は十分に行われておらず、以上の結果を検証するための十分な実験データも存在しない。そこで、ここでは式 (30), (31) を用いて得られる田中・首藤<sup>2)</sup>の結



(a)  $\bar{u}_c / \hat{U}_w = 1.0$



(b)  $\bar{u}_c / \hat{U}_w = 2.0$

図-5 前報<sup>2)</sup>の flow regime 図との比較

果との比較を行った。その結果を図-5 に示した。両者は比較的良好な一致を示していることがわかる。

### 5. 全 flow regime に適用可能な算定式

#### (1) 摩擦係数

次式により全 flow regime に適用可能な算定式を表現した。

$$f_{cw} = f_2 \{ f_1 f_{cw(L)} + (1-f_1) f_{cw(S)} \} + (1-f_2) f_{cw(R)} \dots \dots \dots (36)$$

右辺第一項中括弧内では、層流摩擦係数・滑面乱流摩擦係数より滑面の摩擦係数を求めている。 $f_1$  は重み関数である。さらに、もうひとつの重み関数  $f_2$  を用いて、滑面摩擦係数・粗面摩擦係数から、任意条件下での解を得る。

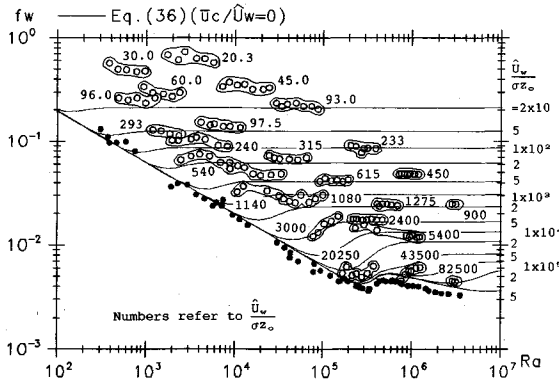
実測値を良好に表現する関数形として次式を得た。

$$f_1 = \exp \left\{ -0.0513 \left( \frac{R}{2.5 \times 10^5} \right)^{4.65} \right\} \dots \dots \dots (37)$$

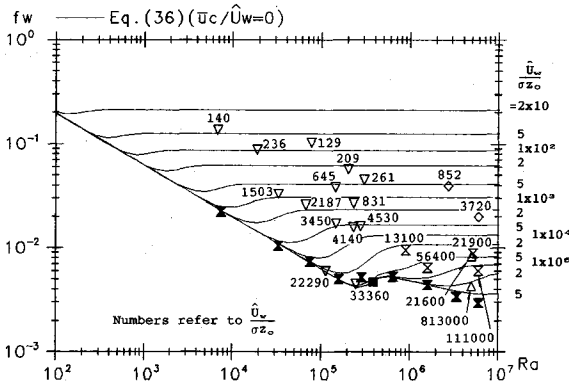
$$f_2 = \exp \left\{ -0.0101 \left( \frac{R}{R_1} \right)^{2.06} \right\} \dots \dots \dots (38)$$

上式は、遷移条件式 (28), (29), (34), (35) を考慮したものになっている。すなわち、遷移域の下限および上限で関数値がそれぞれほぼ 1.0 および 0.0 になる。

先に示したように三つの flow regime に対する摩擦係



(a) Kamphuis<sup>15)</sup>の実験結果との比較



(b) その他の実験結果との比較

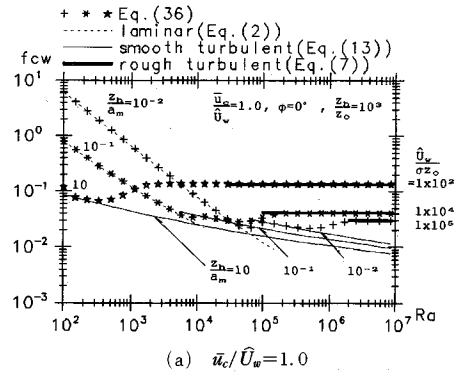
図一六 波のみの摩擦係数

表一 記号表

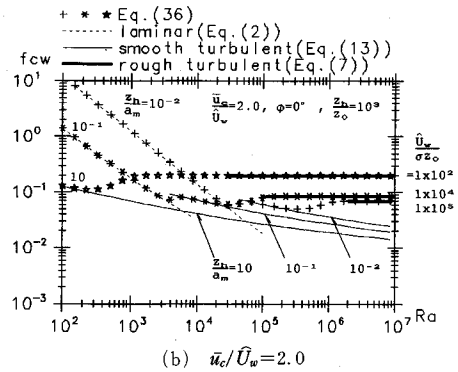
author(s)	symbols	
	smooth	rough
Kamphuis <sup>15)</sup>	●	○
Jonsson and Carlsen <sup>25)</sup>	---	◇
Hino et al. <sup>26)</sup>	■	---
Sleath <sup>27)</sup>	---	▽
Sumar et al. <sup>28)</sup>	---	△
Jensen et al. <sup>29)</sup>	▼	⋈
Sawamoto and Sato <sup>30)</sup>	▶	⋈

数算定式はすべて陽形式となっている。また、重み関数  $f_1, f_2$  も水理条件、底質条件が与えられれば容易に計算される。よって、式 (36) は完全陽形式であり、繰り返し計算無しに摩擦係数が求まる。計算例を以下に示す。

まず、波のみケースの計算結果を示したものが図一六である。記号の意味を表一に示した。なお、粗面を対象とした実験では、二次元的な三角粗度、均一粒径の砂粒あるいは球を用いた三次元粗度等が用いられている。粗度の諸元(粗度間隔, 高さ, 粒径等)から  $k_s$  を算定する方法に関してはすでにいくつかの研究がなされている<sup>31), 32)</sup>が、本研究では原論文に示された  $k_s$  値をそのまま用いてデータを整理している。図一六(a)は Kamphuis<sup>15)</sup>による実験値との比較を示す。それぞれの



(a)  $\bar{u}_c/\bar{U}_w=1.0$



(b)  $\bar{u}_c/\bar{U}_w=2.0$

図一七 共存場の摩擦係数

flow regime の式に関する比較はすでになされている<sup>18), 19)</sup>ので、ここでは遷移域について注目してみると、今回提案された式は  $\bar{U}_w/(\sigma_{z0}) = 3000, 20250$  および  $43500$  の実験値にみられる右上がりの傾向を良く表している。図一六(b)はその他の実験データとの比較を示したものである。やはり、実験値と今回の陽形式近似式の一緻度は良好である。Myrhaug<sup>33)</sup>は自身の理論と式 (22) とをもとに同様の図を提案した。その中で Sleath<sup>27)</sup>の実験データの内、 $\bar{U}_w/(\sigma_{z0}) = 22290$  および  $33360$  のケースについて理論曲線からのずれが大きいかを指摘し、その原因は不明であるとしている。図一六(b)によれば、これらの2ケースも今回提案した式による曲線と良く一致している。先に述べたように、Myrhaugの用いた式 (22) で考慮されている遷移域とは粗面乱流・滑面乱流間のそれであり、層流から粗面乱流あるいは滑面乱流への遷移は考慮されていない。図に見られるように上記2ケースは層流から粗面乱流への遷移域近傍に位置する。このため、Myrhaugの理論ではこれらのケースを説明できなかった。

次に共存場でのものを図一七に示した。ただし、 $z_h/z_0 = 1000, \phi = 0^\circ$  とし、 $\bar{u}_c/\bar{U}_w$  を  $1.0$  および  $2.0$  とした。 $z_h/a_m$  を固定して見ると、レイノルズ数の増加に伴い、層流から滑面乱流、さらに粗面乱流に遷移して行く様子がうかがえる。なお、前報<sup>3)</sup>の図一10, 11, 12に示した

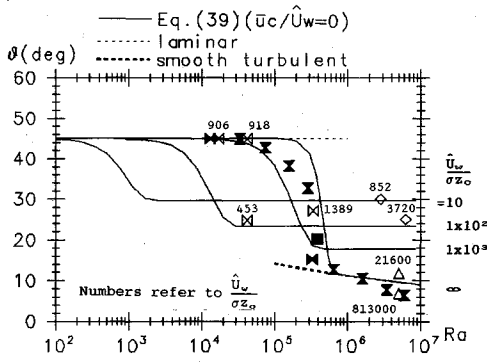


図-8 波のみの位相差

同様な図では滑面・粗面遷移域において、 $z_h/a_m$ の異なる3本の滑面摩擦係数曲線から1本の粗面乱流摩擦係数へ遷移して行く様子を示したが、これは誤りである。図において  $z_h/z_0$  は一定値であるため、遷移先の  $\hat{U}_w/(\sigma z_0)$  ( $= (z_h/z_0)/(z_h/a_m)$ ) はそれぞれの  $z_h/a_m$  に対して、一律に定まるためである。例えば、図-7(a)で層流・滑面乱流で  $z_h/a_m=1$  の場合、遷移先の粗面領域での  $\hat{U}_w/\sigma z_0$  の値は1000となる。また、前報<sup>2)</sup>の同図では層流の摩擦係数と粗面乱流域でのそれが重なる領域が見られるが、実際にはそれぞれの  $z_h/a_m$  が異なっているもので、現実には flow regime が overlap しているわけではない。

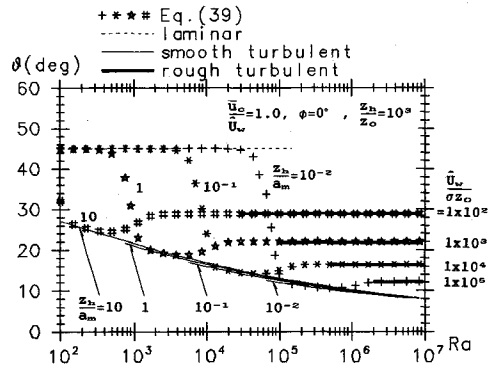
(2) 位相差

位相差の評価に際しても、摩擦係数と同様に遷移域での扱いが問題となる。ここでは、単純に先の摩擦係数表示式(36)の  $f_{cw}$  を  $\theta$  に置き換えた次式を提案する。

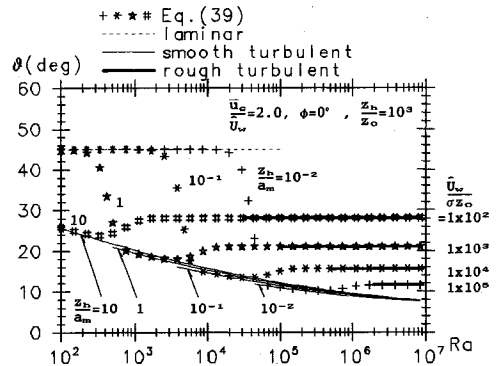
$$\theta = f_2 \{ f_1 \theta_{(L)} + (1-f_1) \theta_{(s)} \} + (1-f_2) \theta_{(R)} \dots \dots \dots (39)$$

摩擦係数算定式と同様に、上式も完全に陽形式の式となっている。図-8の実線は波のみの場合に対する式(39)による計算結果を示す。層流から滑面乱流・粗面乱流への滑らかな遷移が見られる。 $\hat{U}_w/(\sigma z_0)$  が小さいケースでは、レイノルズ数の増加に伴い、滑面乱流を経ずに層流から直接粗面乱流への遷移が見られる。このような遷移は図-6の摩擦係数図にも見られる。図中の記号は実験値であり、その意味は表-1に従う。滑面 ( $\hat{U}_w/(\sigma z_0)=\infty$ ) についてみると、遷移の開始点近くで式(39)と実験値との間に差が見られるが、全体的な傾向は良く表されている。また、粗面については幾分差が大きいですが、それでも後述の剪断力波形(図-11)から判断すると、実用上は無視できる程度の誤差であると言える。筆者の知る限り、このような全ての flow regime を網羅した位相差算定図は今までのところ提案されていない。

共存場での計算例を図-9に示す。図-7と同様に、flow regime の変化により、位相差が滑らかに変化している。



(a)  $\bar{u}_c/\bar{U}_w=1.0$



(b)  $\bar{u}_c/\bar{U}_w=2.0$

図-9 位相差

6. 底面剪断力位相変化の計算法

Tanaka and Shuto<sup>18)</sup>の厳密解によれば、粗面乱流での底面剪断応力  $\tau_0$  の位相変化は次式で与えられる。

$$\tau_0(t) = (\rho u_c^{*2}, 0) + \rho \sqrt{\kappa \hat{u}_{cw}^* \sigma z_0} \hat{U}_w A \cos(\omega t + \theta) (\cos \phi, \sin \phi) \dots \dots (40)$$

ここに、 $A$  は  $f(\xi_0)$  (式(17))の絶対値であり、流れは  $x$  軸正方向を向くものとする。式(40)より  $\tau_0(t)$  を求めるためには複素ベッセル関数の計算を要する。ここでは、上述の摩擦係数・位相差の陽形式近似式をもとにした底面摩擦経時変化の計算法を示す。

式(40)の最大値  $\tau_{0max}$  を求めれば、

$$\tau_{0max} = \{ (\rho u_c^{*2})^2 + 2\rho u_c^{*2} \cdot \rho \sqrt{\kappa \hat{u}_{cw}^* \sigma z_0} \hat{U}_w A \cos \phi' + (\rho \sqrt{\kappa \hat{u}_{cw}^* \sigma z_0} \hat{U}_w A)^2 \}^{1/2} \dots \dots \dots (41)$$

となる。これより、次式を得る。

$$\rho \sqrt{\kappa \hat{u}_{cw}^* \sigma z_0} \hat{U}_w A = \rho \{ \hat{u}_{cw}^{*4} - u_c^{*4} \sin^2 \phi' \}^{1/2} - \rho u_c^{*2} \cos \phi' \dots \dots \dots (42)$$

上式で、 $u_c^*$  は定常流断面平均流速  $\bar{u}_c$  と結び付いており、次式のように表される (Tanaka and Shuto<sup>18)</sup>)。

$$u_c^{*2} = \frac{\kappa^* \bar{u}_c \hat{u}_{cw}^*}{\ln(z_h/z_0) - 1} \dots \dots \dots (43)$$

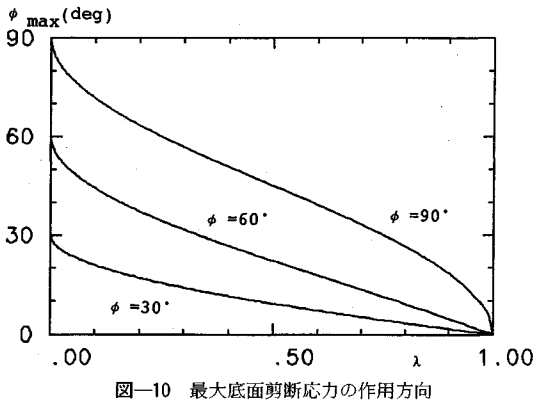


図-10 最大底面剪断応力の作用方向

式 (42), (43) を式 (40) に代入すれば, 次式が得られる。ただし, 剪断力を  $\rho \hat{U}_w^2$  で無次元化する。

$$\begin{aligned} \tau_0^*(t) &= \tau_0(t) / (\rho \hat{U}_w^2) \\ &= \left( \kappa \alpha \sqrt{\frac{f_{cw}}{2}}, 0 \right) + \sqrt{\frac{f_{cw}}{2}} \\ &\quad \left\{ \left( \frac{f_{cw}}{2} - \kappa^2 \alpha^2 \sin^2 \phi' \right)^{1/2} - \kappa \alpha \cos \phi' \right\} \\ &\quad \cos(\sigma t + \theta) (\cos \phi, \sin \phi) \dots \dots \dots (44) \end{aligned}$$

これより, 絶対値の経時変化は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} |\tau_0^*(t)| &= \sqrt{\frac{f_{cw}}{2}} \left[ \kappa^2 \alpha^2 + 2\kappa \alpha \left\{ \left( \frac{f_{cw}}{2} - \kappa^2 \alpha^2 \sin^2 \phi' \right)^{1/2} - \kappa \alpha \cos \phi' \right\} \right. \\ &\quad \left. \cos \phi \cos(\sigma t + \theta) + \left\{ \left( \frac{f_{cw}}{2} - \kappa^2 \alpha^2 \sin^2 \phi' \right)^{1/2} - \kappa \alpha \cos \phi' \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. \cos^2(\sigma t + \theta) \right]^{1/2} \dots \dots \dots (45) \end{aligned}$$

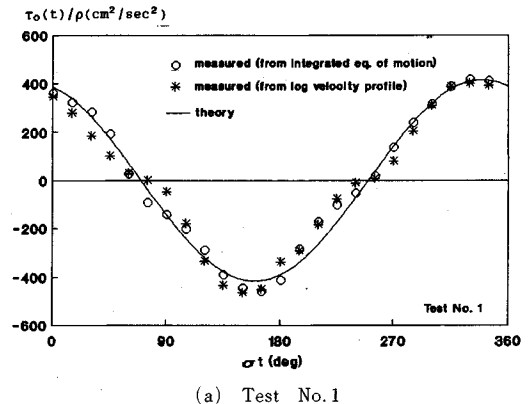
上式で  $\cos(\sigma t + \theta) = 1$  とおけば, 右辺は確かに  $f_{cw}/2$  となっている。また, 時々刻々の剪断力の作用方向  $\phi(t)$  は次式で表される。

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \tan^{-1} \\ &\quad \left[ \frac{\tan \phi}{\left\{ \left( \frac{1}{\kappa^2 \alpha^2} \frac{f_{cw}}{2} - \sin^2 \phi' \right)^{1/2} - \cos \phi' \right\} \cos \phi \cos(\sigma t + \theta)} + 1 \right] \dots \dots \dots (46) \end{aligned}$$

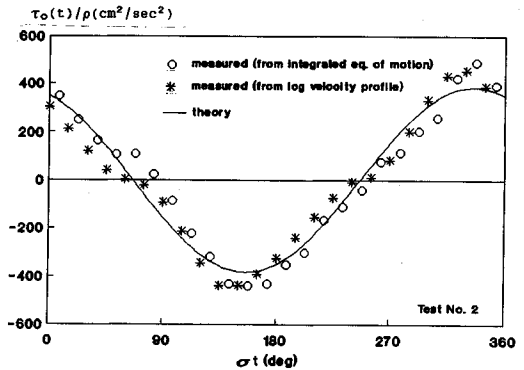
上式から最大剪断応力の作用方向  $\phi_{max}$  が得られる。

$$\begin{aligned} \phi_{max} &= \tan^{-1} \left[ \frac{\tan \phi}{\left\{ \left( \frac{1}{\kappa^2 \alpha^2} \frac{f_{cw}}{2} - \sin^2 \phi' \right)^{1/2} - \cos \phi' \right\} \cos \phi} + 1 \right] \dots \dots \dots (47) \end{aligned}$$

上式によれば,  $\phi_{max}$  は波・流れの交差角  $\phi$  および  $\lambda = 2\kappa^2 \alpha^2 / f_{cw}$  のみの関数として表される。計算結果を図-10 に示した。  $\lambda = 0$  および  $1$  はそれぞれ波のみおよび流れのみのケースに対応する。波動のみの場合,  $\phi_{max}$  は  $\phi$  に等しい。定常成分が卓越するにつれて, すなわ



(a) Test No. 1



(b) Test No. 2

図-11 Jonsson<sup>24)</sup>の実験結果との比較

ち  $\lambda$  が増加するにつれて  $\phi_{max}$  はゼロに近づく。

なお, 粗面の  $\alpha$  は式 (11) で与えられるが, 滑面乱流の場合にはこれに代わり次式を用い, 式中の摩擦係数には式 (13) を代入すればよい。

$$\alpha = \frac{1}{\left\{ \ln \left( 9.0 \frac{R_c}{\bar{u}_c / \bar{U}_w} \sqrt{\frac{f_{cw(s)}}{2}} \right) - 1 \right\}} \frac{\bar{u}_c}{\bar{U}_w} \dots \dots \dots (48)$$

式 (44) から (47) において, 摩擦係数, 位相差の算定には第 2, 3 節に示した近似式を用いれば良い。よって初等関数の計算のみで底面剪断応力の経時変化が求まる。

なお, 層流については次の解析解が容易に得られる。

$$\begin{aligned} \tau_0^*(t) &= \left( \frac{f_{c(L)}}{2}, 0 \right) + \frac{f_{w(L)}}{2} \cos(\sigma t + \theta_L) (\cos \phi, \sin \phi) \dots \dots \dots (49) \end{aligned}$$

遷移域においては, 本節に示した各 flow regime に対する式を用い, 式 (36) と同様に内挿すればよいであろう。

図-11 は, 波のみを対象として行われた Jonsson<sup>24)</sup>の実験結果との比較を示したものである。ここで,  $\circ$  および  $*$  は実測値であり, それぞれ境界層方程式の数値積分, および底面近傍流速値に対する対数則の当てはめにより求めている。両ケースとも今回の算定式と実験値は良い



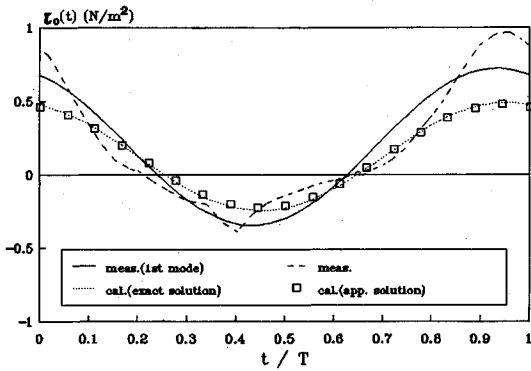


図-12 Supharatidら<sup>34)</sup>の実験結果との比較

一致を示している。

次に、共存場において行われた Supharatid, Tanaka and Shuto<sup>34)</sup>による実験結果との比較を図-12に示した。実験は二次元開水路で行われ、波と流れは同方向に進行する。実験条件は、波高 9.8 cm, 周期 1.3 sec, 定常断面平均流速 14.0 cm/sec であり、底面は滑面である。剪断応力測定にはホット・フィルム平面センサーを用いた。実測値は表面波形の非線形性を反映したものになっているため、基本周波数成分も示した。計算値について見ると、近似式による計算値は厳密解とよく一致していることがわかる。また、計算値と実験値を比べると、最大値に幾分差がみられるものの全体的な位相変化に関しては比較的良好な対応が見られる。なお、挙動の非線形性までも考慮した計算を行うには、より複雑な手法が必要となる<sup>20), 34)</sup>。

## 7. 結 語

本研究では、波・流れ共存場における底面剪断応力算定手法の検討を行った。今回得られた主要な結論を列記すると以下の通りである。

(1) 滑面乱流に対する陽形式の摩擦係数  $f_{cw}$  の近似式を定めた。誤差は 3% 以下である。これにより、全ての flow regime に対して陽形式の抵抗則が得られたことになる。

(2) 全ての flow regime に対して、位相差  $\theta$  の表示式を得た。(1)の結果を用いることにより、繰り返し計算を行わずに位相差を計算することが出来る。

(3) flow regime 判定式として、陽的な表示式が得られた。

(4) (1)から(3)の成果をもとに、全ての flow regime に適用可能な摩擦係数および位相差の算定式が得られた。

(5)  $f_{cw}$ ,  $\theta$  の陽形式算定式を用いて、剪断力の経時変化を算定する手法を提案した。厳密解では複雑特殊関数の計算を要したが、今回の方法によればきわめて容易

に剪断力の大きさ・作用方向を求めることができる。

謝辞：最後に、本論文の発表に際し小川基金の補助を受けたことを付記する。

## 参 考 文 献

- Grant, W.D. and Madsen, O.S. : Combined wave and current interaction with a rough bottom, *J. Geophys. Res.*, Vol.84, No.C 4, pp.1797-1808, 1979.
- 田中 仁・首藤伸夫：波・流れ共存場の抵抗則と境界層の領域区分, 土木学会論文集, 第 342 号, pp. 61-67, 1984.
- 田中 仁・チャン・シュー・チェン・首藤伸夫：一方向流を伴う振動流中の渦動粘性係数, 第 30 回海岸工学講演会論文集, pp. 199-203, 1983.
- Christoffersen, J.B. and Jonsson, I.G. : Bed friction and dissipation in a combined current and wave motion, *Ocean Eng.*, Vol.12, No.5, pp.387-423, 1985.
- 出口一郎：波と流れと漂砂, 波と漂砂と構造物 (榎木亨編著), pp. 149-163, 技報堂出版, 1991.
- Bakker, W.T. : Sand concentration in oscillatory flow, *Proc. 14th Int. Conf. on Coastal Eng.*, pp.1129-1148, 1974.
- Bakker, W.T. and Van Doorn, T. : Near bottom velocities in waves with a current, *Proc. 16th Int. Conf. on Coastal Eng.*, pp.1394-1413, 1978.
- 浅野敏之・岡本 浩・岩垣雄一：波と流れの共存場における底面乱流境界層に関する研究, 第 30 回海岸工学講演会論文集, pp. 84-88, 1983.
- 田中 仁：波・流れ共存場における乱れと壁面摩擦に関する研究, 第 32 回海岸工学講演会論文集, pp.31-35, 1985.
- Aydin, I. : Computation and analysis of turbulent flow on flat bottom and over rigid ripples, Ph.D.Thesis, Tohoku University, 193pp, 1987.
- Davies, A.G., Soulsby, R.L. and King, H.L. : A numerical model of combined wave and current bottom boundary layer, *J. Geophys. Res.*, Vol.93, No.C 1, pp.491-508, 1988.
- 伊福 誠・後藤博光：波と流れの共存場における浮遊砂濃度と漂砂量, 土木学会論文集, 第 417 号 / II -13, pp. 165-172, 1990.
- Fredsøe, J. : Turbulent boundary layer in wave-current motion, *J. Hydr. Eng.*, Vol.110, No.8, pp.1103-1120, 1984.
- Myrhaug, D. and Slaattelid, O.H. : A rational approach to wave-current friction coefficient for rough, smooth and transitional turbulent flow, *Coastal Eng.*, Vol.14, pp.265-293, 1990.
- Kamphuis, J.W. : Friction factor under oscillatory waves, *J. Wtrway., Port, Coast, Oc. Eng. Div.*, Vol.101, No.WW 2, pp.135-144, 1975.
- 香取完和・榎山 勉・渡辺 晃：定常流・振動流交差装置による漂砂量測定, 第 30 回海岸工学講演会論文集, pp. 204-208, 1983.
- Patel, V.C. and Head, M.R. : Reversion of turbulent to

- laminar flow, *J. Fluid Mech.*, Vol.34, pp.371-392, 1968.
- 18) Tanaka, H. and Shuto, N. : Friction coefficient for a wave-current coexistent system, *Coastal Eng. in Japan*, Vol.24, pp.105-128, 1981.
  - 19) 田中 仁 : 波・流れ共存場における摩擦係数の陽形式近似式, *土木学会論文集*, 第 417 号 / II -13, pp. 285-288, 1990.
  - 20) 田中 仁 : 任意波形を有する波動下での水粒子速度と底面せん断応力の算定手法に関する研究, *土木学会論文集*, 第 381 号 / II -7, pp.181-187, 1987.
  - 21) 堀川清司 (編) : *海岸環境工学, 海岸過程の理論・観測・予測方法*, 東大出版会, 582 pp, 1985.
  - 22) Kajjura, K. : A model of the bottom boundary layer in water waves, *Bull. Earthq. Res. Inst., Univ. of Tokyo*, Vol.46, pp.75-123, 1968.
  - 23) Chow, V.T. : *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, 680 pp., 1959.
  - 24) Jonsson, I.G. : A new approach to oscillatory rough turbulent boundary layers, *Ocean Eng.*, Vol.7, pp.109-152, 1980.
  - 25) Jonsson, I.G. and Carlsen, N.A. : Experimental and theoretical investigation in an oscillatory turbulent boundary layer, *J. Hydr. Res.*, Vol.14, No.1, pp.45-60, 1976.
  - 26) Hino, M. : Kashiwayanagi, M., Nakayama, A. and Hara, T. : Experiments on the turbulence characteristics and the structure of a reciprocating flow, *J. Fluid Mech.*, Vol.131, pp.363-400, 1983.
  - 27) Sleath, J.F.L. : Turbulent oscillatory flow over rough beds, *J. Fluid Mech.*, Vol.182, pp.369-409, 1987.
  - 28) Sumer, B.M., Jensen, B.L. and Fredsøe, J. : Turbulence in oscillatory boundary layers, In *Advances in Turbulence*, G. Comte-Bellot and J. Mathieu, eds. Springer, Berlin, pp.556-567, 1987.
  - 29) Jensen, B.L., Sumer, B.M. and Fredsøe, J. : Turbulent oscillatory boundary layer at high Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.*, Vol.206, pp.265-297, 1989.
  - 30) Sawamoto, M. and Sato, E. : The structure of oscillatory turbulent boundary layer over rough bed, *Coastal Eng. in Japan*, Vol.34, No.1, pp.1-14, 1991.
  - 31) Knight, D.W. and MacDonald, J.A. : Hydraulic resistance of artificial strip roughness, *J. Hydr. Div. Vol.105, No.HY 6*, pp.675-690, 1979.
  - 32) Kamphuis, J.W. : Determination of sand roughness for fixed bed, *J. Hydr. Res.*, Vol.12, No.2, pp.193-230, 1974.
  - 33) Myrhaug, D. : A rational approach to wave friction coefficients for rough, smooth and transitional turbulent flow, *Coastal Eng.*, Vol.13, pp.11-21, 1989.
  - 34) Supharatid, S., Tanaka, H. and Shuto, N. : Interaction of nonlinear waves and current, *Proc. 23rd Int. Conf. on Coastal Eng.*, 1992. (in press)

(1992.10.29 受付)

## WAVE-CURRENT FRICTION LAW SPANNING ALL FLOW REGIMES

Hitoshi TANAKA and Aung THU

Approximate formulae of friction coefficient as well as phase difference under wave-current coexistent motion are derived for laminar, smooth turbulent and rough turbulent flow on the basis of Tanaka and Shuto's theory (1981). By considering flow regime criteria, these formulae for each flow regimes are combined to yield full-range equations, which are in explicit form and require no iteration to find solutions. A practical method is also presented to calculate time-variation of bottom shear stress under waves and current with an arbitrary angle of intersection.