

不規則波動シミュレーションのための強分散性 波動方程式の導出とその基本特性の検討*

灘岡和夫**・中川康之***

適用性が長波ならびにその近傍の波数領域に限られている既存の(弱)分散性波動方程式の制約を打破するために、Galerkin法に基づいた定式化によって、任意の広いスペクトル帯域を有する不規則波動場に適用可能な新たな強分散性波動方程式を導出した。そしてその妥当性を強分散性波動場に関するいくつかの計算例によって示すとともに、さまざまな観点から本波動方程式の基本特性を検討した結果について述べた。

Key Words : dispersive wave equation, random waves, Galerkin method

1. はじめに

沿岸域における波動場は、海洋構造物の設計や海浜変形予測などでの基本的外力となることから、その一般的な算定・予測手法の確立が強く望まれている。具体的には、

- 1) 波の浅水変形・屈折・回折・反射といった基本的な要素を正確に表現できること、
- 2) 任意のスペクトル帯域上の不規則波動場を扱える強分散性波動方程式であること、
- 3) 砕波近傍の強非線形波動場をも扱い得る波動方程式であること、
- 4) 海底地形の効果をなるべく正確に取り込み得ること、
- 5) 3)にも関連するが、将来的に、砕波の効果を物理性を持った形で組み込むことが可能であること、
- 6) 実用上、あまり大きな記憶容量や長い計算時間を必要としないこと、

といったことが要求されるが、現在のところこれらのすべての条件を満足する一般的な波動方程式は存在しない。特に、波動場の時間発展を本質的に規定する波の分散性と非線形性を任意の強さの条件下で表現し得る強分散性・強非線形性波動方程式は、境界積分方程式に基づく解析法(ただしこれは一般に膨大な計算容量と計算時間を必要とするため上記6)の要件を満たさない)以外には見あたらない。

このような状況の中で、最近著者らは、このような一般性を有する波動方程式に発展させ得る新たな強分散性波動方程式を導くことに成功した¹⁾。この波動方程式は、

Galerkin法を用いるという従来と全く異なった発想で導出されたもので、長波領域から深海波領域までの広いスペクトル帯域を有する波動場を取り扱えるという従来にはない著しい特徴を持っている。したがって、この波動方程式によれば任意のスペクトル帯域を有する不規則波浪場をシミュレートすることが可能となる。またこの波動方程式は、(強)非線形性も容易に組み込むことが可能であることから、上記の理想的な一般波動方程式への発展が十分期待できる。

本論文では、まず、2.で既存の波動方程式の簡単なレビューを行ったあと、3.で本波動方程式の具体的な導出過程を述べる。そして、4.で本波動方程式が最もその効力を発揮する典型的な分散性波動場であるCauchy-Poisson波と不規則波に関する計算例を示すことによって本波動方程式の妥当性を明らかにするとともに、5.でさまざまな観点から本波動方程式の基本特性について検討した結果について述べる。

2. 従来の波動方程式に関する簡単なレビュー

既存の波動方程式として代表的なものとしては、まず、線形波動場を対象とした伊藤・谷本^{2),3)}による数値波動解析法やBerkhoff⁴⁾の緩勾配方程式があげられる。このうち前者の数値波動解析法はエネルギーフラックスが正確に表現されないため浅水変形の算定に問題を生じる^{5),6)}ことなどから、最近では緩勾配方程式に基づく計算の方が主流になっているようである。ただし、Berkhoff⁴⁾によるオリジナルな形の緩勾配方程式は楕円型の方程式のため、計算時間や境界条件の与え方といった数値計算上の面での難点を有している。これに対して、緩勾配方程式の放物型近似による解析法がいくつか提案されており(例えばRadder⁷⁾)、それによる数値計算効率の向上が図られている。しかし、この放物型近似では反射波が共存する波動場を取り扱うことに原理的な難点

* 本波動方程式についてはその概略を文献1)で報告している

** 東京工業大学 助教授 工学部土木工学科
(〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)

*** 東京工業大学 大学院修士課程 土木工学専攻(現運輸省)

があるため、構造物近傍での波動場の取り扱いが困難となる。一方、緩勾配方程式を双曲型の時間発展方程式の形で表現することも行われており（西村ら⁸⁾、渡辺・丸山⁹⁾、Copeland⁹⁾）、それによって上記の楕円型方程式に付随する数値計算上の難点を解消する試みがなされている。また、渡辺・丸山⁹⁾は、減衰項を方程式系に加えることによって碎波減衰を表現することも可能にしている。

しかし、これらの波動方程式はすべて線形であり、そのため浅海域、特に碎波を含むような波動場の算定にはおのずと限界がある。またもう一つの大きな制約は、これらがいずれも単一周期波 (monochromatic wave) を対象とした非分散性の波動方程式となっていることである。したがって、多方向不規則波を対象とする場合には各方向、各周期の成分波に分解して各成分波ごとに計算を行い、その後足し合わせるという作業を行う必要がある。また、このような線形重ね合わせの考え方を前提とした取り扱いでは、当然、非線形相互作用といった重要な現象を表現し得ないという原理的な面での制約が存在する。最近では海洋構造物の大水深化などにより、多方向性を含めた波の不規則性の評価が重要となりつつあることを考えると、これらのことは重大な制約事項であることを認識する必要がある。

一方、最近では、Boussinesq 方程式に代表されるような弱非線形・弱分散性波動方程式を用いて沿岸波浪場のシミュレーションを行う試みがなされるようになってきている（例えば、Abbott, et al.¹⁰⁾、Madsen & Warren¹¹⁾）。この場合には、非線形性・分散性ともある程度表現することが可能となるため、上記のような問題点は大幅に解消される。特に、波の分散性が（完全ではないが）表現できることから不規則波動のシミュレーションがある程度可能となる。しかしながら、この方程式が流速の鉛直分布形として長波のまわりの漸近展開を用いて導出されたものであるため（詳しくは4.で述べる）、方程式の有効性は、原理的に、対象とする波動場のスペクトル帯域が長波領域ないしはそれに近い領域にある場合に限られることになる。これに関連して、方程式に補正項を付加することによってより広いスペクトル帯域にまで方程式の有効領域を広げる試みが、最近 Madsen ら¹²⁾によって行われている。しかし、その場合に改良の対象とされているのは方程式の分散特性だけであって、流速場や圧力場の表現も改良されるわけではない。また、有効スペクトル帯域を広げるといってもやはり限度があり、任意のスペクトル帯域で有効になるわけではない。その意味で、このような試みによって長波近似方程式としての Boussinesq 方程式の本質が変わることはない。

これに対して Nadaoka¹³⁾は、共形変換と Fourier 変

換を組み合わせた理論展開により、任意断面地形上での任意の強さの非線形性と分散性を表現し得る波動方程式を導出している。これによれば、任意のスペクトル帯域を有する非線形不規則波の波浪変形を計算することが原理的に可能である。しかし、この場合には対象が二次元波動場に限られているため、多方向性まで含めた解析をすることができないという難点がある。

また最近、大山・灘岡¹⁴⁾は、新たに考案した無反射造波が可能ない開境界処理法（大山・灘岡¹⁵⁾）を用いて、境界要素法に基づいた非線形不規則波の計算を行っている。この種の境界積分法の系列のアプローチによれば、非線形性や分散性に関する解析手法上の制約はなくなるが、かなり記憶容量と計算時間を必要とすることから、当面は計算対象領域を絞った局所的な面での使い方にならざるを得ない。

3. Galerkin 法による波動方程式の導出

数学的な操作という面から水の波に関する波動方程式の導出過程を見てみると、それは一般的に、流速場（あるいは Φ ）に関する鉛直 (z) 方向依存性に関して何等かの適当な仮定を導入することにより、ベースとなる3次元空間 (x, y, z) 上で定義された運動方程式と連続式（速度ポテンシャル Φ を用いる場合にはそれらは Φ に関する Laplace の方程式となる）を2次元空間 (x, y) 上の方程式系に変換する操作とすることができる。

そこで、ここではベースとなる方程式系として連続式 (1) と Euler の式 (2) を用いることとし、水表面および底面での境界条件式 (3) - (5) のもとに方程式の2次元化を行う。

〔連続式〕

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

〔水平方向運動方程式〕

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \dots\dots\dots (2. a)$$

〔鉛直方向運動方程式〕

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla + w \frac{\partial}{\partial z} \right) w = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \dots\dots\dots (2. b)$$

〔水面および底面条件〕

$$p = 0 \quad (z = \zeta) \dots\dots\dots (3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \zeta = w \quad (z = \zeta) \dots\dots\dots (4)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla h = -w \quad (z = -h) \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 x, y : 水平座標、 z : 鉛直座標（静水面から上向きに正）、 t : 時間、 h : 水深、 ζ : 水位、 \mathbf{u}, w : 水粒子速度の水平および鉛直方向成分、 p : 圧力、 ρ : 密度、 g : 重力加速度、であり、また、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ である。

方程式の2次元化(波動方程式の導出過程)において最も重要となるポイントは、流速場 \mathbf{u} の鉛直方向依存性をどのように仮定し表現するかということにある。ここでは、以下のように、鉛直方向依存性を示す $F_i(k_i; k_i)$ はパラメータ)に重み関数 $W_i(x, y, t)$ をかけたものの I 項の線形和として水平流速ベクトル \mathbf{u} を表す(この具体的な意味については次節で述べる)。ここで、 W_i は \mathbf{u} に対応する2次元ベクトルである。

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^I W_i(x, y, t) \cdot F_i(z; k_i h) \dots \dots (6)$$

F_i の具体的な関数形としては、ここでは、通常の波動理論で現れる波数 k_i の場合の水平流速の鉛直方向依存性を表す次式を用いるものとする。

$$F_i(z; k_i h) = \frac{\cosh k_i (h+z)}{\cosh k_i h} \dots \dots \dots (7)$$

上式の k_i は波数に対応する量であり、したがって $\{k_i\} (i=1, \dots, I)$ の値は計算対象とする波動場の波数領域を全域にわたって覆うように設定する必要がある。しかし、後で詳しく述べるように、 k_i は波数に対応する量ではあるけれどもあくまでも F_i を規定するパラメータであって、対象とする波動場を構成する全成分波の波数という意味ではない。このことは、ここで導出する方程式の意味を理解する上で混乱しやすい点なので、特に注意を要する。

さて、上記の式(6)、(7)を導入することによって方程式の具体的な2次元化操作が可能となる。以下にその結果を示す。

まず、連続式(1)に式(6)、(7)を代入し、水表面および底面における境界条件式(4)、(5)を用いて鉛直方向に底面から水表面まで積分することにより次式を得る。(ここでは、 $\zeta/h \ll 1$ とした場合を示す。)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \sum_{i=1}^I \left[\nabla \cdot \mathbf{W}_i \frac{\tanh k_i h}{k_i} \right] = 0 \dots \dots \dots (8)$$

つぎに運動方程式(2)についてであるが、ここでは簡単のため非線形項(移流項)を落として線形化した式についての結果を示す。まず、連続式(1)および鉛直方向の運動方程式(2.b)から圧力 p が次のように表される。

$$p(z) = \rho g (\zeta - z) - \rho \sum_{i=1}^I \nabla \cdot \left[\frac{\partial W_i}{\partial t} \frac{1}{k_i^2} (1 - F_i(z; k_i h)) \right] \dots \dots (9)$$

これにより水平方向の運動方程式(2.a)も鉛直方向に積分できることになるが、単に鉛直積分したのでは当然ながら x 方向と y 方向成分それぞれ1個の方程式が得られるだけで、 ζ と W_i の合計 $2I+1$ 個の未知変数を決定するための方程式系を構成することはできない。そこでここでは、重み付き残差法の一つである Galerkin 法に基づいて、式(2.a)の両辺に重みとして式(7)で与えられる鉛直分布関数を乗じた後に z に関して底面から平

均水面まで積分を行う操作を施した。これにより、未知数 $W_i(x, y, t) (i=1, \dots, I)$ の時間発展を求める方程式系が得られ、これをマトリクス表示すると以下のようになる。

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \frac{\partial W_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial W_I}{\partial t} \end{bmatrix} = \mathbf{b} (\nabla \zeta) + \mathbf{c} \begin{bmatrix} \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial W_1}{\partial t} \right) \\ \vdots \\ \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial W_I}{\partial t} \right) \end{bmatrix} + \mathbf{D} \left\{ \begin{bmatrix} \left(\nabla \cdot \frac{\partial W_1}{\partial t} \right) \\ \vdots \\ \left(\nabla \cdot \frac{\partial W_I}{\partial t} \right) \end{bmatrix} (\nabla h) + \begin{bmatrix} (\nabla h \cdot \nabla) \frac{\partial W_1}{\partial t} \\ \vdots \\ (\nabla h \cdot \nabla) \frac{\partial W_I}{\partial t} \end{bmatrix} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

ここで、マトリクス \mathbf{A} , \mathbf{C} , \mathbf{D} およびベクトル \mathbf{b} は、以下のように定義される。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1I} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jI} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{I1} & \dots & a_{Ii} & \dots & a_{II} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (11)$$

$$a_{ji} = \left\{ \frac{\sinh(k_i + k_j)h}{k_i + k_j} + \frac{\sinh(k_i - k_j)h}{k_i - k_j} \right\} / 2 \cosh k_i h \cosh k_j h$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_I \end{bmatrix}, \quad b_j = -g \frac{\tanh k_j h}{k_j} \dots \dots \dots (12)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1i} & \dots & c_{1I} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{j1} & \dots & c_{ji} & \dots & c_{jI} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{I1} & \dots & c_{Ii} & \dots & c_{II} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (13)$$

$$c_{ji} = \left\{ \frac{\tanh k_j h}{k_j} - a_{ji} \right\} / k_i^2$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1i} & \dots & d_{1I} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ d_{j1} & \dots & d_{ji} & \dots & d_{jI} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ d_{I1} & \dots & d_{Ii} & \dots & d_{II} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (14)$$

$$d_{ji} = \left[\tanh k_i h \left\{ \frac{\sinh(k_i + k_j)h}{k_i + k_j} + \frac{\sinh(k_i - k_j)h}{k_i - k_j} \right\} - \left\{ \frac{\cosh(k_i + k_j)h - 1}{k_i + k_j} + \frac{\cosh(k_i - k_j)h - 1}{k_i - k_j} \right\} \right] / (2k_i \cosh k_i h \cosh k_j h)$$

式(8), (10)は ζ と $W_i(i=1, \dots, I)$ に関する連立微分方程式を構成しているが, これは各未知変数の時間発展を記述する波動方程式に他ならない。(なお, 式(8), (10)の導出過程で, $k_i(x, y)$ の空間勾配 ∇k_i に関わる項は微小として省略している。) これらを, 最も簡単なケースである, 2次元 (x, z) , 水平床上の波動場について具体的にまとめて書き下すと以下ようになる。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \sum_{i=1}^I \frac{\tanh k_i h}{k_i} \frac{\partial W_i}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (15)$$

$$A \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_i \\ \vdots \\ W_I \end{bmatrix} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} b + c \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_i \\ \vdots \\ W_I \end{bmatrix} \dots\dots\dots (16)$$

なお, 緩勾配方程式の導出過程⁴⁾では, 式(7)と同様の鉛直方向依存性関数が用いられ, しかも, 本波動方程式と同様に基礎方程式にこの鉛直方向依存性関数をかけて水深積分するという Galerkin 法的考え方が用いられている(例えば, 文献6)参照)。本波動方程式と大きく異なるのは, ここでいう I が1となっていることと, 圧力項の取り扱い方の違いにより非分散性の方程式となっていることなどである。

また, ここでは線形波動場を対象とした定式化を行ったが, 定式化の過程での波動場の非線形性の取り込みについては, まったく問題なく行うことが出来る。具体的には, 非線形項を残したままの運動方程式(2)に対して Galerkin 法による同様な展開を行うことになるが, そのとき, 式(7)の鉛直分布関数を原式にかけて z に関して積分する際, 線形波動場の場合のように底面($z=-h$)から平均水面($z=0$)までではなく, 水表面($z=\zeta$)までを積分区間とすればよい。このような定式化によって得られる波動方程式によれば, 水表面の関数形 $z=\zeta(x, y, t)$ が多価にならない限りにおいて, 原理的に任意の程度非線形を表現することが可能になる。

4. 分散性波動場に関する計算例

ここで導出した波動方程式は, 従来の波動方程式と異なり, 任意のスペクトル帯域上の波動場を表現し得る強分散性の波動方程式となっている。そこで, ここではその特徴を具体的に計算例の上からみとめるために, 分散性波動の典型例として, Cauchy-Poisson 波と不規則波の場合についての計算例を示す。ここでは2次元水平床の線形波動について取り扱っているため, 両ケースとも簡単な理論解が存在することから, 計算結果の妥当性の検証が可能である。

なお, 本波動方程式に関する数値計算上のアルゴリズムとしては, リープフロッグ法と三重対角化を組み合わせ

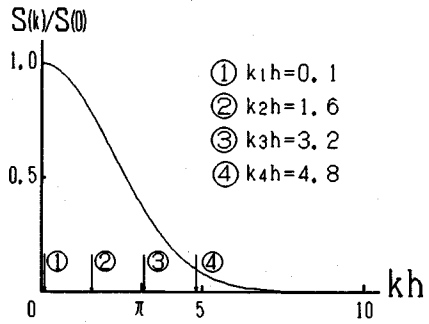


図-1 計算対象の Cauchy-Poisson 波の波数スペクトル

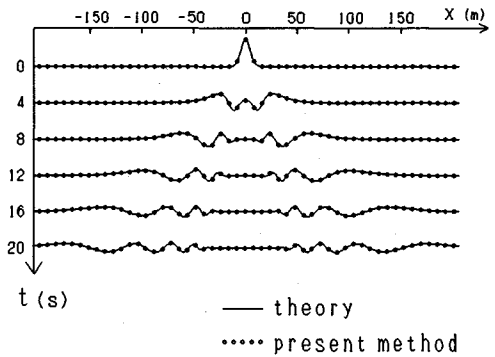


図-2 Cauchy-Poisson 波の計算結果

せた陰解法ないしはSORを用いたが, 紙面の制約からその詳細の報告は別の機会にゆずることとする。

(1) Cauchy-Poisson 波

まず Cauchy-Poisson 波の結果を示す。ここで示す計算結果は, 表面波形の初期値として

$$\zeta(x, 0) = a \cdot \exp\{- (x-x_0)^2 / (0.4 \cdot h^2)\} \dots\dots\dots (17)$$

の形のもを与え, $a=1.5$ m, $h=10$ mとした場合のもので, 図-1はこれに対応する波数スペクトルを示したものである。これからわかるように, この計算では深海波領域($kh \geq \pi$)を含むかなり広帯域のスペクトルを有する波動場を対象としている。また, この計算例では $I=4$ として同図中に示されている位置に $\{k_i h\}$ を設定している。なお, 数値計算上の x と t の刻み幅は $\Delta x=1.0$ m, $\Delta t=0.1$ sである。

図-2は, 自由表面 ζ の空間波形の時間発展を示したものである。図中には, 本波動方程式による計算結果と理論解をそれぞれ丸印(表示は $8\Delta x$ 間隔)と実線で示してあるが, 両者を比較するとほぼ完全に一致していることがわかる。

また, このような wave packet の伝播が精度良く算定できるということは, 本波動方程式によって, 波動場の位相速度だけでなくエネルギー輸送速度も十分高い精度で表現できるということを意味している。

(2) 不規則波

つぎに、本波動方程式によって不規則波動場をシミュレートした結果について述べる。具体的には水平2次元水路の一端に造波境界を設け、そこで所定の不規則波の流速を境界条件として与え、水路の他端にはスポンジ境界を設定して消波させる形で計算を行った。

この場合、造波境界での流速に対応して W_i の値をどのように設定するかが問題となるが、ここでは以下のように取り扱った。まず、造波境界 $x=x_0$ で境界条件として与えるべき流速 $u(x_0, z, t)$ は、

$$u(x_0, z, t) = \sum_{n=1}^N g \frac{a_n k_n}{\sigma_n} F_n \cdot \cos(k_n x_0 - \sigma_n t + \theta_n) \dots (18)$$

と表せる。ここでは N は不規則波の成分数である。一方、本波動方程式では、流速 u を式(6)のように表現しており、したがって $x=x_0$ においても

$$u(x_0, z, t) = \sum_{i=1}^I W_i(x_0, t) \cdot F_i(z; k_i h) \dots (19)$$

である。そこで、式(18)と(19)を等値し、両辺に F_i を掛けて z に関して $-h$ から 0 まで積分することにより、最終的に $\{W_i(x_0, t)\}$ を与える次式を得る。

$$W(x_0, t) = \begin{bmatrix} W_1(x_0, t) \\ \vdots \\ W_i(x_0, t) \\ \vdots \\ W_I(x_0, t) \end{bmatrix} = R^{-1} \cdot Q \cdot f(x_0, t) \dots (20)$$

ここに、

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1I} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{I1} & \dots & r_{II} \end{bmatrix}, \quad r_{ji} = \int_{-h}^0 F_i F_j dz \dots (21)$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & \dots & q_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{I1} & \dots & q_{IN} \end{bmatrix}, \quad q_{im} = \int_{-h}^0 F_i F_m dz \dots (22)$$

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}, \quad f_n = g \frac{a_n k_n}{\sigma_n} \cos(k_n x - \sigma_n t + \theta_n) \dots (23)$$

ここでは、平均波高 14 m、平均周期 10 s、水深 50 m としたときのブレッグシュナイダー型スペクトルをもつ不規則波の流速を造波境界で与えて計算を行った。対応する波数スペクトルと $\{k_i h\}$ の設定値 ($I=4$ としている) を図-3 に示すが、これからわかるようにこの場合にも深海波領域を含むかなり広いスペクトル帯域の計算となっている。なお、造波境界からスポンジ境界までの距離は 600 m で、数値計算上の x と t の刻み幅は $\Delta x = 2.0$ m、 $\Delta t = 0.1$ s である。

図-4 は、造波開始後 240 s での表面波形と $z=0, -h/2, -h$ の 3 地点での水平流速波形を示したものであるが、これを見ると計算値 (丸印、表示は $5\Delta x$ おき)

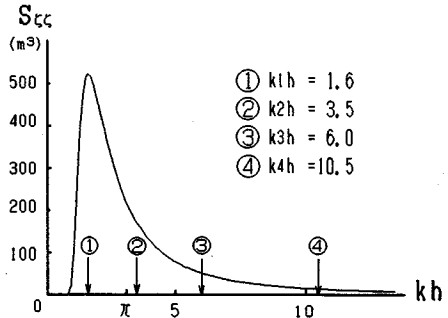


図-3 計算対象の不規則波の波数スペクトル

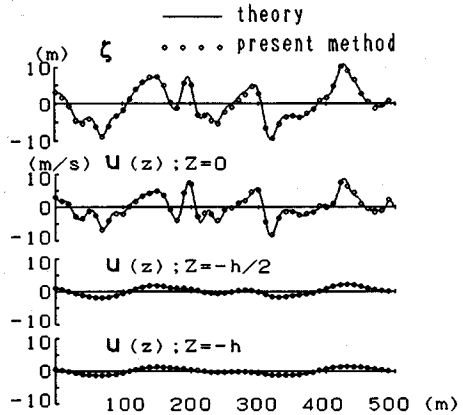


図-4 不規則波の計算結果

は流速波形も含めて理論値 (実線) とほぼ完全に一致していることがわかる。特に、深海波成分をかなり含んだ計算であるにもかかわらず、表面波形だけでなく流速波形も理論解にほぼ一致する結果が得られていることは注目に値する。例えば、先にも述べたように、最近 Madsen ら¹²⁾ は、Boussinesq 方程式に関して、ある種の補正項を付加することによって方程式の適用性をより高波数側まで広げることを試みているが、方程式の分散特性の面での有効波数領域を広げることは成功しているものの、流速場や圧力場の表現に関してはこれまでどおりで高波数領域では大幅に精度が低下する。

なお、図-4 に見られる計算値と理論値の良好な一致は、本波動方程式自体の妥当性だけでなく、上記の造波境界での W_i の値の設定の仕方の妥当性も示している。

5. 考 察

(1) 本波動方程式における W_i の算定思想

a) 通常の線形波動論との比較

前節で示したように、本波動方程式による数値計算結果は、Cauchy-Poisson 波と不規則波の両方のケースにおいて共に良好な理論値との一致を示す。ここで重要なことは、深海波領域を含む広いスペクトル帯域の波動場

を対象とした計算であるにも関わらず、わずか $I=4$ という W_i の成分数ではほぼ完全な理論解との一致がみられるということである。このことは一見奇異に感じられるかも知れない。例えば、水平床上の2次元 (x, z) 空間上の波動場の速度ポテンシャル Φ の一般解は、

$$\Phi(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k, t) \frac{\cosh kh(z+h)}{\cosh kh} \exp(ikx) dk \dots\dots\dots (24)$$

となるが、これを波数 k に関して刻み幅 Δk で離散化して表すと、

$$\cong \sum_{i=1}^N A(k_i, t) \exp(ik_i x) \Delta k \frac{\cosh k_i(z+h)}{\cosh k_i h} \dots\dots\dots (25)$$

となり、 $A(k_i, t) \exp(ik_i x) \Delta k = W_i(x, t)$ とみなせば式(6)と全く同形となる。式(24)の $A(k, t)$ は波数スペクトルを含む未定変数であるが、任意の $A(k, t)$ に対応する波動場を式(25)のような離散近似表現で表そうとすると、当然 N を十分大きくとらなくてはならない。このことは、先に示した本計算法による結果がわずか $I=4$ としたものであるにもかかわらず理論解とのほぼ完璧な一致を示していることと矛盾するように見える。

この点を理解するには、通常の線形波動理論による式(24)中の $A(k, t)$ の時間発展方程式、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} A(k, t) + gk \cdot \tanh kh \cdot A(k, t) = 0 \dots\dots\dots (26)$$

の意味するところ、本理論による W_i の算定思想の違いを見ればよい。上式に従う通常の線形理論での $A(k, t)$ は、他の波数成分とは全く関係なく独自に時間発展を行う。このことは、波動場の線形性から考えて当然のことなのだが、ここで導いた波動方程式との大きな違いの一つはまさにこの点にある。式(10)ないし(16)を見れば明らかなように、本波動方程式での W_i 成分は他の成分と独立な形になっていない。ここではむしろ逆に、 W_i 成分は他の成分と密接に関連しバランスを取ることによって、水平流速の水深全体にわたる最良近似を任意の (x, y, t) で実現するように決められる。これは、本波動方程式の導出の基礎となっている Galerkin 法の考え方の現れに他ならない。したがって、式(6)と(25)の見かけ上の類似性とは裏腹に、本波動方程式における未定変数の決め方の思想は通常の線形波動理論のそれと比べてかなり異なったものとなっている。

なお、Fenton & Rienecker¹⁶⁾ は、 Φ に関する式(25)の離散フーリエ・スペクトル表現に基づいて、水平床上の非線形波動場の時間発展を記述する方法を提案している。しかし彼らの方法は、流れ場の非回転性(従って、風応力や底面せん断力・砕波の効果などを直接的に与えられない)に加えて、空間的な場の周期性を仮定したものであって、その適用性が限られてくる。実際著者らの知るところでは、彼らの方法の適用例はごく限られたも

のに留まっているようである。(付言すると、Fourier変換を用いた Nadaoka¹³⁾ の波動方程式は、速度ポテンシャル Φ の連続スペクトル表現に基づいており、したがって当然ながら、場の周期性を仮定していない。)

b) Boussinesq 方程式との比較

ここではさらに、既存の(弱)分散性波動方程式の代表的なものとして Boussinesq 方程式を取り上げ、それとの比較で本波動方程式の特徴について考えてみることにする。

先の3.で述べたように、波動方程式の導出過程すなわち原方程式の2次元化において最も重要となるポイントは、流速場 u (あるいは速度ポテンシャル Φ) の鉛直方向依存性をどのように仮定し表現するかという点にある。これは、本波動方程式と他の波動方程式との比較という観点からも重要な点である。そこで、ここでは特にこの点に焦点を絞って、Boussinesq 方程式の導出過程の要点について見ておくことにする。

Boussinesq 方程式の通常の導出過程においては、まず、速度ポテンシャル Φ を次式のように級数展開した形におく(例えば、Mei & Le Mehaute¹⁷⁾, Mei¹⁸⁾).

$$\Phi(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x, y, t) \cdot (z+h)^n \dots\dots\dots (27)$$

そして、これを Φ に関する Laplace の方程式に代入し、底面条件を用いることにより、 Φ は以下のように Φ_0 のみを未知変数として含んだ形式で表されることになる。(ここでは水平床の場合の結果を示す。)

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z, t) = & \Phi_0 - \frac{(z+h)^2}{2!} \nabla^2 \Phi_0 \\ & + \frac{(z+h)^4}{4!} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \Phi_0 - \frac{(z+h)^6}{6!} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \Phi_0 + \dots \\ & \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

これによって、もとの3次元空間上で定義される未知変数 $\Phi(x, y, z, t)$ が2次元水平面上の空間で定義される $\Phi_0(x, y, t)$ で表されることになり、これを残る境界条件式に代入することにより、 Φ_0 と ζ に関する時間発展方程式が得られる。

式(28)は、 Φ に関する一般解である式(24)を $kh=0$ の回りで漸近展開して得ることもできる(灘岡・中川¹¹⁾)。そのことから明らかなように、上式は $\mu \equiv kh$ が十分小さい場合にその収束性が保証されるが、通常の Boussinesq 方程式の形を得るには μ^2 次までの項に対応する式(28)の右辺2項までをとって Φ を表現する。

以上に基いて、本波動方程式導出上のポイントである水平流速に関する式(6)の仮定と、Boussinesq 方程式の導出の際の出発点であった式(27)を比較してみる。これらを見ると、表現対象がそれぞれ水平流速ベクトル u と速度ポテンシャル Φ という形式上の違いがあるものの、意味内容からすれば、

$$\left. \begin{aligned} W_i(x, y, t) &\longleftrightarrow \Phi_n(x, y, t) \\ F_i(z; kh) &\longleftrightarrow (z+h)^n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

という対応が成り立っていることがわかる。すなわち、Boussinesq 方程式では鉛直方向依存性を示す関数系が n 次多項式系に設定されており、それらにかかる重み関数 Φ_n が、 Φ に関する Laplace の方程式を満足させるという条件のもとに式(28)の形で全て Φ_0 に依存する形で一義的に表現されるのに対し、本波動方程式では、鉛直方向依存性を示す F_i が式(7)の形の双曲線関数で設定されており、重み関数 W_i は Galerkin 法に基づいて、任意の (x, y, t) で基礎方程式を水深全体にわたって十分満足するよう決定される形になっている。

先述のように、ある波動方程式の導出プロセスが流速場ないしは速度ポテンシャルの z 方向依存性の表現に本質的に依存しているとすれば、導出された波動方程式の有効領域もその z 方向依存性の表現形式自体の有効領域に依存することになる。その観点から上記の対比を見てみると、Boussinesq 方程式の場合には、1と $(z+h)^2$ を基底ベクトルとして張る関数空間上の値として流速場ないしは速度ポテンシャルを近似するのに対し、本波動方程式では

$$F_i(z; k_i h) = \frac{\cosh k_i(h+z)}{\cosh k_i h}, \quad (i=1, \dots, I) \dots\dots (30)$$

を基底ベクトルとして張る関数空間上の値として流速場を近似している。すなわち、Boussinesq 方程式の場合には、基底ベクトルを長波およびその近傍領域のみで有効な2つの多項式にあらかじめ固定しているのに対し、本波動方程式の場合には深海波領域まで含めた任意の波数領域上の流速場に対して十分な近似が得られるよう、基底ベクトルをかなり柔軟に設定できるようになっている。

また、本波動方程式における式(6)中の展開項数 I は $\{k_i h\}$ が対象とする波動場のスペクトル帯域を十分覆うように任意に設定されるが、Boussinesq 方程式の場合には上記のように通常2項までで表現される。もちろん漸近展開の精度を上げ有効波数領域を広げるためにより高次の項まで組み込むことも考えられるが、そうすると式(28)の形からわかるように、それにつれて空間微分の階数がかかなり大きくなってしまふ。この点は、実際の数値計算上重要なポイントで、一般に、空間微分の階数の増加は数値計算上の難点の増大を意味する。これに対して、本波動方程式では式(10)からわかるように、空間微分の最高階数は展開項数 I の値にかかわらず常に2のままであり、その意味で数値計算上有利になる。

(2) 水平流速の鉛直分布形状の近似精度について

上記のように、波動方程式の有効領域は、基本的に流速場ないしは速度ポテンシャルの z 方向依存性の表現形式自体の有効領域に依存する。そこで、ここでは簡単な

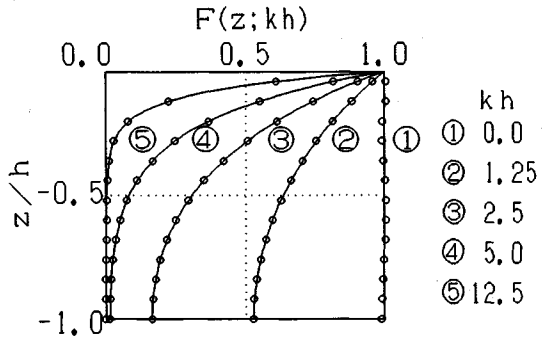


図-5 水平流速の鉛直分布形状の近似度

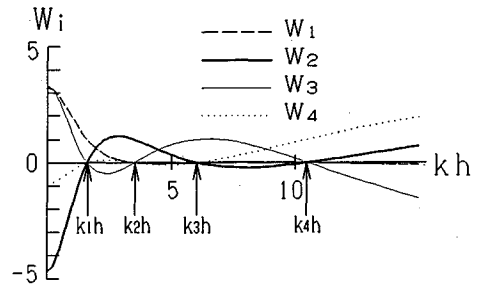


図-6 任意の kh の F に対する $W_i (i=1, \dots, 4)$ の値

基本的検討として、任意の無次元波数 kh をもつ正弦波動場の鉛直分布を、Galerkin 法に基づく本方法の考え方によってどの程度良く近似することができるかを調べてみた。具体的には任意の kh の z 方向依存性関数、

$$F(z; kh) = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \dots\dots\dots (31)$$

を

$$F(z; kh) = \sum_{i=1}^I W_i \cdot F_i(z; k_i h) \dots\dots\dots (32)$$

と表したときの重み関数 $W_i (i=1, \dots, I)$ を Galerkin 法によって算定し、 $F(z; kh)$ を式(32)によってどの程度近似できるかを見てみた。

図-5がその結果で、 $I=4$ とし、 $\{k_i h\} (i=1, \dots, I)$ の値に先の不規則波の計算の際に設定した値と同じものを用いて計算したものである。図中、実線が近似すべき $F(z; kh)$ の分布形を、また白抜きの丸印が計算値を示している。計算対象とした $F(z; kh)$ は、図中の凡例に示す5つの kh に対するものであるが、いずれのケースでも、ほぼ完璧な近似が得られていることがわかる。特に、 $k_1 h$ よりも小さい $kh=0$ のケース (①の曲線) や、逆に $k_4 h$ よりも大きい $kh=12.5$ のケース (⑤の曲線) でもかなり良好な近似が得られていることは注目に値する。

図-6は、参考のために、任意の kh の $F(z; kh)$ に対して、図-5と同じ $\{k_i h\} (i=1, \dots, 4)$ によって計算した重み $W_i (i=1, \dots, 4)$ の値を、横軸に kh をとって示

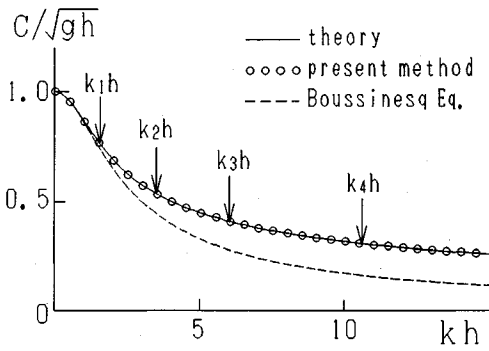


図-7 本波動方程式による分散関係

したものである。

(3) 本波動方程式の分散性について

先の計算例で示したように、本波動方程式によって深海波領域まで含む広い波数帯域を有する波動場のシミュレーションを精度良く行うことが出来るということは、一つには、本波動方程式の分散特性が長波から深海波までの広い範囲で、実際の分散関係式を精度良く満足し得るものとなっていることを示唆している。そこで、ここで本波動方程式の分散特性について具体的に検討しておくことにする。

図-7は、線形波動の分散関係式を c を位相速度として、

$$\frac{c}{(gh)^{1/2}} = \left(\frac{1}{kh} \tanh kh \right)^{1/2} \dots\dots\dots (33)$$

と表した場合の理論曲線に対して、本波動方程式の固有値計算から求められる無次元位相速度をプロットしたものである。このときの W_i の成分数 I は4とし、 $(k_i h)$ ($i=1, \dots, I$) の値は、先の不規則波計算の際と同じ値で、図に矢印で示す位置に設定している。これを見ると、①長波領域から深海波領域 ($kh \geq \pi$) の全てを覆う広い範囲で計算値と理論値の良好な一致がみられること (このことは位相速度だけでなく、分散曲線の微係数で決まる群速度についても理論値との十分な一致が得られることを意味する)、②しかも、上記の水平流速の鉛直分布に対する近似度の場合と同様に、 kh が $k_1 h$ より小さい領域や $k_4 h$ より大きい領域でも、理論値との一致が良好であること、③また、 kh が $k_i h$ に等しい場合と異なった場合とで理論値との一致度にほとんど差がないこと、などがわかる。なお、図中の破線は、比較のために、通常の Boussinesq 方程式の分散関係式 (例えば、Mei 1983, p. 511) を示したものである。

ここで注目すべきことは、わずか4つの W_i 成分だけの計算で広い波数範囲上の任意の kh に対して分散関係式を満足することが出来ている点である。このことは、上述の、流速の鉛直分布形を同様の4つの W_i のみの設定で任意の kh に対してほぼ完璧に近似できることと

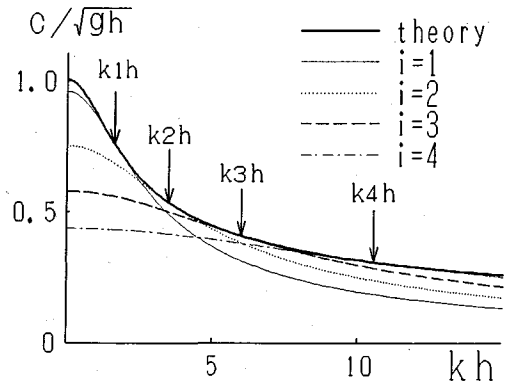


図-8 各 W_i 単独で流速 u を表した場合の分散曲線

対応している。このような、わずかな成分数による波動・流速場のほぼ完璧な記述の実現は、先に5.(1)のa)で述べたように、式(25)で表される通常の成分波振幅 $A(k_i, t)$ の考え方と、ここでの Galerkin 法に基づく重み関数 W_i の算定思想が根本的に異なることに起因している。その違いは、ここで論じている分散特性にも明瞭に現れる。というのは、 W_i に形式的に対応する式(25)中のファクター、 $A(k_i, t) \exp(ik_i x) \Delta k$ が単一の位相速度しか持たず、非分散性であるのに対して、 W_i はそれぞれ単独でも分散性を有するからである。

このことを具体的に見てみるために、ここで、かりに流速 u が単一の W_i 成分のみによって構成されるものと考えて、その分散特性を調べてみよう。詳細はここでは省略するが、この場合には解析的な固有値計算により理論式を導くことが可能で、最終的に、以下の分散関係式が得られる。

$$\frac{c}{(gh)^{1/2}} = \left\{ \frac{\alpha_i^2}{(\beta_i + \alpha_i \gamma_i k^2 h^2)} \right\}^{1/2} \dots\dots\dots (34)$$

ここに、

$$\alpha_i = \frac{1}{k_i h} \tanh k_i h$$

$$\beta_i = \frac{1}{2 \cosh^2 k_i h} \left\{ \frac{\sinh 2k_i h}{2k_i h} + 1 \right\}$$

$$\gamma_i = \frac{1}{2k_i^2 h^2} - \frac{1}{k_i h \cdot \sinh 2k_i h}$$

図-8は、上式に基づいて、図-3で設定した各 $k_i h$ に対応する W_i 成分の分散関係曲線を示したものである。これからわかるように、各 W_i は、単独でも明確な分散性を示し、しかも、それぞれの分散曲線は各 $k_i h$ の近傍で波動場本来の分散関係式(33)を十分近似する形になる。しかも、分散曲線の勾配が本来の分散曲線に接する形になることから、波速だけでなく群速度についても各 $k_i h$ の近傍で十分高い近似度が得られることになる。このことは、分散性の近似度という観点からは、対象とする波動場のスペクトル帯域が狭い場合には、その

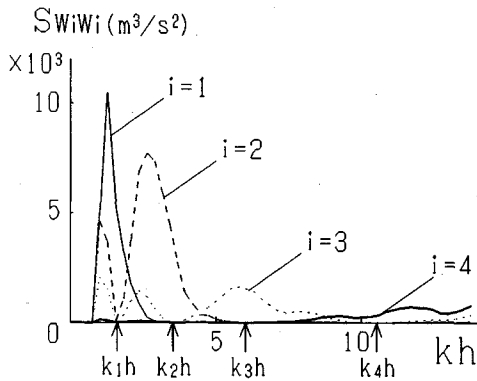


図-9 不規則波の計算での各 W_i の波数スペクトル

中心周波数に対応する波数 k_p によって、 $k_p h$ の 1 成分で W_i を設定して計算をすればよいことを示している。

逆に、広帯域スペクトルの場合には、スペクトル帯域の広さに対応して成分数を増やすことになるが、ここで、今回の広帯域スペクトルの不規則波計算における各 W_i の波数スペクトル上の分担割合を具体的にみておこう。図-9 が FFT によるスペクトル計算の結果であるが、これを見ると、各 W_i のスペクトル値は、対応する $k_i h$ の近傍でピークを持つ分布形となっていることがわかる。ただし、 $k_i h$ の近傍以外でも $k_i h$ の左側部分などに顕著なピークが現れているが、これは、図-6 から明らかかなように、この波数領域での流速場の近似のために、複数の W_i による有意な大きさの寄与が必要となるためである。

(4) 任意単一波数の正弦波の再現性と任意波動場の再現性の関係について

上記のように、任意波数の正弦波の位相速度は理論値ときわめて良い一致を示す。同様な良好な一致は、ここでは紙面の制約上示さないが、任意波数の正弦波の自由表面波形や流速波形についても見られる。このことは、 kh の波数成分の線形和で表される任意の波動場に対しても、本波動方程式によって十分よく再現できることを意味している。以下に、このことに関して具体的に述べておく。

本波動方程式によれば、波数 k_i を有する正弦波の水平流速

$$u_i(x, z, t) = A_i \frac{\cosh k_i(h+z)}{\cosh k_i h} \exp\{i(k_i x - \sigma_i t)\} \dots \dots \dots (35)$$

(ここで、 A_i は複素係数で、上式は右辺の実数部をとるものとする) に対して、本波動方程式では、

$$u_i(x, z, t) = \sum_{j=1}^I W_{ij}(x, t) \cdot F_i(z; k_i h) \dots \dots \dots (36)$$

として計算することにより、上記のように $k_i \neq k_j$ でも式(35)の流速場を十分良く表現することが可能である。

一方、(線形・非線形に関わらず) 水平床上の任意の波動場の元での流速場は式(35)で示される k_i の流速成分の線形和で表現できる。すなわち、

$$u(x, z, t) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} u_j(x, z, t) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} A_j \frac{\cosh k_j(h+z)}{\cosh k_j h} \exp\{i(k_j x - \sigma_j t)\} \dots \dots \dots (37)$$

である。同様の線形和を式(36)についてとると、

$$u(x, z, t) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} u_j(x, z, t) = \sum_{j=1}^I \sum_{i=1}^{j_{\max}} W_{ij}(x, t) \cdot F_i(z; k_i h) \dots \dots \dots (38)$$

となるが、

$$W_i(x, t) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} W_{ij}(x, t) \dots \dots \dots (39)$$

と表せば、けっきょく式(6)と同形になる。したがって、任意の k_j の正弦波動場が本波動方程式によって十分良く表現されれば、任意の波動場についても同様に十分良く表現できることがわかる。

(5) $\{k_i h\}$ の設定の仕方への数値解の依存性について

さきに述べたように、本波動方程式の $\{k_i h\}$ ($i=1, \dots, I$) は対象とする波動場のスペクトル特性に応じて柔軟に設定することが出来る。しかし、このことは逆に、計算結果の精度が I や $\{k_i h\}$ の設定の仕方依存し、計算者のしい性が計算結果に反映し得ることを意味している。特に、計算結果がこれらのパラメータの設定によってかなり鋭敏に変化するようであれば、方程式の有効性そのものに問題がでてくる。この点については、すでに、 $\{k_i h\}$ が対象とする波数スペクトルを合理的にカバーする形になっていれば、各 $k_i h$ の値が多少変化したくらいでは計算結果にほとんど違いが現れないことを確認している。

この、対象とする波数スペクトルと I や $\{k_i h\}$ の設定の仕方の関係については、ここでは紙面の制約から詳細な記述を省略せざるを得ないので、別の機会に報告する予定である。

6. おわりに

本論文では、最近著者らが導出することに成功した、長波領域から深海波領域にかけての任意のスペクトル帯域を有する不規則波動場をシミュレートすることが可能な新たな波動方程式について、その具体的な内容について述べた。そして、いくつかの計算例を示すことによりこの波動方程式の妥当性を明らかにするとともに、本波動方程式の基本特性を様々な角度から検討を加えた結果について述べた。

本文中に述べたように、Galerkin法による定式化では、方程式系に含まれる非線形性の存在は波動方程式の導出の際の本質的な障害にはならず、任意の強さの非線形性を取り込むことが可能である。また、本論文では水平床上の波動場の計算例しか示していないが、本文中に述べたように、本波動方程式ではエネルギーフラックスについても十分精度良く表現できていることから、斜面上の波動場の浅水変形計算も問題なく行える。それらの結果については、今後逐次報告して行く予定である。

謝辞：本研究を行うに当たっては、文部省科学研究費一般研究C（研究課題番号：0265034，研究代表者：灘岡和夫）の補助を受けた。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) 灘岡和夫・中川康之：Galerkin法に基づく強分散性波動方程式の導出と背景について，東京工業大学土木工学科研究報告，No.44，pp.63～75，1991.
- 2) 伊藤喜行・谷本勝利：数値波動解析法とその応用—構造物周辺の波，第18回海岸工学講演会論文集，pp.67～70，1971.
- 3) 伊藤喜行・谷本勝利：波向線交差領域での波の屈折—数値波動解析法への応用(2)，第19回海岸工学講演会論文集，pp.325～329，1972.
- 4) Berkhoff, J.C.W. : Computation of combined refraction-diffraction, Proc. 13th Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE, pp.471～490, 1972.
- 5) 渡辺 晃・丸山康樹：屈折・回折・砕波減衰を含む波浪場の数値計算法，第31回海岸工学講演会論文集，pp.103～107，1984.
- 6) 本間 仁監修・堀川清司編：海岸環境工学，東大出版会，p.219，1985.
- 7) Radder, A.C. : On the parabolic equation method for water-wave propagation, J. Fluid Mech., Vol.72, pp.373～384, 1979.
- 8) 西村仁嗣・丸山康樹・平口博丸：直接数値積分による波の場の解析，第30回海岸工学講演会論文集，pp.123～127，1983.
- 9) Copeland, G.J.M. : A practical alternative to the "mild-slope" wave equation, Coastal Eng., Vol.9, pp.125～149, 1985.
- 10) Abbott, M.B., Petersen, H.M. and Skovgaard, O. : On the numerical modelling of short waves in shallow water, J. Hydraul. Res., Vol.16, No.3, pp.173～203, 1978.
- 11) Madsen, P.A. and Warren, I.R. : Performance of a numerical short-wave model, Coastal Eng., Vol.8, pp.73～93, 1984.
- 12) Madsen, P.A., Murray, R. and Sorensen, O.R. : A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Coastal Eng., Vol.15, pp.371～388, 1991.
- 13) Nadaoka, K. : A fundamental study on shoaling and velocity field structure of water waves in the nearshore zone, Doctoral Thesis, Reproduced in Tech. Rept., No.36, Dept. of Civil Eng., Tokyo Inst. of Tech., 1986.
- 14) 大山 巧・灘岡和夫：潜堤を通過する非線形波列の分裂現象の解析，土木学会論文集，No.450/II-20，pp.31～40，1992.
- 15) 大山 巧・灘岡和夫：非線形不規則波動場を対象とした数値波動水槽の開発，土木学会論文集，No.429/II-15，pp.77～86，1991.
- 16) Fenton, J.D. and Rienecker, M.M. : Accurate numerical solutions for nonlinear waves, Proc. of 17th Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE, pp.50～69, 1980.
- 17) Mei, C.C. and Le Mehaute, B. : Note on the equations of long waves over an uneven bottom, J. of Geophys. Res., Vol.71, No.2, pp.393～400, 1966.
- 18) Mei, C.C. : The applied dynamics of ocean surface waves, John Wiley & Sons, pp.504～512, 1983.

(1992. 8. 11 受付)

DERIVATION OF FULLY-DISPERSIVE WAVE EQUATIONS FOR IRREGULAR WAVE SIMULATION AND THEIR FUNDAMENTAL CHARACTERISTICS

Kazuo NADAOKA and Yasuyuki NAKAGAWA

Existing dispersive wave equations, such as Boussinesq equation, are derived with an asymptotic expansion around the long wave limit, and hence their applicability is restricted to the shallow water. To break through the restriction, in the present study, fully-dispersive wave equations have been developed through a formulation based on the Galerkin method. The newly derived equations can simulate irregular wave fields with wide spectrum range extending over shallow to deep water region. The validity of the wave equations has been confirmed through the comparison of their numerical solutions with the theories both for Cauchy-Poisson and irregular waves. The discussions are given also about the fundamental characteristics, such as the dispersivity, of the new wave equations.