

薄層要素—離散化波数法による成層弾性体の面内波動場での衝撃応答解析手法

東平光生*

薄層要素—離散化波数法による成層弾性体の面内波動場での衝撃応答解析手法を展開している。二次元面内波動場の方程式に対し、薄層要素—離散化波数法を適用すると、Hermite マトリックスの固有値問題が現れる。ここでは、この固有値問題を解くことで、Rayleigh 波のモードを求め、これらを因果性を満足するように重ね合わせることで衝撃応答を計算している。

Key Words : discrete wave number method, thin-layered method, impulsive response, time domain, Hermitian matrix, in-plane wave field

1. はじめに

著者は、先に二次元面外波動場で、時間領域での薄層要素法と離散化波数法を組み合わせた（以下、薄層要素—離散化波数法）Green 関数の算定手法を展開し、地盤の衝撃応答解析結果が解析結果と良好に一致することを示した¹⁾。

この手法の特徴は、時間領域の波動方程式に、薄層要素法と離散化波数法を直接適用し、さらにモーダルアナリシスを用いることで、時間領域の解を得る点にあった。すなわち、この手法では、薄層要素法で波動方程式の鉛直方向の空間微分を代数演算に置き換え、さらに離散化波数法で波動方程式の水平方向の空間微分を代数演算に置き換えた。そして、モーダルアナリシスにより離散化波数に対応する表面波の振動数ならびにモードを求め、因果性を満足するように表面波モードを重ね合わせ Green 関数を表現した。

これまでの、薄層要素法では与えられた振動数に対応する表面波の波数とモードを求めてきており²⁾、こうした点でここでの薄層要素法は、これまでの用い方とは異なっている。さらに離散化波数法の用い方も、時間領域の方程式に直接適用された点で、これまでの用い方³⁾とは異なっていると言える。

本論文では、この研究に引き続き、時間領域での薄層要素—離散化波数法を、二次元の面内波動場に適用してみる。そして、この手法の展開過程を通して、Rayleigh 波と Love 波の相違点を考察する。また、衝撃応答解析を通して本手法の妥当性を検証し、合わせて剛基盤上の地盤の振動性状についても言及する。

2. 二次元面内波動場における離散化波数—薄層要素法

(1) 弾性波動方程式

二次元面内波動場の方程式は、次式で示される。

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \vec{u} + \mu \nabla^2 \vec{u} - \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \vec{0} \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 λ, μ は Lamé の定数、 ρ は質量密度、 t は時間である。また、 ∇ は勾配演算子、 \vec{u} は変位ベクトルである。

(2) 薄層要素法

Fig.1 に示すように、薄層要素法は、水平成層弾性体を薄層要素と呼ばれる層状の有限要素で離散化する手法である。この薄層要素は鉛直方向に有限の厚さを持ち、水平方向には無限に広がっている。すなわち、薄層要素法では鉛直方向の空間微分演算のみを離散化することが基本である。

式 (1) の方程式に薄層要素法を適用する場合の出発点は次のようになる。

$$\int_{\Omega} \delta \vec{u}^T \left[(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \vec{u} + \mu \nabla^2 \vec{u} - \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \right] dz = 0 \dots (2)$$

ここに、 $\delta \vec{u}$ は、変位 \vec{u} に対する仮想増分、 Ω は薄層要素法が適用される領域を表す。薄層要素法における離散化は、鉛直方向についてのみ行うので、式 (2) での積分は、鉛直方向の座標成分を表す z について行っていることに注意する。

前論文¹⁾で示した手法と同様に、式 (2) に適当な部分積分を施し、補関数を用いて鉛直方向の微分演算を離散化することで、次の方程式が得られる。

$$\left[[M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} - [A] \frac{\partial^2}{\partial x^2} + [B] \frac{\partial}{\partial x} + [G] \right] \{u\} = \{P\} \dots \dots \dots (3)$$

ここに、 $[M], [A], [B]$ および $[G]$ は、マトリック

* 正会員 工博 東京理科大学講師 理工学部土木工学科 (〒278 千葉県野田市山崎 2641)

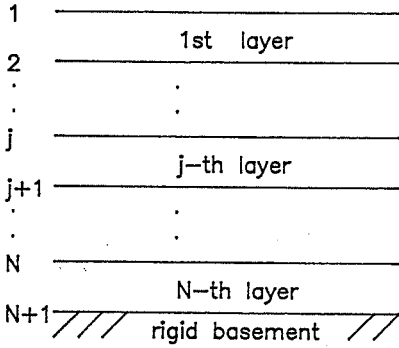


Fig.1 Thin-layered element division of an elastic layered medium

スであり、線形補間関数を用いて方程式を離散化した場合、 j 番目の薄層要素マトリックスの成分は次のようになる。

$$[M]_j^e = \frac{\rho_j h_j}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[A]_j^e = \frac{h_j}{6} \begin{bmatrix} 2(\lambda_j + 2\mu_j) & 0 & (\lambda_j + 2\mu_j) & 0 \\ 0 & 2\mu_j & 0 & \mu_j \\ (\lambda_j + 2\mu_j) & 0 & 2(\lambda_j + 2\mu_j) & 0 \\ 0 & \mu_j & 0 & 2\mu_j \end{bmatrix}$$

$$[B]_j^e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & (\mu_j - \lambda_j) & 0 & (\mu_j + \lambda_j) \\ -(\mu_j - \lambda_j) & 0 & (\mu_j + \lambda_j) & 0 \\ 0 & -(\mu_j + \lambda_j) & 0 & -(\mu_j - \lambda_j) \\ -(\mu_j + \lambda_j) & 0 & (\mu_j - \lambda_j) & 0 \end{bmatrix}$$

$$[G]_j^e = \frac{1}{h_j} \begin{bmatrix} \mu_j & 0 & -\mu_j & 0 \\ 0 & (\lambda_j + 2\mu_j) & 0 & -(\lambda_j + 2\mu_j) \\ -\mu_j & 0 & \mu_j & 0 \\ 0 & -(\lambda_j + 2\mu_j) & 0 & (\lambda_j + 2\mu_j) \end{bmatrix}$$

.....(4)

ここで、添字の j は j 番目の薄層要素に属する量であることを、添字の e は要素マトリックスであることを示す。また、 h は薄層要素の層厚である。

式(4)に見られるように、マトリックス $[M]_j^e$ 、 $[A]_j^e$ および $[G]_j^e$ は対称であり、マトリックス $[B]_j^e$ は逆対称になっている。こうしたマトリックスの性質は、後述の議論で再び問題となる。

また、式(3)に現れるベクトル $\{u\}$ は変位ベクトルであり、たとえば Fig.1 に示す j 番目の薄層要素を取り出したとき、対応する変位ベクトルの成分は次のようになる。

$$\{u\}_j^e = \{u_{1(j)} \ u_{2(j)} \ u_{1(j+1)} \ u_{2(j+1)}\}^T \dots\dots\dots(5)$$

ここに、右辺の u の括弧の中の添字は、Fig.1 に示す薄

層要素の境界面の番号であり、括弧の外の添字は座標成分を表している。座標成分を示す添字の 1 は水平方向を、2 は鉛直方向を表すことにする。

また、式(3)のベクトル $\{P\}$ は薄層要素の境界面に作用する応力に関連して現れるものである。前述の変位ベクトルと同様に、 j 番目の薄層要素を取り出したとき、対応する成分は次のようになる。

$$\{P\}_j^e = \{\tau_{12(j)} \ \tau_{22(j)} \ -\tau_{12(j+1)} \ -\tau_{22(j+1)}\}^T \dots\dots\dots(6)$$

ここに、 τ は応力を表し、 τ の添字は式(5)の方法にならうものとする。

なお、薄層要素間の変位の連続や応力の釣合、さらに解析モデルの境界条件の設定法に関しても、前論文で示した方法¹⁾に従う。

(3) 薄層要素方程式に対する離散化波数法

ここでは、式(3)の薄層要素方程式に対する離散化波数法を展開する。特に、ここでは衝撃応答を求める手法を展開するので、次の方程式を出発点とする。

$$\left[[M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} - [A] \frac{\partial^2}{\partial x^2} + [B] \frac{\partial}{\partial x} + [G] \right] \{u\} = \delta(t) \delta(x) \{F\} \dots\dots\dots(7)$$

ここに、 δ は Dirac のデルタ関数、 $\{F\}$ は衝撃力の大きさや方向ならびに位置を示すベクトルである。

式(7)に離散化波数法を適用するために、前論文¹⁾で示したように $\delta(x)$ を Fourier 級数で表示する。

$$\delta(x) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-i\xi_n x) \dots\dots\dots(8)$$

ここに、 i は虚数単位であり、 ξ_n は次式で示される。

$$\xi_n = \frac{2\pi n}{L} \dots\dots\dots(9)$$

式(8)および式(9)に現れる L は、デルタ関数の特異点の現れる周期であることに注意する¹⁾。ここでは、式(8)のデルタ関数の特異点の中で、 $x=0$ 以外のものを鏡像ソース点と呼ぶことにする。

式(8)にならう、式(7)の解 $\{u\}$ を次のように Fourier 級数で表示する。

$$\{u(x,t)\} = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{\bar{u}(t)\}_n \exp(-i\xi_n x) \dots\dots\dots(10)$$

ただし、式(10)では、変位ベクトル $\{u\}$ の独立変数を明記し、右辺で時間と空間の変動をどのように考慮しているかを示している。

式(10)および式(8)を式(7)に代入することで次式を得る。

$$\left[[M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} + [H(\xi_n)] \right] \{\bar{u}(t)\}_n = \{F\} \delta(t) \dots\dots\dots(11)$$

ここに、

$$[H(\xi_n)] = \xi_n^2 [A] - i\xi_n [B] + [G] \dots\dots\dots(12)$$

である。

式(12)に見られるように、マトリックス $[H(\xi_n)]$

は複素マトリックスである。しかし、式 (4) に示した薄層要素マトリックスの成分から、Hermite マトリックスであることが分かる。すなわち、マトリックス [A] および [G] が対称マトリックスであることから、[H(ξ_n)] の実部は対称である。また、マトリックス [B] は逆対称マトリックスであることから、[H(ξ_n)] の虚部は逆対称である。

式 (11) にモーダルアナリシスを適用するために、まず次の固有値問題を考える。

$$\lambda_{(n)}^2 [M] \{v\} = [H(\xi_n)] \{v\} \dots\dots\dots (13)$$

ここに、{v} は固有ベクトル、λ_(n)² は固有値である。ただし、λ の添字の (n) は右辺のマトリックスの離散化波数のパラメータ n に対応していることを示している。付録で述べたように [H(ξ_n)] が Hermite マトリックス、[M] が正定値の実対称マトリックスのとき、固有ベクトルは一般に複素数となるものの、固有値は必ず実数である。さらに [H(ξ_n)] が正定値のとき、固有値は必ず正の値を取る。調べたところ、式 (13) の [H(ξ_n)] は正定値であり、従って固有値は必ず正の値である。さらに、固有値が正となることは、その平方根である λ_(n) が実数となることを保証する。このことは、方程式に粘性減衰を考慮していないことにも対応している。

いま、式 (13) の固有値解析からモーダルマトリックスを作成すると、付録よりモーダルマトリックスは次の性質を持つ。

$$\left. \begin{aligned} [V]^* [M] [V]_n &= [E] \\ [V]^* [H(\xi_n)] [V]_n &= [\gamma]_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ここに、[V] はモーダルマトリックスであり、[V] の添字の n は離散化波数のパラメータ n に関連していることを、添字の * は随伴マトリックスであることを示す。また、[E] は単位マトリックス、[γ]_n は、固有値を成分とする対角マトリックスで次式で示される。

$$[\gamma]_n = \text{diag} \cdot [\lambda_{(n)}^2, \lambda_{(n)}^2, \dots, \lambda_{(n)}^2] \dots\dots\dots (15)$$

ここに、λ の括弧の外の添字は、固有値の次数を表している。

モーダルマトリックスを用いて、式 (11) の解を次のように表す。

$$\{u(t)\}_n = [V]_n [\alpha(t)]_n \dots\dots\dots (16)$$

ここに、{α(t)} は未定係数である。

式 (11) の両辺に左から [V]^{*} を乗じ、式 (14) および式 (16) を用いることで、{α(t)}_n に関する方程式が次のように得られる。

$$[L]_n \{\alpha(t)\}_n = [V]^* \{F\} \delta(t) \dots\dots\dots (17)$$

ここに、[L]_n は、次式で示される。

$$[L]_n = \text{diag} \cdot \left[\frac{d^2}{dt^2} + \lambda_{(n)}^2, \dots, \frac{d^2}{dt^2} + \lambda_{(n)}^2 \right] \dots\dots\dots (18)$$

式 (17) の方程式は、{α(t)}_n の各成分について非連成

化されている。この方程式を因果性⁴⁾を満足するように解けば、次式を得る。

$$\{\alpha(t)\}_n = [A(t)]_n [V]^* \{F\} \theta(t) \dots\dots\dots (19)$$

ここに、θ(t) は単位段階関数であり、[A(t)]_n は次式で示される。

$$[A(t)]_n = \text{diag} \cdot \left[\frac{\sin \lambda_{1(n)} t}{\lambda_{1(n)}}, \dots, \frac{\sin \lambda_{M(n)} t}{\lambda_{M(n)}} \right] \dots\dots\dots (20)$$

式 (16) と式 (19) を用いることで、{u(t)}_n を次のように表すことができる。

$$\{\hat{u}(t)\}_n = [V]_n [A(t)]_n [V]^* \{F\} \theta(t) \dots\dots\dots (21)$$

さらに、式 (10) を用いることで、インパルス応答が次のように計算される。

$$\{u(x,t)\} = \frac{\theta(t)}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [V]_n [A(t)]_n [V]^* \{F\} \exp(-i\xi_n x) \dots\dots\dots (22)$$

ところで、付録によりモーダルマトリックスには、次の性質がある。

$$[V]_{-n} = [\bar{V}]_n \dots\dots\dots (23)$$

ここに、[V]_{-n} は、[V]_n の複素共役を示す。この性質は、離散化波数のパラメータの符号を反転させたときのモーダルマトリックスは、元のモーダルマトリックスの複素共役をとることに相当することを意味する。式 (23) で示したモーダルマトリックスの性質のために、式 (22) の級数は実数となることが保証される。すなわち、式 (23) を考慮したときの、インパルス応答を表す式 (22) は次のように表される。

$$\{u(x,t)\} = \frac{\theta(t)}{L} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \text{Re} [[Z(t)]_n \exp(-i\xi_n x)] \{F\} \dots\dots\dots (24)$$

ここに、

$$[Z(t)]_n = [V]_n [A(t)]_n [V]^* \dots\dots\dots (25)$$

であり、式 (24) の Re は複素数の実部をとることを意味する。また、ε_n は Neumann 因子で、次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 &= 1 \\ \varepsilon_n &= 2 \quad (n \neq 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

以上の展開を振り返ると、面内波動場における薄層要素-離散化波数法の展開の流れは、本質的に面外波動場での展開と変わらないと言える。すなわち、面外波動場と面内波動場での理論展開の主要な共通点は、どちらも波動方程式を薄層要素法で記述し、その方程式に対して離散化波数法を適用する点である。また、離散化波数法を適用した方程式を因果性を満足するように、モーダルアナリシスを用いて解くことも重要な共通点である。

一方、面外波動場と面内波動場での理論展開での相違点は、得られたマトリックスの性質の違いにある。すなわち、先の論文で示したように面外波動場での理論展開で得られたマトリックスは、正定値の実対称なマトリッ

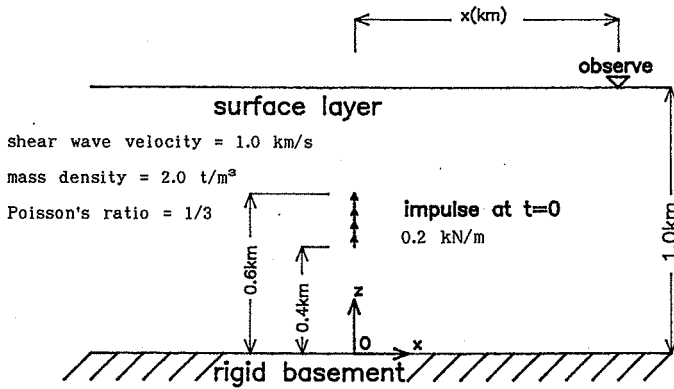


Fig.2 Analyzed model

クスであった。一方、面内波動場では、正定値ではあるが、Hermiteマトリックスと呼ばれる複素マトリックスが得られる。そして、こうした点にRayleigh波とLove波の違いが現れているとも言える。

先の論文にも示したが、Love波のモードの重ね合わせによるインパルス応答は次のように表された。

$$\{u(x,t)\} = \frac{\theta(t)}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n [V]_n [\Lambda(t)] [V]_n^T \cos \xi_n x (F) \dots\dots\dots (27)$$

このように、式の形そのものはRayleigh波の場合と変わらないが、空間変動を表す関数は $\cos \xi_n x$ で規定され、モーダルマトリックスを含め、ここに複素数は現れてこない。一方、Rayleigh波の場合には、式(24)に示すように、インパルス応答を表すのに複素数を必要とする。これは、Rayleigh波が上下と水平の2方向の振動成分を持ち、これらの振動成分の位相が異なる性質を有するためである。このために、Rayleigh波の問題では、水平成分と上下成分の振動を統一的にあらわすために複素固有ベクトルが必要である。さらに、粘性減衰の無い系では実数の固有値が必要であり、Hermiteマトリックスはこうした背景で現れると理解できる。

3. 数値計算例

前章で展開した手法の妥当性を検証するために、式(24)を用いた数値計算例を示す。数値計算を行うに際しての、Hermiteマトリックスの固有値計算手法には、文献で示されたソースライブラリー⁵⁾を用いることにする。また、このソースライブラリーを適用するために、式(13)のマトリックス $[M]$ にCholeski分解⁶⁾を施し、式(13)を標準的な固有値問題⁹⁾に変換する。

数値計算モデルをFig.2に示す。ここでは、剛基盤上に厚さ1.0 kmの均質な地盤が水平に堆積したモデルを扱う。ここでは、地盤のせん断速度を1.0 km/s、ポアソン比を1/3とする。また、堆積層は薄層要素で10層に均等に分割する。衝撃力は、鉛直方向に地中に線状に

分布させたものを用いる。すなわち、Fig.2に示すように、400 mから600 mの深さに、0.2 kN/mの大ききで鉛直方向上向きの衝撃力を分布させる。

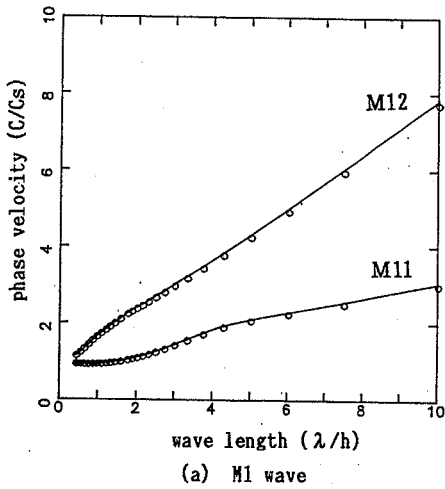
(1) 固有値解析の精度

インパルス応答結果を示す前に、前述の薄層要素-離散化波数法で、離散化波数に対応したRayleigh波の振動数が正確に求められているかどうか検討しておく。ここでは、固有値解析結果とRayleigh波の特性方程式⁷⁾の解を比較することでこの問題を検討する。検討結果をRayleigh波の分散曲線としてFig.3に示す。Fig.3では、実線が特性方程式の解を、プロットが前述の固有解析の結果を表している。固有解析は、表層地盤を均等に10層に薄層要素分割することで行っている。また、ここでは横軸がRayleigh波の波長を、縦軸がRayleigh波の位相速度を表している。Fig.3ではRayleigh波のモードのうちM11波からM22波まで示しているが、固有値解析結果はRayleigh波の特性方程式の解と良い一致を示している。したがって、前述の薄層要素-離散化波数法による弾性波動方程式の離散化の妥当性が結論できる。

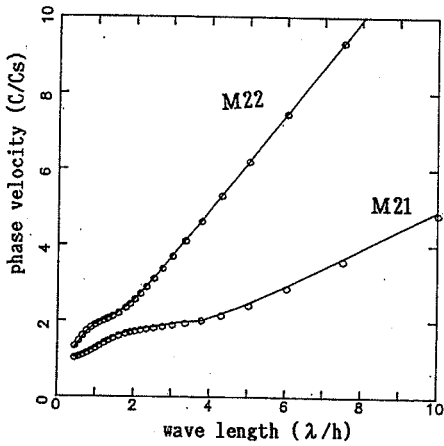
また、問題となるRayleigh波の特性方程式は非常に複雑な形式であり、しかも非線形の方程式である。したがって、この方程式を直接解くよりも、本論文で展開した手法を用いて固有値解析を行う方が、簡便であると同時に、多数のモードを一度に求められる点でも有利と思われる。

(2) インパルス応答結果に与える離散化波数の級数の打ち切りの検討

次に、インパルス応答を計算するにあたり、離散化波数の級数の打ち切り誤差の影響について調べてみる。先のLove波を扱った論文¹⁾では、せん断速度1.0 km/sの地盤に対し、 $L=15$ kmとしたとき、離散化波数の級数を40項で打ち切れば、ほぼ良好な解が得られている。ここでは、この結果を参考に $L=30$ kmとし、離散化波数の級数を80項で打ち切ってみる。 L の大きさをLove波を扱った論文での値の2倍としたのは、ここでのP



(a) M1 wave



(b) M2 wave

— characteristic equation
 ○ eigen value analysis

Cs: shear wave velocity
 h: Thickness of the layer

Fig.3 Dispersion property of Rayleigh wave

波の速度がS波の速度の2倍であり、式(8)のデルタ関数の鏡像ソース点で発生したP波の影響が解析結果に現れないようにするためである。また、これに伴い離散化波数の級数の打ち切り項数もLove波の解析時の2倍となる。この条件での解析結果と比較するため、離散化波数の級数を60項ならびに100項で打ち切った場合の結果を合わせて示す。これらの解析では、やはり $L=30$ kmとしている。また、表層地盤は薄層要素で10層に均等に分割することにする。

解析結果のうち、震源からの水平距離が3.0 kmの地表面で観測した鉛直方向変位に関する解析結果を Fig.4 に示す。Fig.4 によれば、細かな点を除けば、打ち切り項数にかかわらず、ほぼ同一の波形が得られていると言える。しかし、波形の細かな点を観察すれば、級数の打

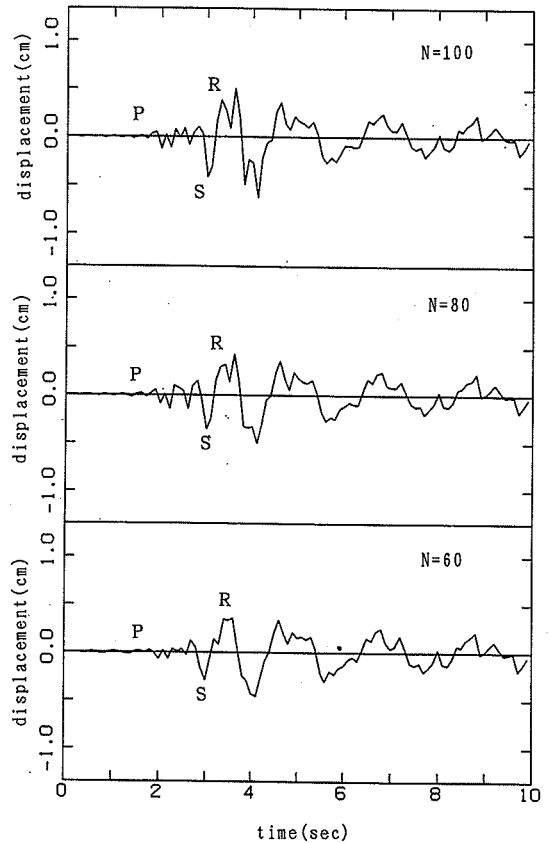


Fig.4 Effects of truncation of series (vertical displacement : $x=3.0$ km)

ち切りを60項とした場合の波形は、打ち切り項数を80項ならびに100項とした場合の波形に比べ、やや収束の度合いが悪くなっていることがわかる。このことから、ある程度波形の細かいところまで考察するためには、級数は80項程度まで重ね合わせるべきと思われる。

なお、Fig.4 に示されたインパルス応答時刻歴についての若干の考察を行っておく。前述のように、P波の速度は2.0 km/sで、震源と観測点との水平距離が3.0 kmであるから、応答時刻歴に現れている時刻1.5秒付近で始まる振幅の小さな波動はP波によるものであると考えられる。また、時刻3秒で現れる振幅の大きな波動はS波が到達したためのものであると考えられる。さらに、S波が到達した後に続く振幅の大きな波動はRayleigh波によるものであると考えられる。Fig.4 には、時刻歴の中にこれらの波動の種類を記号P, S, Rで記述している。

このようにみると、ここで得られたインパルス応答は剛基盤上の水平地盤の振動性状を良く説明したものであり、計算手法の妥当性が示されていると考えられる。

(3) インパルス応答解析結果の他の解析手法との比較

次に、インパルス応答解析結果を他の解析手法の結果と比較することで、本論文で展開した手法の妥当性を確認する。Fig.2で示したモデルのインパルス応答については、解析解を閉じた形で得ることはきわめて難しい。調べたところ、Ohmach⁵⁾らが、振動論的なアプローチでRayleigh波の固有関数ならびにこれを用いたインパルス応答を求める手法を展開していたので、ここでは彼らの方法による結果と比較することにする。離散化波数の級数の打ち切りを $N=80$ として、Ohmachらの方法による結果との比較を行った結果をFig.5に示す。解析結果は、震源と観測点の水平距離が3.0 kmの地表面上での鉛直方向の変位時刻歴について示す。これによると、本手法による結果とOhmachらの手法の結果はほぼ良好に一致しているものと言える。そして、こうした点からも本手法の妥当性が結論できるものと思われる。ただし、Ohmachらの手法による結果は、観測点に波動が到着する以前からノイズから混入して振動が始まっているようである。Ohmachらは、表面波モード形状を解析的に提示しているが、解析的に提示された表面波モード形状は、特性方程式を解いた時の解のわずかな誤差に対して敏感に変化し、これが時刻歴での誤差となって現れるようである。

(4) 地表面を伝播する波動の特徴

最後に、インパルス応答が地表面をどのように伝播して行くかについて調べることにする。まず、震源からの水平距離が、5.0 kmと7.0 kmの位置にある地表面上の鉛直方向の変位をFig.6およびFig.7に示す。ここでは、波動の伝播速度と震源からの距離に基づいて、図中にP波とS波の振動と見られるものに、それぞれPとSの記号をつけた。また、震源にインパルスを考えていることから、S波の次に現れる大きな振幅の振動をRayleigh波と考え記号Rをつけた。

震源からの水平距離が3.0 kmのときの時刻歴Fig.5と合わせてこれらの時刻歴を観察すると、波形そのものは場所によってかなり違った様相を示している。このことは、波動の分散性が反映しているものと考えられる。

次に、いわゆる実体波とされるP波やS波の振幅の場所による変化について調べてみる。Fig.5ならびにFig.6、Fig.7を観察すると、震源から離れるに従い実体波の振幅は減衰してゆくことが認められる。この原因のひとつには、実体波が基盤と地表面を反射しながら伝播してゆく過程で、干渉を受け減衰するためであると考えられる。弾性波動に関するテキスト⁸⁾では、Love波の生成のメカニズムを波動の増幅的干渉に基づき説明しているが、Rayleigh波の生成に関しても同様の説明が可能であると思われる。こうした意味で、Rayleigh波は、地盤の固有振動に関連した振動であり、伝播の過程で干渉を受けることがない波動であると考えられる。

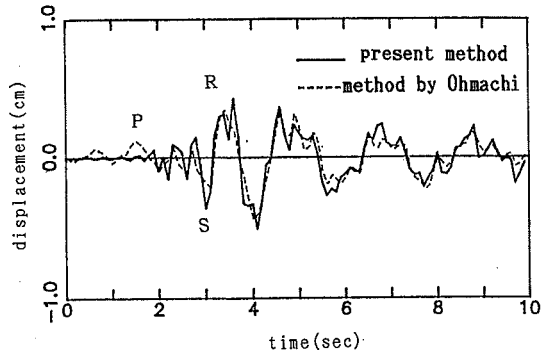


Fig.5 Comparison of displacement (vertical displacement : $x = 3.0 \text{ km}$)

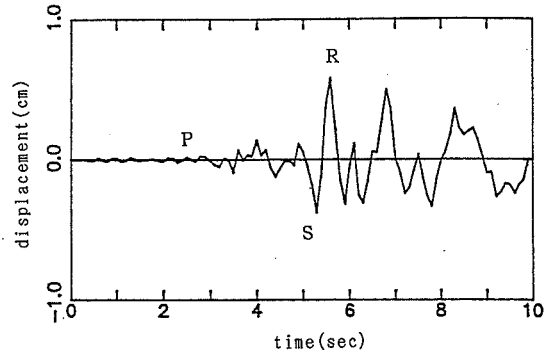


Fig.6 Time history of vertical displacement ($x=5.0 \text{ km}$)

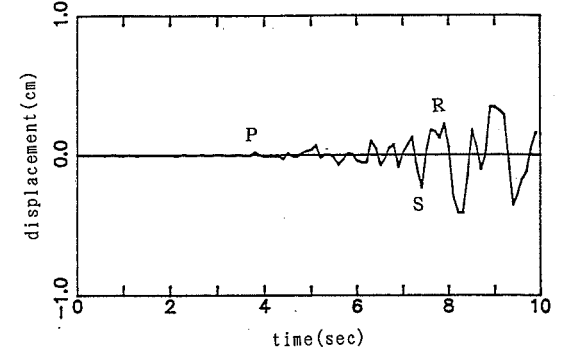


Fig.7 Time history of vertical displacement ($x=7.0 \text{ km}$)

この問題を詳しく見るために、全地表面上での鉛直変位時刻歴をFig.8に示す。この図によると、ひとつのパルス状の卓越した波動が震源から伝播して行くのが見られる。このパルス状の波動は伝播とともに減衰しない。さらに、これまでに示した時刻歴を参照することで、この波動はRayleigh波であることが推測される。

このようにRayleigh波は、全体としては、減衰せずにパルス状の波形を保ちながら、伝播するものと考えられる。しかし、個々の時刻歴の波形(Fig.5 Fig.7)を見るかぎりRayleigh波は場所によりかなり波形を変えている。これは、成層地盤を伝播する波動であっても、場合によっては複雑な挙動を示すことを示唆しているも

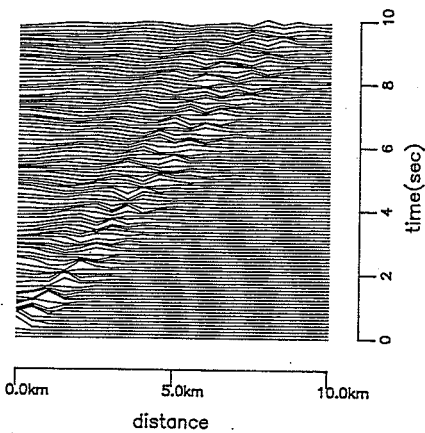


Fig. 8 Vertical displacement on the surface

のと考えられる。

以上で、鉛直方向に作用するインパルスによる地表面の鉛直変位時刻歴を考察してきた。ここでは、式(24)に示したように表面波モードの重ね合わせでインパルス応答を表現した。このように、表面波のモードを重ね合わせるという意味で、得られる応答は表面波とも考えられる。しかし、表面波モードは式(13)の固有値解析から得られる固有ベクトルであり、固有ベクトルは、固有値問題が定義されたベクトル空間での基底である。この基底の重ね合わせで、方程式の解が表現されることを考えれば、表面波モードの重ね合わせで、あらゆる波動が表現できることになる。そして、実体波に関する議論も表面波モードの重ね合わせで可能となる。この観点から、若干ではあるが、解析モデルを伝播するP波とS波の振幅の減衰に関する考察を行った。

4. 結 論

本論文では、時間領域での薄層要素—離散化波数法による水平成層地盤の衝撃応答解析手法を展開した。扱った方程式は、二次元の面内波動場の方程式であり、表面波はRayleigh波が問題となる。ここでは、手法の展開過程を通して、先の論文で示したLove波の問題とも比較・考察を行った。また、本手法で得られたインパルス応答は、他の方法による結果と良好に一致し、本手法の妥当性が結論づけられたと考えられる。手法の展開過程ならびに数値計算結果から得られる結論をまとめると、次のようになる。

- (1) 本論文で展開した手法の特徴は、時間領域の波動方程式に直接薄層要素法と離散化波数法を適用し、モーダルアナリシスで時間領域の解を得る点にある。
- (2) 二次元の面内波動場の方程式に本手法を適用すると、Hermiteマトリックスの固有値問題が現れる。先の論文で示したLove波の問題が実対称マトリックスの固

有値問題に帰着されることを考えると、こうした点にLove波とRayleigh波の違いが現れる。

(3) Rayleigh波の振動成分は上下成分と水平成分に分解され、これらの振動の位相は互いに90°ずれていることが知られている。このために、Rayleigh波のモードをひとつの数式で表現するためには、複素固有ベクトルが必要である。また非減衰の二次元の媒質ではRayleigh波が減衰せず、このために固有値は実数となる必要がある。Hermiteマトリックスの固有値問題がRayleigh波を扱う上で現れるのは、こうした理由がある。

(4) 本手法で得られたインパルス応答によれば、実体波と考えられる波動は、波動の進行とともに減衰してゆく。しかし、Rayleigh波は減衰せず、卓越した波形を保ちながら、地表面を伝播してゆく。

付録 固有値問題 $\lambda[M]\{v\}=[H]\{v\}$ について

ここでは、次式で与えられる固有値問題について考察を行う。

$$\lambda[M]\{v\}=[H]\{v\} \dots\dots\dots (A.1)$$

ここに、 $[M]$ は実対称の正定値マトリックス、 $[H]$ は正定値Hermiteマトリックスであるとする。通常の線形代数学のテキストでは、Hermiteマトリックスの固有値問題として、次式で与えられるものを扱っている。

$$\lambda\{v\}=[H]\{v\} \dots\dots\dots (A.2)$$

したがって、式(A.1)の固有値問題と式(A.2)の固有値問題との違いを考察することがここでの課題である。

マトリックス $[M]$ は実対称の正定値マトリックスであるから、次のようにCholeski分解⁹⁾が可能である。

$$[M]=[U]^T[U] \dots\dots\dots (A.3)$$

ここに、 $[U]$ は右上三角マトリックスである。このマトリックス $[U]$ を用いて、式(A.1)の固有ベクトルに次の変換を施す。

$$\{x\}=[U]\{v\} \dots\dots\dots (A.4)$$

ベクトル $\{X\}$ を用いて式(A.1)を表すと次の固有値問題が得られる。

$$\lambda\{x\}=[H_u]\{x\} \dots\dots\dots (A.5)$$

ここに、

$$[H_u]=[U]^{-1}T[H][U]^{-1} \dots\dots\dots (A.6)$$

式(A.6)より、マトリックス $[H_u]$ はHermiteマトリックスである。また、式(A.5)と式(A.1)の固有値は等しい。したがって、式(A.1)を式(A.2)のタイプの固有値問題に帰着させることができる。したがって、式(A.1)の固有値は実数である一方、固有ベクトルは複素数である。

残された主な問題は、式(A.1)の固有ベクトルの直交性がどのように表現されるかの点である。

まず、式 (A.5) の固有値解析によって、モーダルマトリックス $[X]$ を作成する。このモーダルマトリックスは、ユニタリマトリックスである。すなわち、

$$[X]^*[X]=[E] \dots\dots\dots (A.7)$$

さらに、 $[X]$ は次の性質がある。

$$[X]^*[H_n][X]=[A] \dots\dots\dots (A.8)$$

ここに、 $[A]$ は固有値を成分とする対角マトリックスである。いま、式 (A.4) で示される変換の逆変換で、式 (A.1) に対するモーダルマトリックス $[V]$ を次のように作成する。

$$[V]=[U]^{-1}[X] \dots\dots\dots (A.9)$$

式 (A.7) および式 (A.8) を式 (A.9) で定義された $[V]$ で表すと次式を得る。

$$[V]^*[M][V]=[E] \dots\dots\dots (A.10)$$

$$[V]^*[H][V]=[A] \dots\dots\dots (A.11)$$

このように、式 (A.1) の固有値解析から得られるモーダルマトリックスは、 $[M]$ と $[H]$ をはさんだ形で直交性を示す。したがって、 $[H]$ が正定値の場合、式 (A.11) より固有値は必ず、正の値となることが理解できる。

なお、周知のように固有値問題によっては、マトリックスが対角化されない場合もある。ここでは、暗黙の内に式 (A.5) のマトリックスが対角化されることを前提としてきたが、これは Hermite マトリックスが正規マトリックス⁹⁾であり、必ず対角化されることを用いている。したがって、式 (A.5) のマトリックスが対角化されることから、式 (A.1) のマトリックスも式 (A.10) および式 (A.11) の形で必ず対角化可能となる。

また、式 (A.1) から得られる固有ベクトルは、本文では表面波モードに相当する。この表面波モードによって、式 (A.10) ならびに式 (A.11) に示すようにマトリックスが対角化されることは、表面波モードが与えられたベクトル空間で基底の役割をしていることを示す。表面波モードの重ね合わせで、あらゆる波動を議論することが可能となる数学的な根拠はこのように点に見ることができる。

最後に、式 (A.1) の固有値問題と関連して、次の固有値問題を考える。

固有値問題を考える。

$$\lambda'[M]\{v\}'=[\bar{H}]\{v\}' \dots\dots\dots (A.12)$$

ここに、マトリックスの上の記号“—”は複素共役であることを示し、固有値および固有ベクトルの添字のダッシュは式 (A.1) と区別するために用いた。

式 (A.12) の固有値問題は、本文の式 (23) を得るために必要である。すなわち、離散化波数のパラメータ n の符号を反転させたとき、式 (A.1) に対して式 (A.12) を検討する必要がある。

式 (A.12) の両辺の複素共役をとると、次式を得る。

$$\bar{\lambda}'[M]\{\bar{v}\}'=[H]\{\bar{v}\}' \dots\dots\dots (A.13)$$

式 (A.13) の固有値が実数であることと、式 (A.1) との比較により、

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \lambda' \\ \{v\} &= \{\bar{v}\}' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.14)$$

を得る。すなわち、式 (A.1) と式 (A.12) の固有値問題を比較すると、固有値は等しく、固有ベクトルは互いに複素共役の関係にあることが分かる。

参 考 文 献

- 1) 東平光生：離散化波数法と薄層要素法を組み合わせた成層弾性体の面外波動場での衝撃応答解析手法，土木学会論文集，No. 461/I-21, pp.119~128, 1993年1月。
- 2) Lysmer, J. and Drake, J. A. : A finite element method for seismology method in seismological physics, Academic Press, 1973.
- 3) Bouchon, M. and Aki, K. : Discrete wave number representation of seismic source wave fields, Bull., Seis., Soc., Am., Vol.67, No.2, pp.259~277.
- 4) 今村 勤：物理と Green 関数，岩波全書。
- 5) 渡部・名取・小国：数値解析と Fortran 第3版，丸善，1983。
- 6) 戸川準人：有限要素法による振動解析，サイエンス社。
- 7) Ohmachi, T. and Hasumi, A. : Generation of Rayleigh waves due to impulsive response of a finite elastic layer on a rigid basement, Structural Eng./Earth. Eng. Vol.7 No.1, pp.159~167, April 1990.
- 8) 佐藤泰夫：弾性波動論，岩波書店。
- 9) 志賀浩二：固有値問題 30講 (数学30講シリーズ)，朝倉書店，1991。

(1992.6.15 受付)

IMPULSIVE RESPONSE OF AN ELASTIC LAYERED MEDIUM IN THE IN-PLANE WAVE FIELD BASED ON A THIN-LAYERED ELEMENT AND DISCRETE WAVE NUMBER METHOD

Terumi TOUHEI

Impulsive response of an elastic layered medium in the in-plane wave field is presented. The procedure for calculating the impulsive response is based on a thin-layered element and discrete wave number method. The elastic wave equation is transformed into an ordinary differential equation by the thin-layered element and discrete wave number method, and an Hermitian matrix appears in the equation. The impulsive responses can be calculated by superposing the eigensolutions of the ordinary differential equation. From the numerical calculations and process of the formulation, the vibration characteristics of the surface layer on the rigid basement are investigated.