

マルチプル同調質量ダンパー(MTMD)の性能評価式

阿部雅人*・藤野陽三**

多数個の同調質量ダンパー (TMD) の固有振動数を制振対象の構造物の固有振動数のまわりのあるバンド幅に分布させたマルチプル TMD (MTMD) の性能を, TMD の減衰の影響を考慮したモード特性の摂動解に基づいて検討した。そして, MTMD の各種外力に対する性能評価式を, 簡単な場な形で求め, その有効性を数値解との比較によって示した。さらに, 性能評価式に基づいて, MTMD の設計変数の最適値を提案した。

Key Words: tuned mass damper, multiple tuned mass dampers, perturbation solutions, optimal design

1. はじめに

構造物の振動制御にあたって, 制振対象構造物の固有振動数まわりに固有振動数を分布させた多数個からなる同調質量ダンパー (TMD) を用いる方法 (マルチプル TMD-MTMD, Fig.1) が提案され, その有効性が指摘されている^{1)~4)}。MTMD の最大の特徴は, 単一の TMD (本論では Single TMD-STMD と呼ぶ) を用いる場合に比べ, TMD の同調比に誤差があっても性能が低下しにくくなること (ロバスト性が高い) である。また, 同じ総質量をもつ STMD よりも MTMD の方が高い性能を示すことも指摘されている。

TMD (あるいは TLD) などの同調系パッシブダンパーは種々の制約から多数個設置せざるをえない場合があり, MTMD の考え方の適用は工学的に意味のあるものと考えられる。

定常ランダム外力に対する MTMD の性能は, 個々の TMD の減衰, 固有振動数の幅, 同調比などに対して鈍いといわれている¹⁾。しかし, 調和外力を対象とした最近の研究^{3),4)}によれば, 鈍いとはいうもののその性能は各種パラメータの影響を受けることが明らかになっている。すなわち, MTMD を使う場合にも“設計”が必要ということである。文献 3), 4) をはじめ, いずれも数値シミュレーションによるもので, MTMD の設計値を選ぶ立場からは必ずしも解答をえるものではない。本論文は, MTMD の工学的設計という視点に立って展開する。

著者らは文献 5) において, MTMD の減衰が低いときに特に有効であることに着目して, 減衰を無視して,

* 学生会員 工修 東京大学大学院 土木工学専攻 (現在米国ノースウェスタン大学留学中)

** 正会員 Ph.D 東京大学土木工学科 教授 (〒113 東京都文京区本郷 7-3-1)

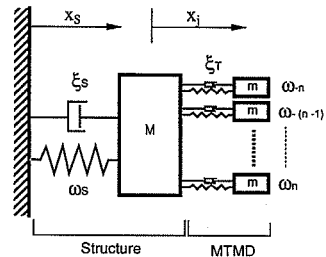


Fig.1 MTMD-structure system

MTMD—構造物系のモード固有値の摂動解を求め, それに基づいて MTMD の基本的特性について考察を行った。MTMD では, すべての固有振動モードにすべての TMD が寄与しているときに性能が高いことを示し, さらに, それに基づいて MTMD の固有振動数の最適バンド幅, および振動数に関するロバスト性の目安を求めた。しかし, そこでは, MTMD の制振性能の定量的評価を示すに至っていない。

本論文では, 個々の TMD の減衰を考慮した摂動法を展開し, MTMD の性能評価式, 及び最適設計パラメータを, 自由振動 (モード減衰), 自励力, 調和外力に対してそれぞれ求める。また, MTMD の振幅についても評価式をもとめる。最終的に, 文献 5) の結果とあわせて, MTMD の設計式をまとめて示す。

2. 運動方程式と周波数応答関数⁵⁾

ここで対象とする MTMD—構造物系を Fig.1 に示す。

実際の構造物は一般に分布質量系であり, 無限個のモードを有する。ただし, 制振の対象となる振動モードは 1 つであるとして, ここでは構造物を 1 自由度系としてモデル化した。なお, 対象するモードに近接して他のモードがない場合にはこの定式化で TMD の制振効果

を議論できることが文献6)により明らかにされている。

Fig.1において添字のSは構造物, j ($= -n, \dots, j, \dots, n$) は, j 番目のTMDを表す。Mは構造物のモード質量, m は個々のTMDの質量である。簡単のため各TMDの減衰 ξ_T , ならびに質量 m は均一とする。

厳密に言えばモード質量Mは, TMDが設置される場所の変位を1として正規化したモード形により定義される。本論ではMTMDは構造物の同一箇所に数多く設置できるという前提で考えている。現実には収納スペースの制約から, モード振幅の異なる所に分散配置せざるを得ない場合もあると考えられる。このとき, 個々のTMDの質量が同じであっても一般化質量の上では異なってくる。ここでの定式化はTMDの一般化質量が等しいという条件で展開していることを改めて注意しておく。設置位置が異なる場合もモード振幅を考慮してTMDの質量を調節すれば, TMDの一般化質量も等しく m にすることは全く可能である。

TMDの個数 N ($=2n+1$)は奇数とする。各TMDの固有振動数は, 中心のTMDの固有振動数 ω_0 について対称で, 等間隔であるとする。すなわち,

$$\omega_j = \omega_0(1+j\beta) \quad (j = -n, \dots, 0, \dots, n) \quad (1)$$

中心のTMDの固有振動数 ω_0 と, 構造物の固有振動数 ω_s の関係は,

$$\omega_0 = \omega_s(1+\beta_0) \quad (2)$$

とし, β_0 をオフセットと呼ぶことにする。また, TMDの固有振動数の分布しているバンド幅 B を

$$B = (\omega_n - \omega_{-n})/\omega_0 \quad (3)$$

と定義する。このとき, 個々のTMDの固有振動数間隔を示すパラメータ β との関係は,

$$\beta = B/(N-1) = B/(2n) \quad (4)$$

MTMD-構造物系の運動方程式は,

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F \quad (5)$$

ここに, $X = [x_s, x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_n]^T$

$$M = \begin{bmatrix} M+N \cdot m & m \cdots m \\ \vdots & m \cdots 0 \\ \vdots & \vdots \\ m & 0 & m \end{bmatrix}$$

$$C = \text{diag}(2M\xi_s\omega_s, 2m\xi_T\omega_{-n}, 2m\xi_T\omega_{-n+1}, \dots, 2m\xi_T\omega_n)$$

$$K = \text{diag}(M\omega_s^2, m\omega_{-n}^2, m\omega_{-n+1}^2, \dots, m\omega_n^2)$$

$$F = [f(t), 0, 0, \dots, 0]^T$$

と表せる。ただし, TMDの変位座標 $[x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_n]$ は, 構造物の変位 x_s に関する相対座標である。

なお, MTMDの総質量 m_{total} , 総質量比 μ_{total} , 個々のTMDの質量比 μ , ならびに質量比のバンド幅あたりの密度 ρ を, 以下のように定義する。

$$m_{\text{total}} = N \cdot n, \quad \mu_{\text{total}} = m_{\text{total}}/M \quad (6), (7)$$

$$\mu = m/M, \quad \rho = \mu_{\text{total}}/B \approx \mu/\beta \quad (8), (9)$$

この系の特性方程式は, 固有値を λ とおくと,

$$[\omega_s^2 - (1 + \mu_{\text{total}})\lambda^2 + 2i\xi_s\omega_s] \prod_{j=-n}^n [\omega_j^2 - \lambda^2 + 2i\xi_T\omega_j\lambda] - \sum_{j=-n}^n \mu\lambda^4 \prod_{\substack{k=-n \\ k \neq j}}^n [\omega_k^2 - \lambda^2 + 2i\xi_T\omega_k\lambda] = 0 \quad (10)$$

となる⁵⁾。便宜上, 特性方程式を ω_0 について対称な形にして振動法を適用しやすくするために, 以下の検討では, 中心の振動数を

$$\omega_0 = \omega_s \sqrt{1 + \mu_{\text{total}}} \quad (11)$$

とおくことにす。文献5)に示したように, MTMDでは, 振動数に対するロバスト性が高いので, この設定によって議論の一般性が失われることはない。このとき, 特性方程式は,

$$(1 + \mu_{\text{total}}) \left[\omega_0^2 - \lambda^2 + \frac{2i\xi_s\omega_s}{1 + \mu_{\text{total}}} \right] - \sum_{j=-n}^n \frac{\mu\lambda^4}{\omega_j^2 - \lambda^2 + 2i\xi_T\omega_j\lambda} = 0 \quad (12)$$

なお, j 番目固有値が a_j, b_j を実数として,

$$\lambda_j = a_j + ib_j \quad (13)$$

と表わせるときに, 対応するモードの固有振動数 ω_j^* と減衰定数 ξ_j^* を

$$\omega_j^* = \sqrt{a_j^2 + b_j^2}, \quad \xi_j^* = -a_j/\sqrt{a_j^2 + b_j^2} \quad (14a, b)$$

と定義する。

この系に調和外力 $F = [1, 0, 0, \dots, 0]^T \cdot e^{i\omega t}$ が働くときの構造物の周波数応答関数 $H(\omega)$ は,

$$H(\omega) = \begin{bmatrix} h_s(\omega) \\ h_{-n}(\omega) \\ \vdots \\ h_n(\omega) \end{bmatrix} = \frac{\prod_{j=-n}^n g_j}{\text{Det}[-\omega^2 M + i\omega C + K]} \begin{bmatrix} 1 \\ -L \\ g_{-n} \\ \vdots \\ -L \\ g_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

となる⁵⁾。ただし,

$$G = -(M + m_{\text{total}}) \cdot \omega^2 + 2M\xi_s\omega_s \cdot i\omega + M\omega_s^2$$

$$L = -m \cdot \omega^2, \quad g_j = -m \cdot \omega^2 + 2m\xi_T\omega_j \cdot i\omega + m\omega_j^2$$

$$\text{Det}[-\omega^2 M + i\omega C + K] = G \prod_{j=-n}^n g_j - \sum_{k=-n}^n \left(L^2 \cdot \prod_{j \neq k} g_j \right)$$

3. モード減衰

自由振動に対して高い制振効果を得るためには, すべてのモードが高いモード減衰をもっている必要がある。すなわち, もっとも値の低いモード減衰が問題になる。

Fig.2に減衰 $\xi_s = 0$ の構造物に, 総質量比 $\mu_{\text{total}} = 0.01$, バンド幅 $B = 0.2$, 個数 $N = 11$ のMTMDを設置した場合のモード特性と, 対応する質量比 $\mu_{\text{total}} = 0.01$, 固有振動数 ω_T が最適条件^{6), 7)},

$$\omega_T = \omega_s / (1 + \mu_{\text{total}}) \quad (16)$$

を満たすSTMDを設置した場合のモード特性を対比し

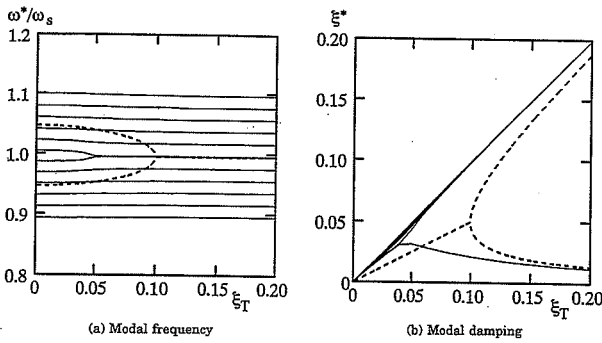


Fig.2 Modal properties of 11 MTMD ($\mu_{total}=0.01, B=0.2$)
 ——— 11 MTMD, - - - - - STMD ($\omega_T=optimal$)

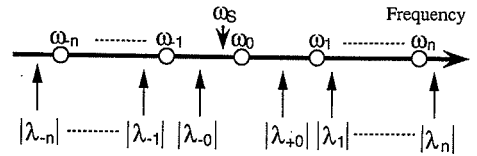


Fig.3 Definition of the order of eigenvalues

て示した。いずれも複素固有値解析による数値計算結果である。特徴的なのはFig.2(b)のモード減衰において、MTMDが低い減衰 ξ_T のもとでSTMDより高い値を得ていることである。しかし、減衰 ξ_T が高い領域では、STMDの方が有利になっている。このことは、MTMDがとくに低い減衰で有効であるという、調和外力が働く際の計算結果^{3),4)}と整合している。ここでは、MTMDのモード減衰を摂動法によって陽な形で求め、モード減衰に関する性能評価式を提案し、その最適化を論じる。

(1) 固有値の摂動解

建設系構造物へMTMDを適用した際のことを考えて、各パラメータのオーダーを以下のように摂動法を適用し、モード特性の陽な解を導く。ただし、 ϵ は摂動を表す。

$$O(n\beta^2) \approx O(j\beta^2) \approx O(\beta) \approx O(\mu_{total}) \approx O(\xi_s^2) \approx O(\xi_T^2) \approx O(\epsilon) \ll 1 \dots (17)$$

また、特性方程式(10)の形から考えて、 k 番目固有値 λ_k の1次近似解を、

$$\lambda_k = i\xi_T \omega_k + \omega_k + \epsilon \omega_0 \dots (18)$$

とおくと、対応するモード振動数 ω_k^* 及び減衰 ξ_k^* は、

$$\omega_k^* = \omega_k + Re(\epsilon \omega_0), \quad \xi_k^* = \{\xi_T \omega_k + Im(\epsilon \omega_0)\} / \omega_k^* \dots (19a, b)$$

となる。ただし、 Re は実部、 Im は虚部を表す。TMDが $N (=2n+1)$ 個の場合を検討しているので、全体としては $N+1$ 個の固有値が存在する、そこで、Fig.3に示したとおり、TMDの固有振動数と固有値の対応をはっきりさせるために、変則的ではあるが、

$$k = -n, \dots, -0, +0, \dots, n \dots (20)$$

として、0番目を ± 0 に分けて固有値の絶対値(モード固有振動数)の小さい順に並べることにする。以下に、モードごとの場合分けをして固有値およびモード形をもとめる。

a) 中心の2モードの固有値

最初に、中心の2つのモード固有値 $\lambda_{+0}, \lambda_{-0}$ につい

て考える。1次近似解は、

$$\lambda_{\pm 0} = \omega_0(1 + i\xi_T + \epsilon_{\pm 0}) \dots (21)$$

となる。これを特性方程式に代入して、最低次の項のみ残すと、

$$- [2i(\xi_T - \xi_s) + 2\epsilon] - \sum_{j=-n}^n \frac{\mu}{2j\beta - 2\epsilon} = 0 \dots (22)$$

$\epsilon \ll j\beta$ であるとして、

$$\left(2 + \sum_{j=1}^n \frac{\mu}{j^2 \beta^2} \right) \epsilon^2 + 2i(\xi_T - \xi_s)\epsilon - \frac{\mu}{2} = 0 \dots (23)$$

よって、

$$\epsilon_{\pm 0} = \frac{-i(\xi_T - \xi_s) \pm \sqrt{\frac{\mu A}{2} - (\xi_T - \xi_s)^2}}{A} \text{ (複合同順)} \dots (24)$$

ただし、

$$A = 2 + \sum_{j=1}^n \frac{\mu}{j^2 \beta^2} \dots (25)$$

となる。なお、 n が十分に大きいとき($n > 10$ 程度)には、

$$A_{\infty} = 2 + \frac{\pi^2}{6} \frac{\mu}{\beta^2} \dots (26)$$

と近似することができる。

b) 最外郭の2モードの固有値

まず、最大の固有値 λ_n を求める。1次近似解は、

$$\lambda_n = \omega_n(1 + i\xi_T) + \epsilon_n \omega_0 \dots (27)$$

となる。a)と同様に展開して、最低次の項のみ残して整理すると、

$$\left(2 + \sum_{j=1}^{2n} \frac{\mu}{2j^2 \beta^2} \right) \epsilon^2 + \left\{ 2n\beta + 2i(\xi_T - \xi_s) - \sum_{j=1}^{2n} \frac{\mu}{2j\beta} \right\} \epsilon - \frac{\mu}{2} = 0 \dots (28)$$

となる。この2次方程式の2つの解のうち、小さいほうの解は最大の固有値に対応せず、結果的に $n-1$ 番目の固有値 λ_{n-1} に対応しているので、ここでは正記号の解を採用する。したがって、最大の固有値 λ_n は、式(27)において

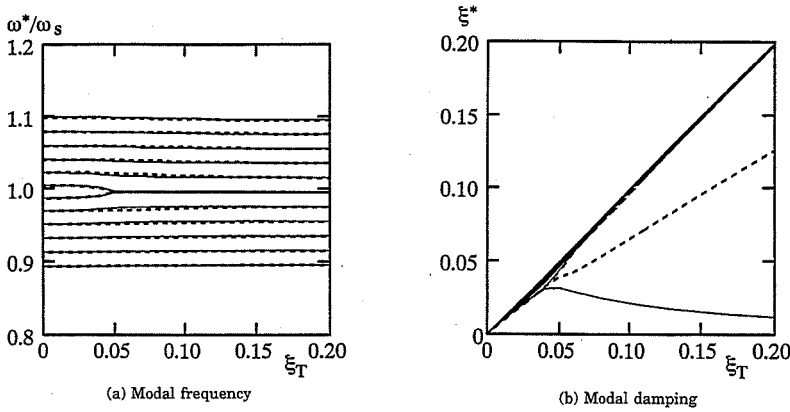


Fig.4 Perturbation solution of modal properties of 11 MTMD ($\mu_{total}=0.01, B=0.2$) ——— exact, - - - - approximate

$$\epsilon_n = \{ -(2n\beta + 2i[\xi_T - \xi_s] - P) + \sqrt{(2n\beta + 2i[\xi_T - \xi_s] - P)^2 + 2\mu(2+Q)} \} / \{ 2(2+Q) \} \dots (29)$$

ただし,

$$P = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\mu}{2j\beta}, \quad Q = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\mu}{2j^2\beta^2} \dots (30a, b)$$

同様に、最小の固有値 λ_{-n} は,

$$\lambda_{-n} = \omega_{-n}(1 + i\xi_T) + \epsilon_{-n}\omega_0 \dots (31)$$

$$\epsilon_{-n} = \{ -(-2n\beta + 2i[\xi_T - \xi_s] + P) - \sqrt{(-2n\beta + 2i[\xi_T - \xi_s] + P)^2 + 2\mu(2+Q)} \} / \{ 2(2+Q) \} \dots (32)$$

と表せる。

c) 一般のモード

この場合、摂動解は式 (18) となり、a), b) と同様な方法で求めることができ、

$k > 0$ のときは、

$$\epsilon_k = \{ -(2k\beta + 2i[\xi_T - \xi_s] - P_1) + \sqrt{(2k\beta + 2i[\xi_T - \xi_s] - P_1)^2 + 2\mu(2+Q_1+Q_2)} \} / \{ 2(2+Q_1+Q_2) \} \dots (33)$$

$k < 0$ のときは、

$$\epsilon_k = \{ -(2k\beta + 2i[\xi_T - \xi_s] + P_1) - \sqrt{(2k\beta + 2i[\xi_T - \xi_s] + P_1)^2 + 2\mu(2+Q_1+Q_2)} \} / \{ 2(2+Q_1+Q_2) \} \dots (34)$$

ただし、

$$P_1 = \sum_{j=n-|k|+1}^{n+|k|} \frac{\mu}{2j\beta}, \quad Q_1 = \sum_{j=n-|k|+1}^{n+|k|} \frac{\mu}{2j^2\beta^2}, \quad Q_2 = \sum_{j=1}^{n-|k|} \frac{\mu}{j^2\beta^2} \dots (35)$$

となる。b) と同様に、解の重複を防ぐために 2 次方程式の解の一方だけを採用している。

(2) 性能評価式

(1) で求めた摂動解を、Fig.2 と同じ 11 MTMD の

例について、Fig.4 に破線で示してある。Fig.4 (a) に示したモード振動数については非常によくあっている。

Fig.4 (b) のモード減衰については、厳密解では中央の 1 モードが TMD の減衰 ξ_T の増加にともなって低減していくが、摂動解では増加の仕方が鈍いものの低減していない。しかし、モード減衰 ξ^* の低減が始まる分岐点 ($\xi^* < 0.04$) までは、非常に精度よく求められている。

実際、Fig.2 に見るように、MTMD が STMD に比して優位にたつのは個々の TMD が低減衰のときであり、また、モード減衰 ξ_T の低減が始まる点は最低のモード減衰が最大になる点、すなわち、もっとも高い性能を得ることのできる点であることを考えると、(1) で求めた解に基づいて MTMD の性能を論じることができる。

最低のモード減衰は、構造物の固有振動数が近いモード、すなわち中心のモードで生じる。そのモード減衰は、式 (24) より、

$$\xi^* = \left(1 - \frac{1}{A}\right)\xi_T + \frac{\xi_s}{A} \dots (36)$$

ただし、モード減衰が減少しはじめる点の前までが有効であるので、

$$\frac{\mu A}{2} - (\xi_T - \xi_s)^2 \geq 0 \dots (37)$$

の条件がつく。また、

$$\frac{\mu A}{2} - (\xi_T - \xi_s)^2 = 0$$

となるときが、最大のモード減衰を与える。簡単のために、 $\xi_s = 0$ の場合で考えると、TMD の最適減衰定数は、

$$\xi_T = \sqrt{\frac{\mu A}{2}} \dots (38)$$

であり、そのときのモード減衰 ξ^* は、

$$\xi^* = \left(1 - \frac{1}{A}\right)\xi_T \dots (39)$$

となる。この式 (38) のパラメータで、モード減衰に対して MTMD の減衰を最適設計できることになる。

ただし、ここで与えた摂動解は、バンド幅 B が狭い場合には、精度が低くなる。これは、バンド幅が狭くなると、MTMD の特性が質量比 μ_{total} の STMD に近づくためである。その境界を示すバンド幅の目安 B_c は、文献 5) において求めたように、近似的に、

$$B_c = \frac{1}{4}(\sqrt{8\mu_{total}T}) \dots\dots\dots(40)$$

である。ここに、

$$T = \gamma + \log(N), \quad (\gamma = 0.57721 : \text{オイラー定数}) \dots\dots\dots(41)$$

(3) マルティプルの効果

ここでは、STMD の摂動解と比較して、MTMD のマルティプルの効果を考察する。簡単のために、 $\xi_s = 0$ の場合で考える。

式 (16) の最適条件を満たす質量比 μ_{total} の STMD に、ここで用いた摂動法を適用すると、

$$\xi^* = \xi_T / 2, \quad (\mu_{total} - \xi_T^2 \geq 0) \dots\dots\dots(42)$$

となる⁷⁾。一方、一般の MTMD では、式 (25) より

$$A > 2 \dots\dots\dots(43)$$

となるから、式 (37) の範囲で、

$$\xi^* = \left(1 - \frac{1}{A}\right)\xi_T > \frac{\xi_T}{2} \dots\dots\dots(44)$$

となり、低減衰のときには、STMD より ξ_T の増加に対する ξ^* の増分が大きくなる。このため、Fig.2 (b) に示したように MTMD の方が高いモード減衰を考えることになる。また、 A が大きいほうがより高い減衰が得られる。この A の値がマルティプルの効果を表していると考えられる。

パラメータ A は、 N あるいは μ/β^2 が増加すると、増加するので、MTMD としての性能、すなわちマルティプルの効果は、MTMD の個数、あるいはバンド幅あたりの MTMD の質量比の密度 ρ が大きければ、大きくなることが分かる。

4. 自励振動に対する性能

SRMD では、付加減衰効果によって、自励振動の発生を抑えることができる。MTMD においても同様の性能が期待される。ギャロッピングなどの、空力自励振動は、基本的に非線形な現象であるが、振幅が微小な領域を対象として、ここでは線形な負減衰を持つ系の振動としてモデル化する。このとき、MTMD の性能は、MTMD 付加によって安定化できる構造物の負減衰の大きさを評価する^{6),7)}。

負減衰を受ける構造物に TMD が付加された系の動的安定性は、モード減衰から判断することができる。つまり、減衰がすべて正ならば、自励振動は発生せず、系

は安定である。

なお、ここでは、 ξ_s は負の値を持ち、構造物に働く負減衰を表すものとする。

(1) 性能評価式

前章で検討した最低のモード減衰が正であればよいから、式 (36) より、

$$-\xi_s \leq (A-1)\xi_T \dots\dots\dots(45)$$

が系が安定であるための条件になる。ただし、式 (37) の条件に、式 (45) を代入して得られる

$$\xi_T \leq \sqrt{\frac{\mu}{2A}} \dots\dots\dots(46)$$

が、式 (45) の成立する条件となる。式 (46) から明らかなように、MTMD の減衰 ξ_T の最適値は、

$$\xi_T = \sqrt{\frac{\mu}{2A}} \dots\dots\dots(47)$$

であり、そのときの許容される負減衰の値 ξ_s は、

$$-\xi_s = (A-1)\xi_T \dots\dots\dots(48)$$

となる。

質量比 μ_{total} の STMD に対して同様の摂動法を適用したときの最適減衰及びそのときの許容負減衰は、

$$\xi_T = \frac{\sqrt{\mu_{total}}}{2} \dots\dots\dots(49)$$

$$-\xi_s = \xi_T \dots\dots\dots(50)$$

である⁷⁾。ただし、最適条件

$$\omega_T = \omega_s \sqrt{1 + \mu_{total}} \dots\dots\dots(51)$$

を満たす場合である。

MTMD では式(25)より $A > 2$ であるから、特に減衰が低い場合において、MTMD が STMD を大きく上回る性能を示す。

Fig.5 (a), (b) に、 $\mu_{total} = 0.01$, $N = 5$ 及び 21 の場合について、数値計算によって得られた厳密解とこの評価式を対比した。最適値付近で、やや過大評価になっているが、いずれもその傾向をよく表している。参考までに、同図 c) に同じ総質量比 $\mu_{total} = 0.01$ をもち、最適条件式 (51) を満たす STMD についても示した。

(2) 同調比に対するロバスト性

STMD によっても、かなりの自励振動を抑える効果が期待できるが、同調比の誤差によって大きく性能を落とす⁷⁾。つまり、同調比の誤差に対してロバスト性が低い。それに対して MTMD では、オフセット β_0 の変動に対して高いロバスト性を期待することができる。文献 5) では、式 (40) に挙げたバンド幅の基準 B_c をもとに、ロバスト余裕 B_r を

$$B_r = B - B_c \dots\dots\dots(52)$$

という簡単な関係で導き、調和応答に関する MTMD のロバスト性の指標として用いることが妥当があることを示している。この指標を自励振動に対しても適用して

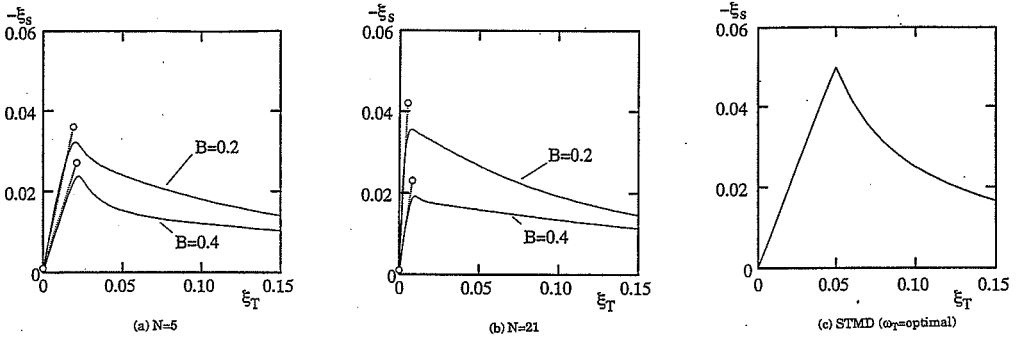


Fig.5 Stability conditions for MTMD-structure system ($\mu_{total}=0.01$) — exact, ○-----○ approximate

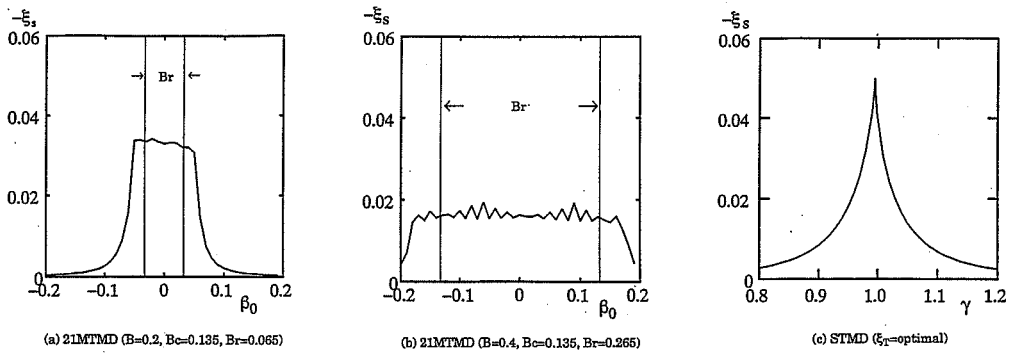


Fig.6 Robustness in controlling self-excited vibration ($\mu_{total}=0.01$)

みる。Fig.6 (a), (b) に、 $N = 21$, $\mu_{total} = 0.01$ の MTMD の同調比の誤差 (オフセット) β_0 (式(2)) に伴う性能の変化を示した。TMD の減衰は式 (47) の最適値によった。B, がほぼ性能が一定になっている領域をカバーしており、この場合もロバスト性の指標として妥当であることがわかる。参考までに、最適減衰^(6),7)

$$\xi_T = \sqrt{(\sqrt{1+\mu_{total}} - 1) / (2\sqrt{1+\mu_{total}})} \dots\dots\dots (53)$$

を持つ STMD も同図 c) に示した。MTMD では、かなりロバスト性が向上していることがわかる。

5. 調和外力に対する性能

ここでは、MTMD の減衰の効果を入れて、調和外力に対する性能評価式を求める。まず、MTMD の性能を等価付加減衰という形で表して論じる。次いで、実際の MTMD の設計にあたって重要な TMD の振幅について考察する。

(1) 等価付加減衰

MTMD の効果の指標として MTMD によって構造物に付加された等価付加減衰 ξ_{eq} を用いる。 ξ_{eq} は 1 自由度系応答のアナロジーから以下のように定義する。

$$\xi_{eq} = \frac{1}{2M\omega_s^2 H_s} - \xi_s \dots\dots\dots (54)$$

ここに、 H_s は、式 (15) で定義された構造物の周波数応答のピーク値である。すなわち、

$$H_s(\omega) = \frac{1}{M \left\{ \omega_s^2 - (1 + \mu_{total})\omega^2 + 2i\xi_s\omega_s\omega - \sum_{j=-n}^n \frac{\mu\omega^4}{\omega_j^2 - \omega^2 + 2i\xi_T\omega_j\omega} \right\}} \dots\dots\dots (55a)$$

周波数応答のピークは、モード振動数で加振するときに見られると考えられる。そこで中心のモード振動数 ω_s^* の 0 次近似値である ω_0 を式 (15) の周波数応答関数に直接代入して近似することを考える。簡単のために構造減衰 $\xi_s = 0$ とすると、周波数応答のピークの近似は、

$$H_s = \left| \frac{1}{M \sum_{j=-n}^n \frac{\mu\omega_0^4}{\omega_j^2 - \omega_0^2 + 2i\xi_T\omega_j\omega_0}} \right| \dots\dots\dots (55b)$$

と表せる。この式と数値計算結果を比較したのが Fig.7 (a) である。 $\mu_{total} = 0.01$, $N = 21$, $B = 0.2$ である。減衰が非常に低いときを除いて、変化が平坦な領域では非常にによくあっている。その理由は、Fig.8 に挙げた MTMD—構造物系の周波数応答からもわかるように、MTMD の減衰が低いときには、多数の鋭いピークが見られる形になるため、どの振動数で周波数応答を評価するかで、大きな差が生じるからである。それに対して、ある程度 MTMD の減衰が大きくなると周波数応答が平坦な形になるので、非常によくあうことになる。

次に式 (55) の近似の限界を与える MTMD の減衰

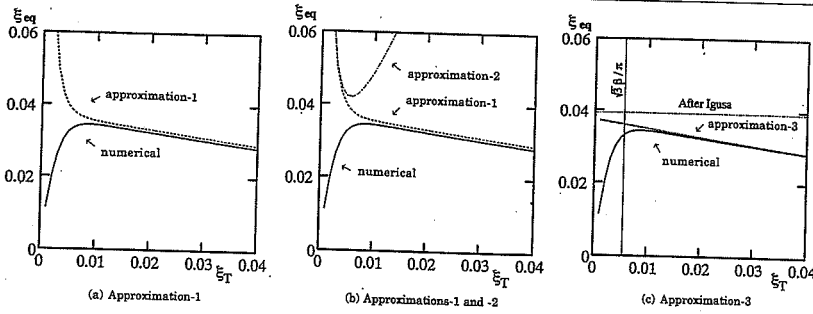


Fig.7 Approximations of equivalent damping (21 MTMD, $\mu_{total}=0.01, B=0.2$) ——— exact, - - - - approximation 1, - · - · - approximation 2, ····· approximation 3

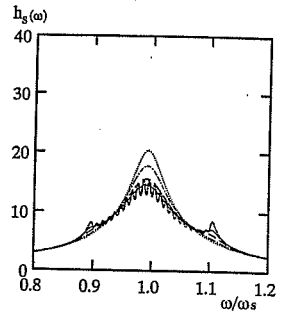


Fig.8 Frequency response of 21 MTMD ($\mu_{total}=0.01, B=0.2$)
 - - - - $\xi_T=0.005$,
 ——— $\xi_T=0.01$,
 - · - · - $\xi_T=0.02$,
 - - - - $\xi_T=0.04$,
 ····· $\xi_T=0.06$

の目安を求める。MTMDの減衰が非常に小さいときが対象になるから $\xi_T \ll j\beta$ として、式(55)の最低次の項のみ残すと、

$$H_s = \frac{2\xi_T}{M\omega_0^2 \left(\frac{2\mu\xi_T^2}{\beta^2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} + \mu \right)} \approx \frac{2\xi_T}{M\omega_0^2 \left(\frac{2\mu\xi_T^2}{\beta^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} + \mu \right)} \quad (56a, b)$$

となる(補遺参照)。式(56b)と式(55)の結果を対比したのがFig.7(b)である。式(55)を近似1、式(56b)を近似2と呼ぶことにする。近似2の曲線は、近似1の曲線を、減少率が変わり平坦になるところまでは高い精度で近似している。近似2の適用限界は、近似2が最小値を示す点付近までであり、この点付近で近似1の曲線が平坦になりはじめる。また、Fig.7(a)からわかるように、平坦になっているところは、近似1と数値計算結果がよくあっている領域である。したがって、近似2が最小値を示す点を、近似1の適用限界の目安として採用することにする。その点は、式(56b)を ξ_T について一階微分することによって得られ、

$$\xi_T = \sqrt{3\beta/\pi} \quad (57)$$

となる。また、この点より ξ_T が大きくなると、 ξ_{eq} は、単調減少であるから式(57)は、MTMDの最適減衰の目安にもなっている。

β が十分に小さい場合、つまり B が一定のもとで N が十分に大きい場合には、式(55)において、

$$\sum_{j=-n}^n \frac{\mu\omega_0^6}{\omega_j^2 - \omega_0^2 + 2j\xi_T\omega_j\omega_0} = \frac{\mu\omega_0^6}{2} \sum_{j=-n}^n \frac{1}{j\beta + i\xi_T} \quad (58)$$

$$\frac{\mu\omega_0^6}{2\beta} \sum_{j=-n}^n \frac{\beta}{-n\beta + i\xi_T} \approx \frac{\mu\omega_0^6}{2\beta} \int_{-n\beta}^{n\beta} \frac{dz}{z + i\xi_T} = i\frac{\mu}{\beta} \tan^{-1}\left(\frac{n\beta}{\xi_T}\right) \quad (59)$$

となる。すると、等価付加減衰は、

$$\xi_{eq} = \frac{\mu}{2\beta} \tan^{-1}\left(\frac{n\beta}{\xi_T}\right) \approx \frac{\rho}{2} \tan^{-1}\left(\frac{B}{2\xi_T}\right) \quad (60)$$

となる。これを近似3と呼ぶ。Fig.7(c)にみるように、TMDの減衰が式(57)の値より大きいときには、非常によくあっている。ただし、この式は、 β が十分に小

い、あるいは N が大きいという制約が加わっている。数値計算の結果、 $\mu_{total}=0.005$ で $N>11$ 、 $\mu_{total}=0.01$ で $N>21$ 、 $\mu_{total}=0.02$ で $N>31$ 程度のときには、この式が有効であることを確かめている。Fig.9(a)には、 $B=0.3, N=31$ の場合について $\mu_{total}=0.005\sim0.02$ の例を示した。比較として、同Fig.9(b)に対応する最適STMD(式(16)の最適条件を満たす)の例も示したが、TMDの減衰が低い式(57)の近傍では、MTMDの方が有利であることがわかる。

式(60)からわかるように、MTMDの密度 ρ に比例して、等価付加減衰が増加することがわかる。これからわかるように、なるべく密度を高くしたほうが有利であるが、 B が式(40)の B_c より小さくなると、MTMDとしての特性が失われ、質量比 μ_{total} のSTMDの特性に近くなる。したがって、 $B>B_c$ の条件がつくことになる。なお、ここでの近似式もFig.10に示すように、 $B>B_c$ のときに成立するものである。

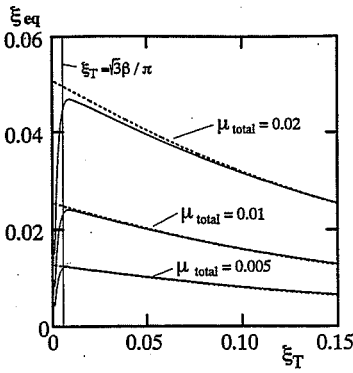
Igusaらは、無限個のMTMDを設置した場合の、白色雑音外力に対する構造物の2乗平均応答について、本論とは全く別の方法で検討し、

$$\xi_T > 0.6\beta \quad (61)$$

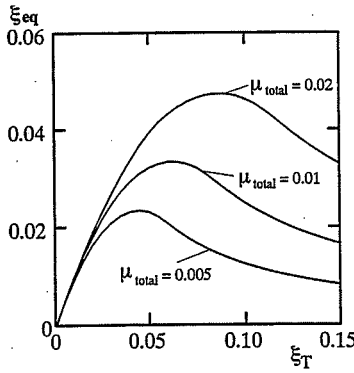
のもとでは、等価付加減衰が

$$\xi_{eq} = \frac{\rho\pi}{4} \quad (62)$$

で表わされるという結果を得ている¹⁾。式(61)は、式(57)にほぼ対応している。また、式(62)は、TMDの減衰 ξ_T が考慮されておらず、式(60)でTMDの減衰を0とした場合の値に一致する。式(62)は、2乗平均応答の検討の際には、高い密度をもっているが、本論のように周波数応答のピーク値を検討する際には、Fig.7(c)からわかるように過大評価になっている。



(a) 31MTMD (B=0.3)



(b) STMD ($\omega_T = \text{optimal}$)

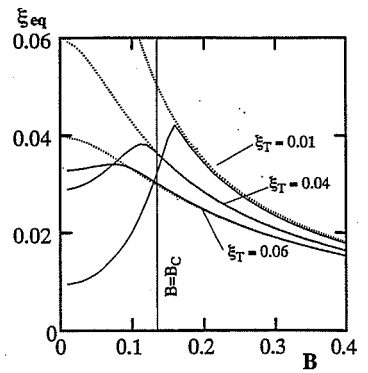
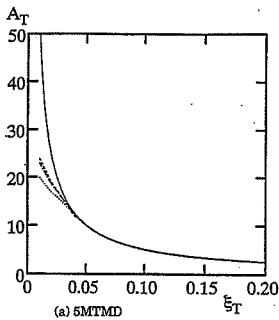
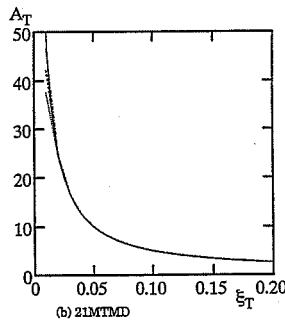


Fig.10 Equivalent damping versus B (21 TMD, $\mu_{\text{total}}=0.01$)
— exact, - - - approximate

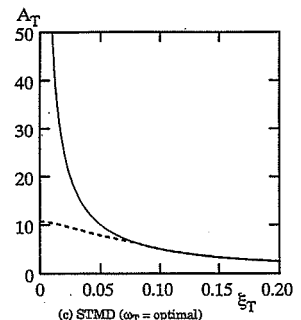
Fig.9 Equivalent damping versus ξ_T — exact, - - - approximate



(a) 5MTMD



(b) 21MTMD



(c) STMD ($\omega_T = \text{optimal}$)

— approximate, - - - $B=0.1$,
- - - $B=0.2$, - - - $B=0.4$

— approximate, - - - $B=0.15$,
- - - $B=0.2$, - - - $B=0.4$

— approximate, - - - exact,

Fig.11 Non-dimensionalized amplitude of MTMD ($\mu_{\text{total}}=0.01$)

(2) TMDの振幅

実際のTMDの設計にあたっては、その振幅が制約条件になることが多い。ここでは、TMDの振幅の評価にあたって、無次元振幅 A_T を導入する。

$$A_T = H_T / H_s \dots\dots\dots (63)$$

ただし、 H_T は、MTMDの周波数応答のピーク値である。

式(15)の周波数応答関数から、調和外力 ω がはたらくときのTMDと構造物の応答の比 $A_T(\omega)$ を求めると、

$$A_T(\omega) = \left| \frac{\omega^2}{-\omega^2 + 2i\xi_T\omega_j\omega + \omega_j^2} \right| \dots\dots\dots (64)$$

この関数の最大値は微分によって簡単に求めることができ、

$$A_T' = \frac{1}{2\xi_T\sqrt{1-\xi_T^2}} \approx \frac{1}{2\xi_T} \dots\dots\dots (65)$$

となる。ただし、 A_T は、周波数応答関数のピーク値に基づくものであり、 A_T' は、無次元化された応答のピーク値に基づくものである。必ずしも一致しない。しかし、Fig.11 (a), (b) に見るように、特にTMDの個数 N が大きいときには、その傾向をよく表わしており、目安として用いることができよう。参考に、Fig.11

(c) には、STMDの振幅を示した。

$\mu_{\text{total}}=0.01$ の場合で、STMDでは、 $\xi_T=0.1$ 程度、MTMDでは、 $\xi_T=0.02$ 程度で用いるとすると、式(65)から考えて、5倍程度の振幅になることになる。

6. 結 び

本論文では、文献5で論じたMTMDのバンド幅の基準を援用しながら、MTMDの減衰の効果を考えにいたれた評価式を各種外力に対して提案した。評価式とその有効範囲をTable 1にまとめておく。MTMDの総質量比 μ_{total} および個数 N が、制作費用等の理由であらかじめ決まっているとすれば、この評価式を用いることによって、その他のパラメータ、すなわちバンド幅 B および減衰 ξ_T を定めることができる。

具体的なMTMDの設計プロセスは次のようになる。

- (1) MTMDの固有振動数の幅 B は $B > B_c$ をみたくようにする。もし構造物の固有振動数に予測誤差、非線形性による変動がある場合にはその幅 B_c を考えて $B \approx B_c + B_r$ がバンド幅の目安となる。 B を大きくすると、 A_r が小さくなり減衰効果が低下するので必要以上に大きくすることは賢明ではない。
- (2) 調和外力に対しての制

Table 1 MTMD の性能評価式

バンド幅 $B = (N-1)\beta$		自励振動 ($\xi_s < 0$)	
限界バンド幅	$B_c = \sqrt{(\mu_{total}T)/2}$	許容される負減衰 ($A-1$) $\xi_T + \xi_s \geq 0$ ただし、 $\frac{\mu A}{2} - (\xi_T - \xi_s)^2 \geq 0$	最適減衰 $\xi_T = \sqrt{\frac{\mu}{2A}}$ このときの最大許容負減衰 $-\xi_s = (A-1)\sqrt{\frac{\mu}{2A}}$
ロバスト余裕	$B_r = (B - B_c)/2$		
モード減衰		調和応答 (N :十分大)	
モード減衰 $\xi^* = (1 - \frac{1}{A})\xi_T + \frac{\xi_s}{A}$ ただし、 $\frac{\mu A}{2} - (\xi_T - \xi_s)^2 \geq 0$	最適減衰 (ただし $\xi_s = 0$) $\xi_T = \sqrt{\frac{\mu A}{2}}$ このときのモード減衰 $\xi^* = (1 - \frac{1}{A})\sqrt{\frac{\mu A}{2}}$	等価付加減衰 $\xi_{eq} = \frac{\rho}{2} \tan^{-1}(\frac{B}{2\xi_T})$ ただし、 $\xi_T \geq \frac{\sqrt{3}\beta}{\pi}$	TMDの無次元振幅 $A_T = \frac{1}{2\xi_T}$
ただし、 ξ : 減衰定数、 ω : 固有振動数 (添字は S: 構造物、T: TMD)、N: TMDの個数、B: バンド幅 (無次元量) μ_{total} : MTMDの総質量比 $\mu = \mu_{total}/N$, $\beta = B/(N-1)$, $\rho = \mu_{total}/B = \mu/\beta$, $A = 2 + \sum_{j=1}^n \frac{\mu}{1+2\rho^2}$, $T = \gamma + \log(N)$, ($\gamma = 0.57721\dots$: Euler's constant)			

振効果は ξ_{eq} で与えられているとおりであり、 ξ_T は $\sqrt{3}\beta/\pi$ に近い値とすればよい。ただし、MTDの振幅は $1/\xi_T$ に比例するので許容振幅を考慮して ξ_T を決める必要がある。自由振動のときはモード減衰を、自励力に対して、 $(A-1)\xi_T + \xi_s \geq 0$ から決めればよい。当然、所要の減衰効果が得られないときには質量比 μ_{total} をあるいは TMD の個数 N を変えることになる。実際の設計では何回かのイテレーションが必要となろう。

なお、TMD の個数 N は経済的な制約からあまり多くすることはないとと思われるが、MTLD の中には非常に数多くの設置する場合がある。このとき、個々の TMD (TLD) の固有振動数の間隔 $\beta = B/(N-1)$ が小さくなり、実際には誤差制作、調整の精度からしてその達成が事実上、非常に難しくなる。個々の TMD (TLD) の固有振動数に要求される精度がいくらぐらいなのかは検討しておらず、現時点でははっきりしていない。N が 10 以上あれば、その制振性能が大きくは変化しないという数値解析の結果からして、TMD の精度にそれほど高い要求はされないと思われる。また逆に、実際のダンパーの数が他の理由から数百個以上になるときに、1 つ 1 つのダンパーの固有振動数を変える必要はなく、固有振動数を 10 (=N) グループぐらいに分けて設計すればよいということである。

本論ならびに文献 5) は、構造物を 1 自由度系でモデル化しており、1 つの制振モードに対する MTMD の性能評価、設計式を求めたものである。制振モードで 2 つ以上あるときに、この MTMD の考え方をを使うとすれば、個々の固有振動数まわりに多数個の小さい MTD を固有振動数を少しずつずらせながら配置せることになる。2 つの制振モードが近接しているときには、MTMD の固有振動数のレンジが重複してくるわけで、このときの MTMD の制振効果、最適設計法などは興味ある問題である。いずれにせよ、マルチプルダンパーということで多自由度系の制振のための 1 手法と

られがちであるが、基本的には「ある 1 つの振動モードに対する制振手法の 1 つ」であることをことわっておきたい。なお、一般的な多自由度系に対する MTMD の設計法については今後検討したいと考えている。

5 章で触れたように、MTMD は、その振幅が大きいという欠点を有する。しかし、従来型の STMD に比べて、同じ質量比において「制振性能の向上がはかれること」もっとも大事なこととして「制振性能は同程度に保ちつつ、同調比の誤差に対する性能の低下がはるかに少ない、すなわちロバスト性をはるかに高くすることができる」などの優位性がある。このことは本論文ならびに文献 5) で示した通りである。勿論、TMD の数をふやすことは、たとえ 1 つ 1 つの TMD の質量が少なくとも経済性の面では不利になることは多いであろう。「STMD のよりも MTMD の方が絶対的に優位」といえないことは事実である。したがって、どちらが優位かはまさしくケースバイケースであり、一概には言えない。しかし、構造物の制振に種々の制約から複数個の TMD を設けざるを得ないときや、相対的に比重が低い水を用いるために多数個の設置が必要となることの多い同調液体ダンパー (TLD)⁴⁾ では、広く適用できる設計方法であると考えている。

謝 辞

埼玉大学 山口宏樹助教授には、有益なコメントをいただいた。ここに記して謝意を表します。

補遺：式 (56a) の誘導

$$H_0^2 = \left| \frac{1}{M \sum_{j=-n}^n \frac{\mu \omega_0^2}{\omega_j^2 - \omega_0^2 + 2i\xi_T \omega_j \omega_0}} \right| \dots \dots \dots (55b)$$

式 (55b) において、分母の Σ の中の各項について考える。j=0 に対して、分母は

$$\frac{\mu\omega_0^2}{\omega_j^2 - \omega_0^2 + 2i\xi_T\omega_j\omega_0} = \frac{\mu\omega_0^2}{2\xi_T} i \dots\dots\dots (A.1)$$

$j \neq 0$ に対しては

$$\begin{aligned} \frac{\mu\omega_0^2}{\omega_j^2 - \omega_0^2 + 2i\xi_T\omega_j\omega_0} &= \frac{\mu\omega_0^2}{\omega_0^2(1 + j\beta) - \omega_0^2 + 2i\xi_T\omega_j\omega_0} \\ &\approx \frac{\mu\omega_0^2}{2j\beta + 2i\xi_T} \quad (\because \beta \ll 1) \\ &= \frac{\mu\omega_0^2}{2j\beta\left(1 + \frac{2i\xi_T}{2j\beta}\right)} \approx \frac{\mu\omega_0^2}{2j\omega} \left(1 - \frac{i\xi_T}{j\beta}\right) \quad (\because \beta \ll \xi_T) \dots\dots\dots (A.2) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $j=0$ を除いた各項の総和は

$$-\sum_{j=-n}^n \frac{\mu\omega_0^2}{2j\beta} \left(1 - \frac{i\xi_T}{j\beta}\right) = \sum_{j=-n}^n \frac{\mu\omega_0^2 i\xi_T}{(j\beta)^2} = \sum_{j=1}^n \frac{\mu\omega_0^2 i\xi_T}{(j\beta)^2} \dots\dots\dots (A.3)$$

となり、 $j=0$ の分も加えて H_j^s は次式、すなわち式 (56a) なる。

$$\begin{aligned} H_j^s &= \left| \frac{1}{-M\omega_0^2 \left(\frac{\mu\xi_T}{\beta^2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} + \frac{\mu}{2\xi_T} \right) i} \right| \\ &= \frac{2\xi_T}{M\omega_0^2 \left(\frac{2\mu\xi_T}{\beta^2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} + \mu \right)} \dots\dots\dots (56a) \end{aligned}$$

参考文献

- 1) Igusa, T. and Xu, K. : Wide-band response characteristics of multiple subsystem with high modal density, 2nd International Conference on Stochastic Structural Dynamics, Florida, USA, May, 1990.
- 2) Igusa, T. and Xu, K. : Vibration reduction characteristics of distributed tuned mass dampers, Proc. of the 4th International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics, UK, pp.596~605, July, 1991.
- 3) Yamaguchi, H. and Harnpornchai, N. : Fundamental characteristics of multiple tuned mass dampers for suppressing harmonically forced oscillations, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.22, No.1, pp.51~62, 1993.
- 4) 藤野陽三・孫利民・山口宏樹：マルチプル TMD・TLD の特性の把握，構造工学論文集，Vol. 38A, pp. 825~836, JSCE, 1992年3月。
- 5) 阿部雅人・藤野陽三：マルチプル同調質量ダンパー (MTMD) の基本的特性，土木学会論文集，1993年4月。
- 6) Warburton, G. B. and Ayorinde, E. O. : Optimum absorbers for simple systems, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.8, pp.197~217, 1980.
- 7) Rowbottom, M. D. : The Optimization of Mechanical Dampers to Control Self-Excited Galloping Oscillations, Jour. of Sound and Vibration, 75 (4), pp.559~576, 1981.
- 8) 阿部雅人・藤野陽三：振動解による TMD—構造物系の動特性の理解と制振評価，土木学会論文集，No. 446/I-19, pp. 157~166, 1992年4月。

(1992.3.28 受付)

EFFICIENCY AND DESIGN FORMULAS OF MULTIPLE TUNED MASS DAMPERS (MTMD)

Masato ABÉ and Yozo FUJINO

Efficiency of multiple tuned mass dampers (MTMD), whose natural frequencies are distributed to some band width around the natural frequency of a structure, are investigated through perturbation solutions of modal properties of MTMD-structure damped system. Useful formulas to estimate the performance of MTMD subjected to various external forces are derived. Numerical study confirmed accuracy of these formulas. Optimal design parameters of the MTMD are also proposed.