

マルチプル同調質量ダンパー(MTMD)の基本的特性

阿部雅人*・藤野陽三**

多数個の同調質量ダンパーの固有振動数を、制振対象の構造物の固有振動数のまわりのあるバンド幅に分布させたマルチプルTMD(MTMD)の特性を、モード特性の摂動解に基づいて検討した。MTMD-構造物系のすべてのモードにすべてのTMDが強く連成する状態を基準に最適バンド幅を求め、さらに同調比に関するロバスト性の定量的指標も求めた。これらより、同じ総質量を持つ単一のTMDより安定かつ高い制振効果を有するMTMDの設計ができることがわかった。

Key Words : tuned mass damper, multiple tuned mass dampers, perturbation solutions, mode shape, robustness

1. はじめに

近年、TMDは、建設系構造物の制振に、幅広く用いられている¹⁾。その設計方法は、Den Hartog以来、いろいろな場合について提案されてきた(例えば文献2~6)。それらは、いずれもTMDの最適化を意図したものである。しかしながら、一般にTMDには、マスの可動スペースや製作精度などの制約条件があって、いわゆる最適パラメータ値を設計に用いることは希である。また、TMDの性能は、最適値付近で同調比やTMDの減衰定数等の設計パラメータに対して敏感性が高く、小さな誤差でも大きく性能が低下する⁷⁾。そのためもあり、TMDの減衰を最適値より高めにして、設計パラメータへの敏感性を落として使用することが多い⁸⁾。

なお、TMDは、格納スペース、ばね・ダッシュポットの製作、あるいは搬入などの制約により、数個以上に質量を分散させなければならないことがある。事実、8個のTMDの設計が計画されている橋桁もある。また水を質量として用いるTLD系のダンパーでは水の比重が小さいため、タイプにもよるがその数は数個から場合によっては数100個になることが多い。このように、多数個のTMD、TLDが設置される場合でも、個々のダンパーの諸え(質量、バネ、ダッシュポット)は同じとすることがこれまでの考え方であった。

このような状況の中で、Igusaら^{9),10)}はダンパーが多数個であることを積極的に利用する方法を提案した。すなわち、それは構造物の制振モードの固有振動数のまわりにTMDの固有振動数を分布させるやり方である(図-1)。これを本論文ではMTMD(Multiple Tuned

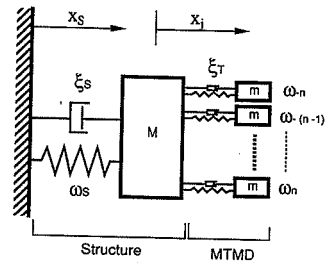


Fig.1 MTMD-structure system

Mass Dampers) と呼ぶことにする。

MTMDでは、同調比およびTMDの減衰定数に対する制振性能の敏感性が著しく低下するだけでなく、同じ合計質量比を持つSTMD(Single TMDの略)よりも優れた制振性能を有することが示されている。また、MTMDの制振原理は、非比例減衰系のパラメータ調整を基本とするSTMDと異なり、分散された多数個のTMDの慣性力及びばねの弾性力によるもので、MTMDの減衰は周波数応答を平滑化するという副次的な役割を果たしていることを指摘している¹⁰⁾。また、Igusaらは、ランダム加振を対象として、無限に多い個数のTMDが十分に広い振動数幅に密に分布しているという仮定のもとで、極限をとって等価付加減衰を導いている。そこでは、MTMDの減衰の影響をその定式上無視しており、有限個のTMDを如何に設計するかについての具体的な指針が明らかでない。また、通常行われる周波数対応のピーク値による制振効果の評価ではなく、設計パラメータに対する敏感性が低くなる、白色雑音入力に対する構造物の2乗平均応答でMTMDの性能を評価している。

山口らは、調和外力を受けるMTMD-構造物系に対して、質量比1%の場合について数多くの数値シミュ

*学生会員 工修 東京大学大学院 土木工学専攻
(米国ノースウエスタン大学留学中)

**正会員 Ph.D 東京大学土木工学科 教授
(〒113 東京都文京区本郷 7-3-1)

レーションを行い^{11),12)}, その結果から, MTMD の特性として, (1) ロバスト性の向上, (2) TMD には減衰の最適値が存在, (3) MTMD の固有振動数幅に最適値が存在, (4) TMD の振幅が大きくなることを指摘している。しかしながら, 山口らの結果はあくまでもシミュレーションに基づくものであり, MTMD の振動論的立場からの考察には深く言及していない。また, シミュレーションされていない場合に対しては, 別途計算が必要である。

本論文では, MTMD-構造物系に対して, その基本的特性を明らかにすることを目的に, 対応する無減衰の系のモード特性の摂動解を求め, それに基づいて MTMD の性能を論じる。

そこで, MTMD の固有振動数の最適バンド幅に関する基準を摂動解をベースに導き, さらに, 振動数変化に関するロバスト性 (非感受性) についても目安を得る。

MTMD において, 1つ1つの TMD のパラメータを個別にきめ細かく設計することも考えられるが, 実際的设计, 製作が非常に煩雑になる。そこで, 個々の TMD の質量, ならびに減衰定数はすべて同じという条件の下で, 振動数のみを等間隔に分布させるという MTMD としては最も簡単で現実的な設定を用いて検討を行う。

なお, MTMD の個数 N および総質量 m_{total} は, あらかじめ与えられているものとして検討を行う。

2. 運動方程式と周波数応答関数

(1) MTMD の運動方程式

MTMD-構造物系 (図-1) において, 構造物の制振対象モードは1つであるとして1自由度系としてモデル化した。運動方程式は,

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F \dots\dots\dots (1)$$

である。ここで,

$$X = [x_s, x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_n]^T$$

$$M = \begin{bmatrix} M+N \cdot m & m & \dots & m \\ m & m & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ m & 0 & & m \end{bmatrix}$$

$$C = \text{diag} (2M\xi_s\omega_s, 2m\xi_T\omega_{-n}, 2m\xi_T\omega_{-n+1}, \dots, 2m\xi_T\omega_n)$$

$$K = \text{diag} (M\omega_s^2, m\omega_{-n}^2, m\omega_{-n+1}^2, \dots, m\omega_n^2)$$

$$F = [f(t), 0, 0, \dots, 0]^T$$

添字の S は構造物, j ($= -n, \dots, 0, \dots, n$) は, j 番目の TMD を表す。 x_s は構造物の変位, $x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_n$ は TMD の相対変位である。 M は構造物のモード質量, m は単一の TMD の質量である。簡単のために各 TMD の減衰 ξ_T , ならびに質量 m は均一とし, 構造物

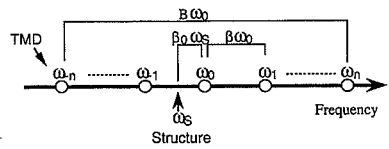


Fig.2 Set-up of frequency of MTMD

の減衰 ξ_s は 0 とする。また, TMD の個数 N ($= 2n+1$) は奇数とする。偶数の場合は, 厳密には別途検討が必要であるが, 十分に多数の TMD のもとでは, 偶数, 奇数による影響は明らかに軽微である。さらに各 TMD の固有振動数は, 中心の TMD の固有振動数 ω_0 について対称で, 等間隔であるとする。すなわち,

$$\omega_j = \omega_0 (1 + j\beta) \quad (\text{ただし, } j = -n \sim n) \dots\dots\dots (2)$$

ω_0 と構造物の固有振動数 ω_s の関係を,

$$\omega_0 = \omega_s (1 + \beta_0) \dots\dots\dots (3)$$

と表す。TMD の固有振動数のバンド幅 B を,

$$B = (\omega_n - \omega_{-n}) / \omega_0 \dots\dots\dots (4)$$

と定義する。このとき, 個々の TMD の固有振動数間隔を示すパラメータ β との関係は,

$$\beta = B / (N-1) = B / (2n) \dots\dots\dots (5)$$

となる。TMD の振動数の配置は, 図に示すと図-2 のようになる。なお, 後に用いるため, MTMD の総質量 m_{total} , 総質量比 μ_{total} , 個々の TMD の質量比 μ を, 以下のように定義する。

$$m_{total} = N \cdot m, \mu_{total} = m_{total} / M, \mu = m / M \dots\dots (6, 7, 8)$$

振動モード形を Φ とし, $x = \Phi \exp(i\lambda t)$ とすれば, 固有値 λ に対して, この系の運動方程式は,

$$[-\lambda^2 M + i\lambda C + K] \Phi = 0 \dots\dots\dots (9)$$

となる。その特性方程式は

$$[\omega_s^2 - (1 + \mu_{total})\lambda^2 + 2i\xi_s\omega_s] \prod_{j=-n}^n [\omega_j^2 - \lambda^2 + 2i\xi_T\omega_j\lambda] - \sum_{j=-n}^n \left[\mu\lambda^4 \prod_{\substack{k=-j \\ k \neq -n}}^n (\omega_k^2 - \lambda^2 + 2i\xi_T\omega_k\lambda) \right] = 0 \dots\dots (10)$$

なお, 便宜上, 特性方程式を ω_0 について対称な形にして摂動法を適用しやすくするために, 以下の検討では, 中心の TMD の振動数を

$$\omega_0 = \omega_s / \sqrt{1 + \mu_{total}} \dots\dots\dots (11)$$

とおくことにする。つまり, 構造物の固有振動数そのものではなく, 構造物に MTMD の質量効果に加わった場合の固有振動数に MTMD の中心振動数をあわせることになる。後に示すように, MTMD では, 同調比に対するロバスト性が高いので, この設定によって論議の一般性が失われることはない。

(2) 周波数応答関数

調和外力が構造物に働くときの各質点の変位を成分と

して持つ周波数応答関数ベクトル $H(\omega)$ は,

$$[-\omega^2 M + i\omega C + K] \cdot H(\omega) \cdot e^{i\omega t} = F \cdot e^{i\omega t} \dots (12)$$

$$F = [1, 0, 0, \dots, 0]^T \dots (13)$$

と表わせる。したがって,

$$H(\omega) = [-\omega^2 M + i\omega C + K]^{-1} F \dots (14)$$

ここで、マトリクスが簡単な形をしているので逆行列を簡単に求めることができ、

$$[-\omega^2 M + i\omega C + K]^{-1} = \begin{bmatrix} G & L & \dots & L \\ L & g_{-n} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ L & 0 & & g_n \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\prod_{j=-n}^n g_j}{\text{Det}[-\omega^2 M + i\omega C + K]} \times$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-L}{g_{-n}} & \frac{-L}{g_{-n+1}} & \dots & \frac{-L}{g_{n-1}} & \frac{-L}{g_n} \\ \frac{1}{g_{-n}} [G - \sum_{j=-n}^n \frac{L^2}{g_j}] & \frac{L^2}{g_{-n} g_{-n+1}} & \dots & \frac{L^2}{g_{-n} g_{n-1}} & \frac{L^2}{g_{-n+1} g_n} \\ & & & & \vdots \\ & & & \frac{1}{g_{n-1}} [G - \sum_{j=n}^n \frac{L^2}{g_j}] & \frac{L^2}{g_{n-1} g_n} \\ & & & & \frac{1}{g_n} [G - \sum_{j=n}^n \frac{L^2}{g_j}] \end{bmatrix} \quad (\text{sym})$$

ただし,

$$G = -(M + m_{\text{total}}) \cdot \omega^2 + 2M\xi_S \omega_S \cdot i\omega + M\omega_S^2 \dots (16)$$

$$L = -m \cdot \omega^2 \dots (17)$$

$$g_j = -m \cdot \omega^2 + 2m\xi_T \omega_j \cdot i\omega + m\omega_j^2 \dots (18)$$

$$\text{Det}[-\omega^2 M + i\omega C + K] = G \prod_{j=-n}^n g_j - \sum_{k=-n}^n \left(L^2 \cdot \prod_{j \neq k} g_j \right) \dots (19)$$

よって、周波数応答関数ベクトルは,

$$H(\omega) = \begin{bmatrix} h_S(\omega) \\ h_{-n}(\omega) \\ \vdots \\ h_n(\omega) \end{bmatrix} = \frac{\prod_{j=-n}^n g_j}{\text{Det}[-\omega^2 M + i\omega C + K]} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{L}{g_{-n}} \\ \vdots \\ -\frac{L}{g_n} \end{bmatrix} \dots (20)$$

となる。

(3) 無減衰系の運動方程式

近接した固有振動数を持ち、局所的に減衰の高いエレメントを有する多自由度系では減衰の非比例性がモード特性に大きく影響を及ぼす。STMD-構造物系ではTMDの減衰が構造物のに比べて高いので非比例減衰としての扱いが必要となる⁷⁾。MTMDではIgusa^{9),10)}および山口^{11),12)}によれば個々の減衰が低いときに制振効果が高い。MTMD-構造物系も数多くの近接した固有振動数を有することになるが、個々のTMDの減衰のレベルは構造物の減衰レベルと同程度、すなわち $O(\xi_S) =$

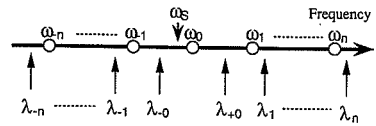


Fig.3 Definition of the order of eigenvalues

$O(\xi_T)$ であり、モード形状、固有振動特性を論じるときには比例減衰系として扱ってよいと考えられる。そこで、3章および4章では、MTMD-構造物系を比例減衰系として扱い、すなわち、減衰がないときのモード特性が保たれるとして、無減衰時のモード特性に基づいて検討する。

無減衰系の運動方程式は、式(1)より

$$M\ddot{X} + KX = F \dots (21)$$

その特性方程式は、式(10)より

$$(\omega_S^2 - (1 + \mu_{\text{total}})\lambda^2) \prod_{j=-n}^n (\omega_j^2 - \lambda^2) - \sum_{j=-n}^n \mu \lambda^4 \left\{ \prod_{k \neq j} (\omega_k^2 - \lambda^2) \right\} = 0 \dots (22)$$

あるいは,

$$(\omega_S^2 - (1 + \mu_{\text{total}})\lambda^2) - \sum_{j=-n}^n \frac{\mu \lambda^4}{(\omega_j^2 - \lambda^2)} = 0 \dots (23)$$

となる。先の、式(11)の関数を用いれば,

$$(\omega_S^2 - \lambda^2) - \sum_{j=-n}^n \frac{\mu}{1 + \mu_{\text{total}}} \frac{\lambda^4}{(\omega_j^2 - \lambda^2)} = 0 \dots (24)$$

となる。この式を、摂動解を求めるときに用いる。

3. 無減衰系のモード特性の摂動解

ここでは、各パラメータのオーダーを以下のようにおいて摂動法を適用し、無減衰系のモード特性の陽な解を導く。

$$O(n\beta^2) \approx O(j\beta^2) \approx O(\beta) \approx O(\mu_{\text{total}}) \approx O(\varepsilon) \ll 1 \dots (25)$$

また、特性方程式(24)の形から考えて、 k 番目固有値 λ_k の0次近似解を,

$$\lambda_{-n}^2 = \omega_{-n}^2, \dots, \lambda_{-0}^2 = \omega_0^2, \lambda_{+0}^2 = \omega_0^2, \dots, \lambda_n^2 = \omega_n^2 \dots (26)$$

とおくことにする。図-3に示したとおり、TMDの固有振動数と固有値の対応をはっきりさせるために、変則的ではあるが,

$$k = -n, \dots, -0, +0, \dots, n \dots (27)$$

として、0番目を ± 0 に分けて固有値の小さい順に並べることにする。以下に、モードごとに場合分けして固有値およびモード形を求める。

(1) 中心の2モードの固有値

最初に、構造物の固有振動数 ω_S および中心のTMDの固有振動数 ω_0 に近い2つのモード固有値 $\lambda_{-0}, \lambda_{+0}$ について考える。

1次近似解を,

$$\lambda^2 = \omega_0^2(1 + \varepsilon) \dots\dots\dots(28)$$

とおき, 特性方程式に代入して, 最低次の項のみ残す。さらに, $\varepsilon \ll j\beta$ であるとして,

$$\varepsilon + \sum_{j=1}^n \frac{\mu}{2j\beta} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2j\beta}\right) - \frac{\mu}{\varepsilon} = 0 \dots\dots\dots(29)$$

よって,

$$\varepsilon_{\pm 0} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{\mu}{2j^2\beta^2}\right)}} \quad (\text{複合同順}) \dots\dots\dots(30)$$

となる。したがって, 固有値は,

$$\lambda_{\pm 0}^2 = \omega_0^2(1 + \varepsilon_{\pm 0}) \dots\dots\dots(31)$$

と表せる。

(2) 最外郭の2モードの固有値

ここでは, 最大の固有値 λ_n ならびに最小の固有値 λ_{-n} を求める。まず, 最大の固有値を求める。1次近似解を

$$\lambda_n^2 = \omega_n^2 + \varepsilon_n \omega_0^2 \dots\dots\dots(32)$$

とおき, 前と同様に最低次の項のみ残して整理すると,

$$\left(1 + \sum_{j=1}^{2n} \frac{\mu}{4j^2\beta^2}\right) \varepsilon_n^2 + \left(2n\beta - \sum_{j=1}^{2n} \frac{\mu}{2j\beta}\right) \varepsilon_n - \mu = 0 \dots\dots\dots(33)$$

となる。この解は,

$$q_n = \frac{-\left(2n\beta - P\right) - \sqrt{\left(2n\beta - P\right)^2 + 4\mu(1+Q)}}{2(1+Q)} \dots\dots\dots(34)$$

$$P = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\mu}{2j\beta}, \quad Q = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\mu}{4j^2\beta^2} \dots\dots\dots(35, 36)$$

となるが, このうち複合の負記号に対応する解は, 最大の固有値に対応せず, 結果的に $n-1$ 番目の固有値 λ_{n-1} に対応しているので, ここでは正記号の解を採用した。同様にして, 最小の固有値 λ_{-n} は,

$$\lambda_{-n}^2 = \omega_{-n}^2 + \varepsilon_{-n} \omega_0^2 \dots\dots\dots(37)$$

$$\varepsilon_{-n} = \frac{-\left(-2n\beta + P\right) - \sqrt{\left(-2n\beta + P\right)^2 + 4\mu(1+Q)}}{2(1+Q)} \dots\dots\dots(38)$$

と表せる。

(3) 一般モード

この場合は, 摂動解は,

$$\lambda_k^2 = \omega_k^2 + \varepsilon_k \omega_0^2 \quad (k \neq \pm n, \pm 0) \dots\dots\dots(39)$$

となる。同様な方法で ε_k を求めることができる;

$k > 0$ のときは,

$$\varepsilon_k = \frac{-\left(2k\beta - P_1\right) + \sqrt{\left(2k\beta - P_1\right)^2 + 4\mu(1+Q_1+Q_2)}}{2(1+Q_1+Q_2)} \dots\dots\dots(40)$$

$k < 0$ のときは,

$$\varepsilon_k = \frac{-\left(2k\beta + P_1\right) - \sqrt{\left(2k\beta + P_1\right)^2 + 4\mu(1+Q_1+Q_2)}}{2(1+Q_1+Q_2)} \dots\dots\dots(41)$$

$$P_1 = \sum_{j=n-|k|+1}^{n+|k|} \frac{\mu}{2j\beta}, \quad Q_1 = \sum_{j=n-|k|+1}^{n+|k|} \frac{\mu}{4j^2\beta^2}, \quad Q_2 = \sum_{j=1}^{n-|k|} \frac{\mu}{2j^2\beta^2} \dots\dots\dots(42, 43, 44)$$

となる。(2)と同様に, 解の重複を防ぐために2次方程式の解の一方だけを採用している。

(4) モード形

上述の固有値が与えられたときの, k 番目固有値 ($k = -n, \dots, -0, +0, \dots, n$) に対応するモード形 ϕ_k は, 式(9)に上述の固有値の摂動解を代入して求めることができる。構造物の変位を1として, 正規化すると, 1次の精度で,

$$\phi_k^T = \left[1, \frac{-1}{\varepsilon_k + 2(k+n)\beta}, \dots, \frac{-1}{\varepsilon_k + 2(k-j)\beta}, \dots, \frac{-1}{\varepsilon_k + 2(k-n)\beta}\right] \dots\dots\dots(45)$$

と表される。ただし, $j = -n, \dots, 0, \dots, n$ である。参考までに, 中心の2モード ($k = \pm 0$) については,

$$\phi_{\pm 0}^T = \left[1, \frac{-1}{\varepsilon_{\pm 0} + 2n\beta}, \dots, \frac{-1}{\varepsilon_{\pm 0} + 2(-j)\beta}, \dots, \frac{-1}{\varepsilon_{\pm 0} - 2n\beta}\right] \dots\dots\dots(46)$$

と表せる。

4. バンド幅に伴うモード特性の変化

本章では, バンド幅の変化に伴う無減衰 MTMD-構造物系のモード特性の変化を論じ, あわせて前章で求めた摂動解の有効性を検討する。

(1) バンド幅が非常に広い場合

TMDの個数 N を一定に保った上で, 固有振動数の幅, すなわちバンド幅 B を極端に広くすると, 中心の1つのTMDを除いた他のTMDは, 構造物の固有振動数から遠ざかり, 構造物と同調しない, すなわち構造物との動的相互作用が非常に小さくなる。その結果, 中心のTMDのみがTMDとして作用する。すなわち, 質量比 μ の「小さい」STMDを設置した系と類似した応答になると考えられる。図-4(a)に, 11個のMTMDで総質量比 $\mu_{total} = 0.01$, バンド幅 $B = 0.8$, 減衰 $\xi_r = 0.02$ の場合の構造物変位応答の周波数応答曲線を示す。同じ図上に, 対応する質量比 $\mu = 0.01/11$ のSTMDの周波数対応も重ねて示した。STMDの減衰は $\xi_r = 0.02$ として, 有効振動数 ω_r は, MTMDの中心振動数 $\omega_r = \omega_0$ とした。11TMDの応答とSTMDの応答は非常に近いことがわかる。つまり, バンド幅が非常に広いときには, MTMDとしての性能は失われ, 中心の1つのTMDのみが働くようになっている。

この場合の, 対応する無減衰系のモード固有振動数およびモード形を次に検討する。中心のTMD以外は, 構造物との相互作用が微小で非同調になるので, 対応す

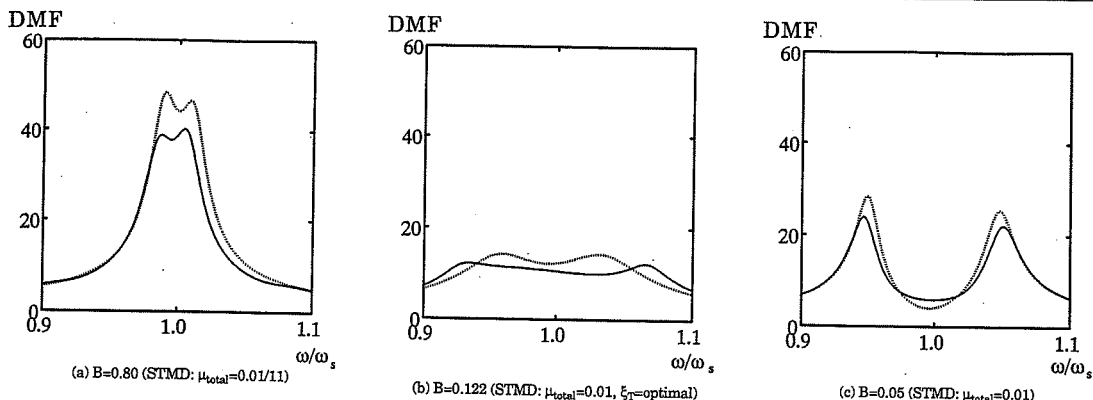


Fig.4 Frequency response of a structure with 11 MTMD ($\omega_s=1.0, \mu_{total}=0.01, \xi_T=0.02$) or STMD ; — : 11 TMD, : STMD

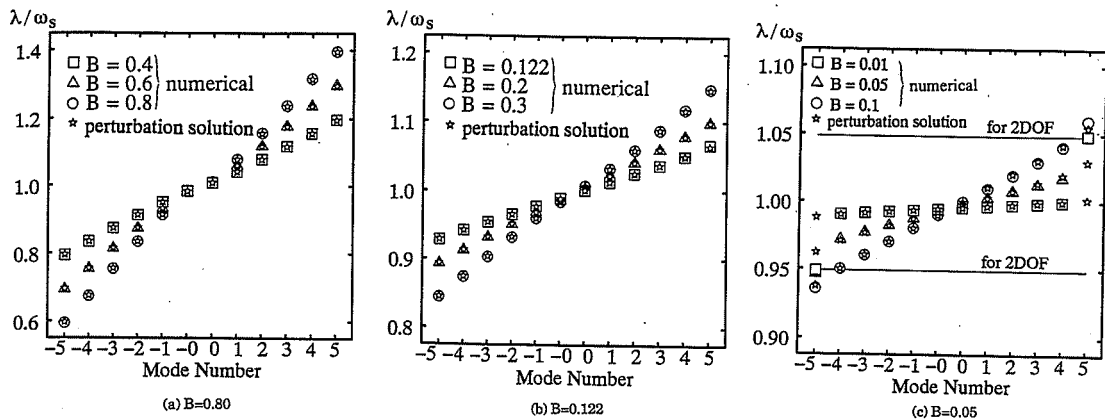


Fig.5 Modal frequency of undamped 11 MTMD-structure system ($\mu_{total}=0.01$)

るモード振動数は、それぞれの TMD の振動数、すなわち、

$$\omega_{-n}, \dots, \omega_{-1}, \omega_1, \dots, \omega_n \dots \dots \dots (47)$$

となると考えられる。また、これらのモード形は、実質的にはほぼ TMD のみが振動するモードとなる。例えば、 ω_{-n} に対応するモード ϕ_{-n} では、

$$\phi_{-n}^T = [0, 1, 0, \dots, 0] \dots \dots \dots (48)$$

中心の TMD および構造物が構成するモードについては、この場合他の TMD の寄与が小さいから、2 自由度系として扱うことができ、その固有振動数は、

$$\omega_0 / \sqrt{1 \pm \sqrt{\mu/(1+\mu)}} \dots \dots \dots (49)$$

となる。そして、対応するモード形は、

$$\phi_{\pm 0}^T = [1, 0, \dots, 0, \pm \sqrt{\frac{1+\mu}{\mu}}, 0, \dots, 0] \dots \dots \dots (50)$$

次に、前章の摂動法による結果で、 B が非常に広いときを検討する。式 (25) において β の関わるパラメータが 1 オーダー大きくなったとして、

$$O(n\beta^2) \approx O(j\beta^2) \approx O(\beta) \gg O(\mu_{total}) \dots \dots \dots (51)$$

とする。すると、中心の TMD 以外の TMD がゆるる

モードについては、

$$\begin{aligned} \epsilon_k &= \{- (2k\beta - P_1) + \sqrt{(2k\beta - P_1)^2 + 4\mu(1 + Q_1 + Q_2)}\} \\ & / \{2(1 + Q_1 + Q_2)\} \approx \frac{-2k\beta + \sqrt{(2k\beta)^2}}{2} = 0 \quad (k > 0) \end{aligned} \dots \dots \dots (52)$$

したがって、対応するモード固有振動数 λ_k は、

$$\lambda_k = \omega_k \dots \dots \dots (53)$$

となり、式 (47) と一致する。また、中心の TMD が関わるモードについては、

$$\epsilon_{\pm 0} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{1 + \frac{\mu}{2j^2\beta^2}}} \approx \pm \sqrt{\mu} \dots \dots \dots (54)$$

であるから、

$$\lambda_{\pm n} = \omega_0 \sqrt{1 \pm \sqrt{\mu}} \dots \dots \dots (55)$$

となり、 μ に関する 1 次近似を取ると、式 (49) の解と一致する。これらより、摂動解はバンド幅が非常に広くなったときでも有効であることがわかる。減衰を無減衰とした以外は図-4 (a) のケースと同じ条件の TMD 11 個の場合のモード振動数の厳密解との比較を図-5

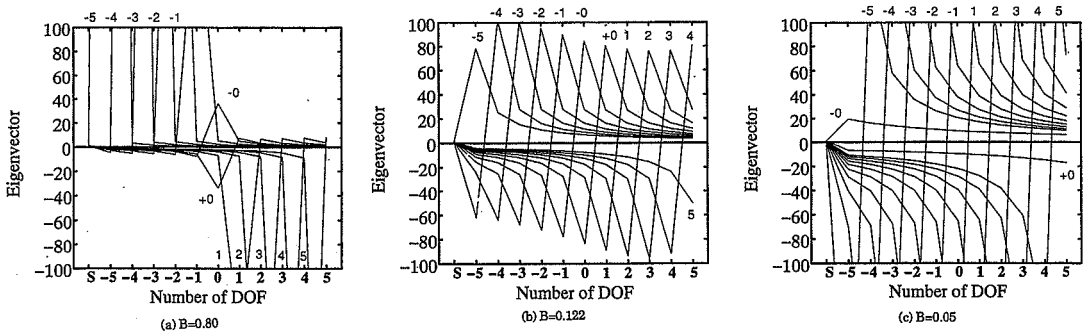


Fig.6 Exact mode shape of undamped 11 MTMD-structure system ($\mu_{total}=0.01$)

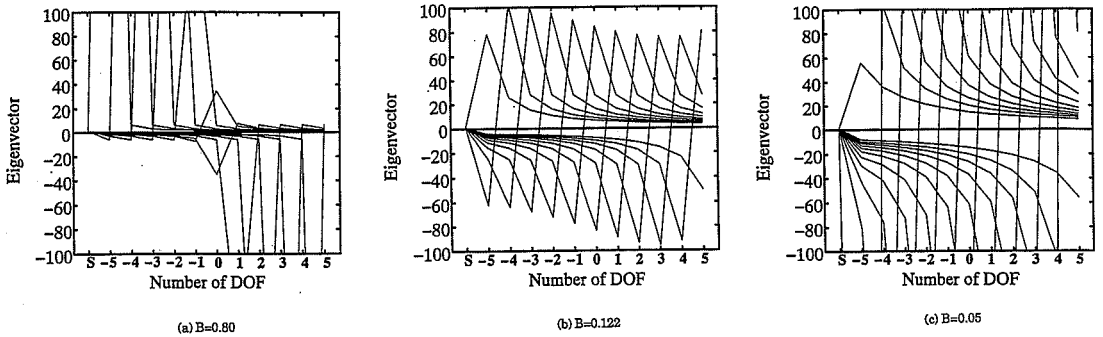


Fig.7 Approximate mode shape of undamped 11 MTMD-structure system ($\mu_{total}=0.01$)

(a) に示した。非常に精度の高い近似になっていることがわかる。図-5の横軸は式 (27) の定義にならったモード次数である。また図-6 (a) は厳密の、図-7 (a) は摂動解より求めたモード形である。縦軸が構造物の変位を 1 として正規化したモード振幅を表し、横軸には最左端に構造物 (S)、次いで左から TMD が振動数の低い順 ($-n \sim n$) に並んでいる。図には低次モードから順に $-5, -4, \dots, -0, +0, 4, 5$ と次数を付してある。摂動解が厳密解とよくあっていること、中心の 1 つの TMD を除いては構造物と非連成化していることが見て取れる。

(2) バンド幅が非常に狭い場合

バンド幅が 0 であれば、式 (24) の特性方程式が非常に簡単な形になる。すなわち、

$$(\omega_0^2 - \lambda^2)^{N-1} \left[(\omega_0^2 - (1 + \sqrt{\frac{\mu_{total}}{1 + \mu_{total}}}) \lambda^2) (\omega_0^2 - (1 - \sqrt{\frac{\mu_{total}}{1 + \mu_{total}}}) \lambda^2) \right] = 0 \dots\dots\dots (56)$$

となり、そのモード振動数 λ は、

$$\lambda_{\pm n} = \omega_0 / \sqrt{1 \pm \sqrt{\mu_{total} / (1 + \mu_{total})}} \dots\dots\dots (57)$$

となる。このうち最初の $N-1$ 個の固有振動数 ω_0 に対応するモード形は、

$$x_s = 0, x_{-n} + \dots + x_n = 0 \dots\dots\dots (58)$$

という $N-1$ 次元空間を張るベクトルになる。これらは構造物の振動と独立で、意味を持たない。後の二つの振動数に対応するモード形は、

$$\phi_{\pm 0} = \left[1, \pm \sqrt{\frac{1 + \mu_{total}}{\mu_{total}}}, \dots, \pm \sqrt{\frac{1 + \mu_{total}}{\mu_{total}}} \right] \dots\dots (59)$$

となり、質量比 μ_{total} の STMD と同じモード特性を持つことになる。

つまり、この場合は質量比 μ_{total} の STMD と同じ性能を持つことになる。図-4 (c) に $\mu_{total}=0.01$ の 11 個の TMD でバンド幅 $B=0.05$ 、減衰 $\xi_T=0.02$ の場合を示した。対応する STMD ($\mu_{total}=0.01$, $\xi_T=0.02$, 固有振動数 ω_T は式 (47) による) と一致している。以上の結果より、MTMD のバンド幅が狭くなっていくにつれて、質量比 μ_{total} の STMD の特性に近づいていくことが予想される。この場合、MTMD の利点であるロバスト性は失われていくことになる。

図-4 (c) と同じ条件で減衰を 0 とした場合の、11 TMD-構造物系のモード振動数の数値的に求めた厳密解と摂動解を比較したものが、図-5 (c) である。最大および最小の振動数が、厳密解と摂動解で大きく異なっている。また、このときのモード形の比較(図-6(c) および図-7 (c)) を見てもかなり異なっていることがわかる。

この理由を考えると、バンド幅が狭いときには、上述

のように質量比 μ_{total} の「大きな」STMDに近い特性を示すようになるためである。参考までに図-5(c)には、式(56)に与えた「大きな」STMDの最大および最小振動数も示した。この値は、MTMDの最大および最小振動数に非常に近くなっている。また、図-6(c)に示したモード形も、式(60)のモード形に近いSTMD型のモード形とその他の相互作用の小さいモード形が現れており、バンド幅0の解に近くなっている、モード特性がSTMDに近づいていることを示している。

(3) 中程度のバンド幅の場合

この場合の「中程度」とは、上述の2つの場合の中間程度というほどの意味で、特に厳密に用いているわけではない。上述の両極端の場合には、いずれもSTMDに近づくことが示されたから、この中程度の場合は、STMDとは異なるMTMDの性質が現れてくることが予想される。 $\mu_{total}=0.01$ の11個のTMDでバンド幅 $B=0.122$ 、減衰 $\xi_T=0.02$ の場合の周波数応答関数を図-4(b)に示す。同図上に、質量比 $\mu=0.01$ で最適設計をした場合²⁾、すなわち、

$$\omega_T = \omega_s / (1 + \mu), \quad \xi_T = \sqrt{3\mu / (8(1 + \mu))} \dots (60, 61)$$

のSTMDの周波数応答も示した。MTMDの方が高い性能を示していることがわかる。なお、MTMDの優位性は図-4(b)よりもむしろ後述の同調比に対するロバスト性にあることを断っておく。

中程度のバンド幅のときも、図-5(b)からわかるように振動解は非常に良く厳密解と合っている。また、このときのモード形の一例は、図-6(b)、7(b)に示したとおりである。

TMDが大きく揺れることは、ダッシュポットでのエネルギー消費が大きく、制振効果が大いことを意味する。Bの大きいケースの場合は中心の2つのモードのTMDの動きが小さく(図-6(a)、図-4(a))からわかるように ω/ω_s が1付近での制振性能が低い。逆にBが小さいときには、最外郭の2つのモードでTMDの動きが小さく(図-6(c))、 ω が ω_s から離れたときの制振性能が低下する(図-4(c))。一方、Bが中間のときには、中心部のモードも最外郭のモードとともに、他のモードと同じようにTMDの振幅が大きくなっており、幅広い外力振動数 ω に対して平均した制振性能が期待できる。事実、図-4(b)に見るように、構造物の固有振動数のまわりの広い外力振動数帯域で、ほぼ一定の周波数応答が得られている。

5. バンド幅の基準

前章では、バンド幅の変化に伴う無減衰モード形の変化に注目した。ここでは、これに基づいてMTMDの設計にあたってのバンド幅の目安を求める。

前章の末尾に触れたとおり、MTMDの特性が卓越す

るときには、すべてのモードでTMDの動きに大きな差がないモード形になっている。そこで「各モードのTMDの最大のモード振幅が等しい」ということを基準として、MTMDのバンド幅の目安を求める。ただし、すべてのモード振幅をそろえるのはあまりに複雑である。そこで、Bに対して特徴的な変化を示すのが、中心部のモードと最外郭のモードであるので、その2つのモードにおけるTMDの最大振幅をそろえることで、全体を代表させることにする。このとき、他のモードもほぼそろった振幅を持つことが期待できる。式(45)より、

$$\frac{1}{\epsilon_{+0}} = \frac{1}{\epsilon_n} \quad \text{or} \quad \frac{1}{\epsilon_{-0}} = \frac{1}{\epsilon_{-n}} \dots (62)$$

すなわち、

$$\frac{\sqrt{\mu \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{\mu}{2j^2 \beta^2}\right)}}{\left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{\mu}{2j^2 \beta^2}\right)} = \frac{-(2n\beta - P) + \sqrt{(2n\beta - P)^2 + 4\mu(1 + Q)}}{2(1 + Q)} \dots (63)$$

この場合は、 β の値は比較的小さいと考えられるので、

$$1 + \sum_{j=1}^n \frac{\mu}{2j^2 \beta^2} \approx \sum_{j=1}^n \frac{\mu}{2j^2 \beta^2}, \quad 1 + \sum_{j=1}^{2n} \frac{\mu}{4j^2 \beta^2} \approx \sum_{j=1}^{2n} \frac{\mu}{4j^2 \beta^2} \dots (64a, b)$$

とおけ、また、十分に n が大きければ、

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \approx \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{j^2} \approx \frac{\pi^2}{6} \equiv S \dots (65a)$$

$$\sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{j} \approx \gamma + \log(2n) \approx \gamma + \log(N) \equiv T \dots (65b)$$

と表せる¹³⁾。ここに、 $\gamma=0.57721\dots$ は、Eulerの定数である。式(64)、(65)を代入して、 $2n\beta=B$ について式(63)を解くと、

$$B = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\beta}\right)^2 S} + \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\beta}\right)^2 S + 8(\mu_{total} - \mu) T} \right) \dots (66)$$

となる。ここで、

$$O(\beta) \approx O(\mu_{total}), \quad O(\mu) \ll O(\mu_{total}) \dots (67, 68)$$

と考えられるから、

$$(\mu/\beta)^2 \ll 1 \dots (69)$$

である。式(69)のオーダーを考えに入れて、式(66)は、

$$B_c \equiv \frac{1}{4} (\sqrt{8\mu_{total} T}) \dots (70)$$

となる。この B_c をバンド幅の基準式として採用することにする。この式より、総質量の値とTMDの個数の決定がされれば、バンド幅の目安が得られることになる。実際の設計の手順を考慮すると、総質量およびTMDの個数は、格納スペース等の制約にしたがって、他の条件に先行して決定されると思われるから、この式は設計に適した形になっていると言えよう。先に挙げた図-6

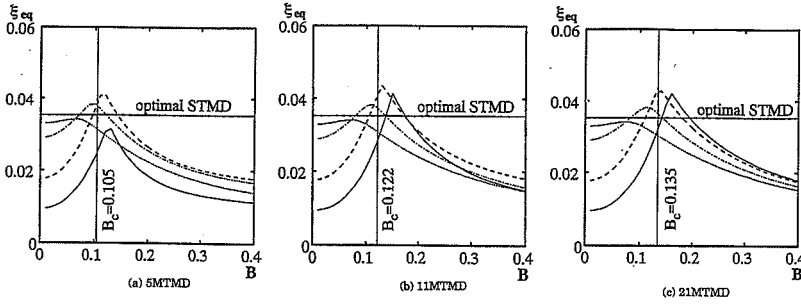


Fig. 8 Equivalent damping of MTMD

($\mu_{total}=0.01$) ; — : $\xi_r=0.01$, - - - : $\xi_r=0.02$, - · - · : $\xi_r=0.04$, ····· : $\xi_r=0.06$

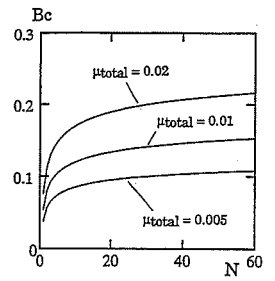


Fig. 9 B_c versus N

($\mu_{total}=0.005, 0.01$ and 0.02)

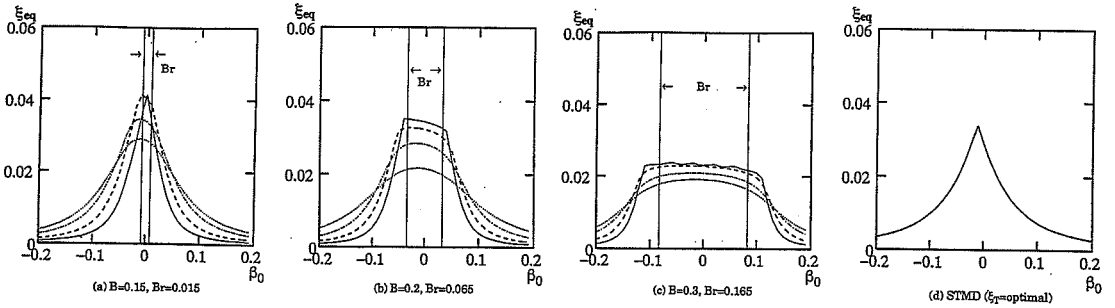


Fig. 10 Equivalent damping of MTMD ($\mu_{total}=0.01$) ; — : $\xi_r=0.01$, - - - : $\xi_r=0.02$, - · - · : $\xi_r=0.04$, ····· : $\xi_r=0.06$

(b) は、式 (70) の関係式を満たすときのモード形の例になっている。

図-8 (a)~(c) は、バンド幅 B と MTMD の効果の関係を、定量的に示したものである。計算例としては、 $\mu_{total}=0.01$ で、(a) では TMD を 5 個、(b)、(c) では 11 個および 21 個の場合を示した。MTMD の効果の指標としては、構造物に MTMD によって付加された等価付加減衰 ξ_{eq} を用いる。 ξ_{eq} は、1 自由度系応答のアナロジーから以下のように定義する。

$$\xi_{eq} = \frac{1}{2M\omega_s^2 H_s} - \xi_s \quad (71)$$

ここに、 H_s は、式 (20) で定義された構造物の周波数応答関数のピーク値である。

図-8 を見ると、TMD の減衰によってばらつきはあるものの、概ね先に与えた B_c の近傍でもっとも高い等価付加減衰を与えている。 B_c よりもバンド幅が広がっていくと、中心以外の TMD が非連成化していき MTMD としての効率がおちるので、等価付加減衰が低下する。また、 B_c よりもバンド幅が狭くなっていくと、質量比 μ_{total} の STMD の特性に近づくので MTMD としての特性が失われ、この場合も等価付加減衰が低下する。したがって、この B_c は、MTMD としての威力を発揮するバンド幅の下限値の目安として妥当であると言える。

なお、同じ質量比を持つ STMD の最適条件下での等

価付加減衰も図-8 に示したが、 B_c 付近では MTMD の方が高い性能となることは注目位置する。

図-9 に、 $\mu_{total}=0.005, 0.01$, および 0.02 の場合について、式 (70) の限界バンド幅 B_c の値を示した。

6. 同調比に関するロバスト性

前章で、 B_c が MTMD としての限界バンド幅を与えることを示したが、ここでは、 B_c に基づいて、同調比に関するロバスト性の基準を導く。

MTMD のバンド幅が B_c より小さいときには、構造物の周波数応答は STMD 型に近づき、ロバスト性も失われることが予想される。もし、バンド幅 B が、 B_c より大きければ、

$$B_r = B - B_c \quad (72)$$

が、ロバスト性のための余裕と考えられる。

実際に、 $\mu_{total}=0.01$ で、TMD が 21 個の場合についてロバスト性を調べたのが図-10 (a)~(c) である。(a) では、バンド幅 $B=0.15$ の場合、(b)、(c) では、それぞれ $B=0.2$ および 0.3 の場合を示した。横軸には、中心の TMD の振動数の構造物の振動数からのずれの度合い β_0 を取っている。また、式 (72) に与えたロバスト性の基準 B_r も同時に示している。ロバスト性の定量的な定義は難しいが、図-10 に見られるように ξ_{eq} がほぼ一定になっている範囲の広さがロバスト性を表していると考えられる。式 (72) の B_r は、全体の傾向を良

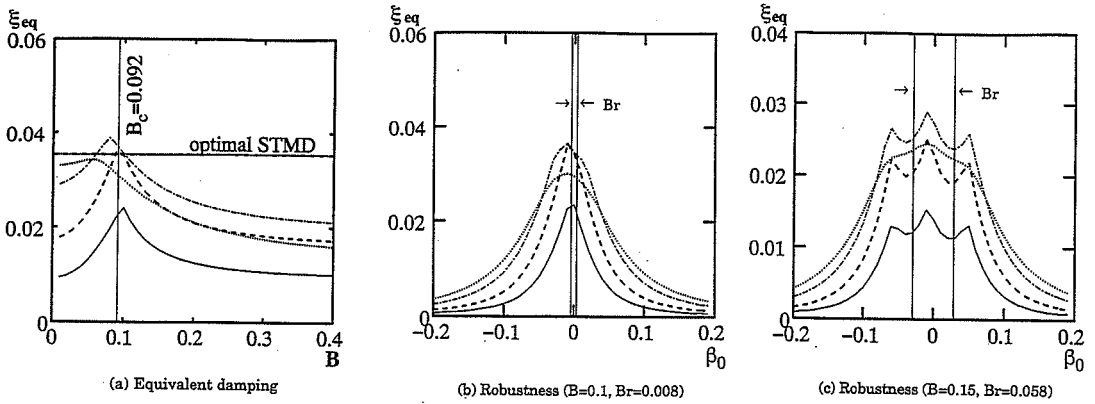


Fig.11 Efficiency of 3 MTMD ($\mu_{total}=0.01$) ; — : $\xi_r=0.01$, - - - : $\xi_r=0.02$, - · - · : $\xi_r=0.04$, ···· : $\xi_r=0.06$

く表していることが図より見てとれる。参考までに、最適条件式 (60) を満たす STMD についても図-10 (d) に示した。STMD では、ロバスト性が低いことがわかる。

注意すべきは、例えば、図-10 (a) に示したとおり、ある程度のバンド幅 ($B=0.15$) があっても、全くロバスト性がない場合があるが、これはバンド幅 B が $B_c (=0.122)$ に近い場合である。このとき、図-8 (b) からわかるように、低減衰下で STMD を上回る性能を示す。MTMD をロバスト性を主目的で設計するときには、ロバスト性を確保するために最適バンド幅より、想定される誤差の分バンド幅を広く取る必要があることがわかる。ただし、MTMD は図-8 に見るように限界バンド幅 B_c 付近で STMD より高い性能を有するもので、STMD と同程度の性能を有し、かつロバスト性をもつような設計も可能である。例えば、図-8 (b) の $\xi_r=0.01$ の場合で考えると、STMD と同程度の性能を得ようとする、ロバスト余裕 B_r は、0.06 となる。つまり、この場合、STMD と同程度の性能を有し、かつ片側 3 パーセント程度の振動数の誤差にはロバストな設計ができることになる。

また、ロバスト性が不要でないときは、MTMD のバンド幅を B_c にすることにより、同じ質量比で STMD よりも高い性能を得るという設計もできることになる。

7. 個数の影響

以上の検討は、式 (25) のオーダーから伺えるように、 N がある程度大きいことを前提としている。ただし、図-5 (b) に示したようなモード振幅の揃ったモード形状は、少ない数の TMD でも実現可能である。実際、図-1 で示した設定を成り立たせる最低の個数である 3 TMD でも、図-11 に示したように基本的に MTMD の性質を有することがわかる。また、前述のバンド幅に関する基準 B_c ならびに B_r も成立していることがわかる。ただし、ロバスト余裕 B_r の精度はやや低い。

8. まとめ

本論文では、MTMD-構造物系に対して、無減衰時のモード特性の摂動解をもとに、基礎的な検討を行った。その結果、MTMD-構造物系ではバンド幅を適切な値にすると、すべての TMD がすべてのモードに強く連成するモード形となることがわかった。このモード形状の特性から MTMD の限界バンド幅 B_c を、非常に簡単な関係式によって表した。さらに、同調化に関するロバスト性についても簡単な関係式が得られた。これらが数値解と比較して妥当であることも確かめられた。また、これをもとに同じ総質量比を持つ STMD よりも高性能な MTMD を設計すること、ならびに、STMD と同程度の性能を有しかつロバスト性を持つ MTMD を設計することが可能であることが示された。

なお、種々の外乱に対する MTMD の等価付加減衰などの制振効果を定量的に評価が設計上必要であるが、これについては文献 14) を参照されたい。

謝 辞

埼玉大学 山口宏樹助教授には、貴重な助言を賜った。ここに記して謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 津村直宜編：制振事例，振動制御コロキウム Part A「構造物の振動制御」，pp.102~172，土木学会，1991年7月。
- 2) Den Hartog, J.P. : Mechanical Vibrations, pp.93~105, Dover publications, New York, 1984.
- 3) Warburton, G.B. : Optimum Absorber for Various Combinations of Response and Excitation Parameters, Earthquake Engineering Structural Dynamics, Vol.10, pp.381~401, 1982.
- 4) Rowbottom, M.D. : The Optimization of Mechanical Dampers to Control Self-Excited Galloping Oscillations, Jour. of Sound and Vibration, 75(4), pp.559~576, 1981.
- 5) 岩浪孝一・背戸一登：2個の複合動的吸振器の最適設計

- 法とその効果, 日本機械学会論文集 (C編) 50巻 449号, pp.44~52, 1981年1月.
- 6) 高橋龍夫・倉西茂: 動吸振器による可撓性構造物の振動抑制について, 土木学会論文報告集第308号, pp.15~24, 1981年4月.
 - 7) 阿部雅人・藤野陽三: 振動解によるTMD-構造物系の動特性の理解と制振評価, 土木学会論文集, No.446/I-19, pp.157~166, 1992年4月.
 - 8) 藤野陽三: 構造物の制振対策(土木分野), 日本風工学会誌, No.44, pp.53~69, 1990年7月.
 - 9) Igusa, T. and Xu, K.: Wide-band response characteristics of multiple subsystem with high modal density, 2nd International Conference on Stochastic Structural Dynamics, Florida, USA, May, 1990.
 - 10) Igusa, T. and Xu, K.: Vibration redictopn characteristica of distributed tuned mass dampers, Proc. of the 4th International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics, UK, pp.596~605, July, 1991.
 - 11) Yamaguchi, H. and Harmpornchai, N.: fundamental characteristics of multiple tuned mass dampers for suppressing harmonically forced oscillations, Engineering and Structural Dynamics, Vol.22, No.1, pp.51~62, 1993.
 - 12) 藤野陽三・孫利民・山口宏樹: マルティプルTMD・TLDの特性の把握, 構造工学論文集, Vol.38A, pp.559~576, JSCE, 1992年3月.
 - 13) 森口繁一他: 数学公式II, pp.7~9, 岩波書店, 1990年.
 - 14) 阿部雅人・藤野陽三: マルティプル同調質量ダンパー(MTMD)の性能評価式, 土木学会論文集, 1993年4月. (1992.3.28受付)

DYNAMIC CHARACTERIZATION OF MULTIPLE TUNED MASS DAMPERS (MTMD) AND ITS FREQUENCY BAND WIDTH

Masato ABÉ and Yozo FUJINO

Characteristics of multiple tuned mass dampers (MTMD), whose natural frequencies are distributed to some band width around the natural frequency of structure, are investigated. Perturbation solutions of modal properties of MTMD-structure system are obtained neglecting the effect of non-proportional damping. It is shown that in an efficient MTMD all the TMD are strongly coupled with structure in any mode. Optimal band width is derived on the basis of perturbation solution.