

# 曲げ,あるいは面内力を受ける大形の任意4辺形 平板要素の剛性方程式

岡村宏一\*・石川一美\*\*・古市 亨\*\*\*

本文では,多格間で構成される平板構造の1パネルにわたるような大形の任意4辺形平板要素の剛性方程式を提案する。

曲げ,または面内力を受けるこれらの要素の節線上の任意の材端変位と材端力は,一方向無限板に面外,面内の一般化力が任意の方向に作用する場合の厳密解を重ね合わせ,節線上においてのみ選点法を併用して与えた。

種々の要素を接続して厳密解と比較した結果,提案した要素の十分な精度を確認した。  
**Key Words** : elastic analysis, stiffness equation, large-size quadrilateral plate element

## 1. まえがき

本文で提示する任意4辺形大形平板要素の剛性方程式は,形状的に任意性を持つのみならず,隅角点を含めた面内,面外の任意の挙動に対応できる大形の要素に関するものである。このような一定の座標系に適合しない不整形のパネルは,構造解析上,しばしば遭遇するものであるが,任意の拘束条件を持つような場合には,厳密な解析解を得難いことは周知のとおりである。したがって,一般には,汎用性のある解法として,離散化する数値解析法が用いられる。例えば,比較的単純な境界条件を与えた単一斜板構造の解析においても,近年,有限要素法<sup>1),2)</sup>, Spline要素法<sup>3),4)</sup>,有限帯板法<sup>5),6)</sup>, Spline帯板法<sup>7),8)</sup>,などを用いた解析例が見られる。しかしながら,有限差分法によるVogtの研究<sup>9)</sup>,あるいはCorner関数を用いたMorleyの研究<sup>10)</sup>,で指摘されたように,単一斜板の問題でも,特に鈍角部における断面力の特異性を生じ,解の安定性を保証できる要素の適合性が問題になる。一方,領域内のこのような断面力の特異性に対して,精度のよい連続解が得られる境界積分方程式法を用いて斜辺を持つ単一板の問題が扱われている。たとえば,周辺単純支持長方形板のGreen関数を用い,その境界の一部を残し,1つの斜辺に単純支持,または,自由の境界条件を与えた台形板,3角形板の曲げ問題の解析例<sup>11)</sup>が見られる。

さて,筆者はすでに,多格間平板構造の解析に応用できる1パネルにわたるような大形,かつ高精度の長方形要素を提案した<sup>12)</sup>。単一板の場合とはともかく,構造物の構造要素として使用する場合は,このような大形要素は

有効である。要素の隅角点を含めた4辺に,任意の材端変位と材端力を与え得る剛性方程式は,級数解法と選点法を組み合わせた方法によって構成した。すなわち,一方向無限板に面内,面外の部分線荷重,および部分線モーメントが作用する場合の比較的簡単な単級数の解を重ね合わせ,板内の支配方程式を厳密に満足させると同時に,周辺の材端条件のみを級数解と選点法を併用して与えている。また,これらの大形の板要素については,面内力,ならびに曲げを受けるそれぞれの例題について精度を確認し,構造解析上,有用なものであることを検証した。さらに,斜め方向に作用する線荷重,線モーメントの解を用いて,曲げを受ける大形の一方台形板要素,および斜板要素の剛性方程式を提案した<sup>13)</sup>。

本論文は,以上の成果を踏まえ,より一般的な任意4辺形大形平板要素について,隅角点を含めた,面内,面外の任意の挙動に対応できる剛性方程式を作成し,その有用性について検証した。

## 2. 曲げを受ける任意4辺形大形平板要素の剛性方程式

### (1) 基礎方程式と基本解

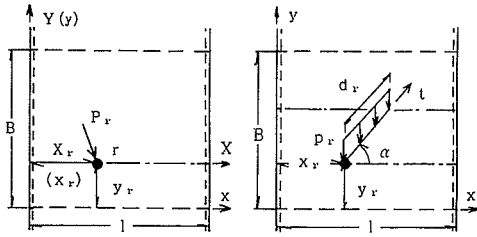
要素の弾性変形は等方性薄板理論に従うものとし,境界条件にKirchhoffの仮定を導入する。直交座標 $x, y$ で支配される平板のたわみ $w$ によって表わされる基礎方程式(同次方程式)は

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

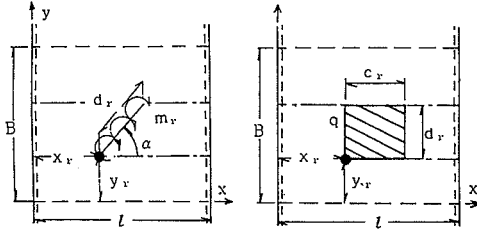
また, $x, y$ 方向のたわみ角 $\theta_x, \theta_y$ ,曲げモーメント $M_x, M_y$ ,ねじりモーメント $M_{xy}$ ,および $x, y$ 方向の換算せん断力 $V_x, V_y$ とたわみ $w$ の関係式は周知のとおりである<sup>12)</sup>。

そこでまず,図-1(a)に示すような座標 $X, Y$ に支配される相対2辺単純支持の $Y$ 方向無限板を考える。

\* 正会員 工博 大阪工業大学教授 土木工学科  
 (〒535 大阪市旭区大宮 1-16-1).  
 \*\* 正会員 東洋技研コンサルタント(株) 研究室  
 \*\*\* 正会員 同上



(a)集中荷重( $P_r$ )を受ける場合 (b)線荷重( $p_r$ )を受ける場合



(c)線モーメント( $m_r$ )を受ける場合 (d)部分分布荷重( $q$ )を受ける場合  
図-1 基本解のための一方向無限板

いま X 軸上の任意点  $X_r$  に面外からの集中荷重  $P_r$  を受ける場合のたわみ  $w$  ( $Y \geq 0$ ) を, 式 (1) の同次解 (級数解) によって与え, 次に, 同図に見るような座標軸  $x, y$  を考えて座標変換を行い, 任意点  $(x_r, y_r)$  に集中荷重  $P_r$  を受ける場合のたわみ  $w_p$  を与える<sup>12)</sup>. さらに, 図-1 (b) に示すような, 板内で任意の斜角  $\alpha$  を持つ  $t$  方向に, 分布幅  $d_r$  を持つ部分線荷重 (強さ  $p_r$ ) を受ける場合のたわみ  $w_p$  は, 前述の集中荷重を受ける場合のたわみを分布幅について線積分し, 次式のようになる.

$$w_p = p_r \cdot F_p \dots \dots \dots (2)$$

$$F_p = -\frac{l^3}{2\pi^4 D} \sum_n \frac{1}{n^4} [ \{ (S_1 + mY_1) \cos K_1 + H_1 S_2 \sin K_1 \} e^{-m\bar{Y}_1} - \{ (S_1 + mY_2) \cos K_2 + H_2 S_2 \sin K_2 \} e^{-m\bar{Y}_2} + H_3 \{ S_1 \cos K_3 - H_1 S_2 \sin K_3 - S_1 \cos K_4 + H_2 S_2 \sin K_4 \} ] \sin mx \dots \dots \dots (3)$$

ここで,  $m = n\pi/l$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ ,  $E$ : 弾性定数,  $\nu$ : ポアソン比,  $h$ : 板厚  
また,  $S_1 = 1 + \sin^2 \alpha$ ,  $S_2 = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ ,  $K_3 = K_1 + 2\alpha$ ,  $K_4 = K_2 - 2\alpha$

同様に, 図-1 (c) に示すような,  $t$  方向に分布幅  $d_r$  を持つ部分線モーメント (強さ  $m_r$ ) を受ける場合のたわみ  $w_m$  は, 前述のたわみ  $w_p$  に, 偶力の微分操作を加えて次式のようになる.

$$w_m = m_r \cdot F_m \dots \dots \dots (4)$$

$$F_m = \frac{\partial F_p}{\partial x_r} \sin \alpha + \frac{\partial F_p}{\partial y_r} \cos \alpha = -\frac{l^2}{2\pi^3 D} \sum_n \frac{1}{n^3} [ \{ H_1 m Y_1 \cos (K_1 - H_1 \alpha) + 2 \sin \alpha \sin K_1 \} e^{-m\bar{Y}_1} - \{ H_2 m Y_2 \cos (K_2 - H_2 \alpha) \} e^{-m\bar{Y}_2} + H_3 \{ 2 \sin \alpha \sin K_3 - 2 \sin \alpha \sin K_4 \} ] \sin mx \dots \dots \dots (5)$$

表-1

領域係数	$y_r + d_r \sin \alpha < y$	$y < y_r$	$y_r < y < y_r + d_r \sin \alpha$
$Y_1$	$y - y_r - d_r \sin \alpha$	$y_r + d_r \sin \alpha - y$	$y_r + d_r \sin \alpha - y$
$Y_2$	$y - y_r$	$y_r - y$	$y - y_r$
$K_1$	$m(x_r + d_r \cos \alpha) + \alpha$	$m(x_r + d_r \cos \alpha) - \alpha$	$m(x_r + d_r \cos \alpha) - \alpha$
$K_2$	$m x_r + \theta$	$m x_r - \theta$	$m x_r + \theta$
$H_1$	1	-1	-1
$H_2$	1	-1	1
$H_3$	0	0	1

表-2

領域係数	$y_r + d_r < y$	$y < y_r$	$y_r < y < y_r + d_r$
$Y_1$	$y - y_r - d_r$	$y_r + d_r - y$	$y_r + d_r - y$
$Y_2$	$y - y_r$	$y_r - y$	$y - y_r$
$H_1$	1	-1	-1
$H_2$	1	-1	1
$H_3$	0	0	1

$$+ 2 \sin \alpha \sin K_2 \} e^{-m\bar{Y}_2} + H_3 \{ 2 \sin \alpha \sin K_3 - 2 \sin \alpha \sin K_4 \} ] \sin mx \dots \dots \dots (5)$$

なお, 式 (3), (5) 中の  $Y_1, Y_2, K_1, K_2, H_1, H_2, H_3$  は, 着目点の位置  $y$  によって表-1 のように与えられる.

一方, 図-1 (d) に示すような, 部分等分布荷重 (強さ  $q$ ) を受ける場合のたわみ  $w_q$  は, 図-1 (a) の  $w_p$  を,  $x, y$  方向の分布幅  $c_r, d_r$  に関して積分すれば, 次式のようになる.

$$w_q = q \cdot F_q \dots \dots \dots (6)$$

$$F_q = -\frac{l^4}{2\pi^5 D} \sum_n \frac{1}{n^5} [ \{ H_1 (2 + m\bar{Y}_1) e^{-m\bar{Y}_1} - H_2 (2 + m\bar{Y}_2) e^{-m\bar{Y}_2} + 4H_3 \{ \cos m(x_r + c_r) - \cos mx_r \} \} ] \sin mx \dots \dots \dots (7)$$

なお, 式 (7) 中の  $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, H_1, H_2, H_3$  は着目点の位置  $y$  によって, 表-2 のように与えられる.

以上のように, 式 (2), (4), (6) によって与えられる  $w_p, w_m, w_q$  を,  $x, y$  方向のたわみ角, および断面力の諸式に代入すれば, 前述の線荷重  $p_r$ , 線モーメント  $m_r$ , 分布荷重  $q$  を受ける場合の  $x, y$  座標系におけるたわみ角, 断面力に関する基本解が得られる. しかもこれらの解は解析の全般にわたる精度を考慮して単級数によって計算され, さらに, その中で収束の悪い項を抽出し, 総和公式を用いて代数解に置き換え, 十分な収束値が保証される.

(2) 曲げを受ける要素の剛性方程式

剛性方程式を誘導するにあたり, まず, 図-2 に示すような大形の任意4辺形要素の領域を考える. また, その4辺 (以下, 節線  $i, j, \bar{i}, \bar{j}$  とよぶ) に相当する線上に任意の外力の分布を与え, 隅角点を含めて任意の変位を生じさせる力系を組み立てる. ここで節線上の任意の線荷重と線モーメントの分布を, 先に発表した解法<sup>12)</sup>と同様に節線上の細かく分割された区間で等分布する線荷重と線モーメントの重ね合わせによって与える. すな

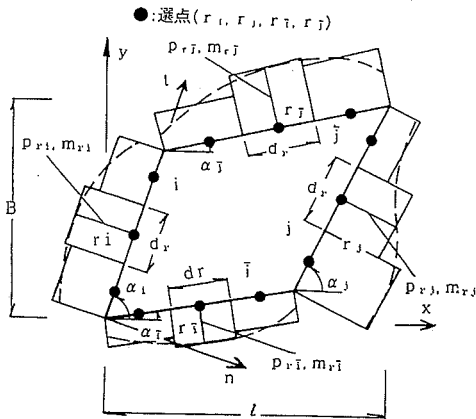


図-2 剛性方程式を求めするための外力の分布の近似

のように書かれる。

$$w = \sum_{r_i} (p_{r_i} F_p^* + m_{r_i} F_m^*) \sum_{r_j} + (p_{r_j} F_p^* + m_{r_j} F_m^*) + \sum_{r_i} (p_{r_i} F_p^* + m_{r_i} F_m^*) + \sum_{r_j} (p_{r_j} F_p^* + m_{r_j} F_m^*) \dots \dots \dots (8)$$

ここで、 $F_p^*$ 、 $F_m^*$ は、式(3)、(5)の $F_p$ 、 $F_m$ において、 $l$ を $2l$ に書き換えたものを表わし、 $r_i$ 、 $r_j$ 、 $r_i$ 、 $r_j$ に関する総和は、前述の分割区間における分布力の重ね合わせを表わす。

次に、 $x$ 、 $y$ 座標系で与えられたたわみ角、断面力の基本解を用いて式(8)と同様の重ね合わせを行い、さらに図-3の斜角 $\alpha$ を持つ任意方向 $t$ の節線上の選点における法線 $n$ 方向のたわみ角 $\theta_n$ 、曲げモーメント $M_n$ 、ねじりモーメント $M_{nt}$ 、換算せん断力 $V_n$ を次式で与える。

$$\begin{aligned} \theta_n &= \theta_x \sin \alpha - \theta_y \cos \alpha \\ M_n &= M_x \sin^2 \alpha + M_y \cos^2 \alpha + 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ M_{nt} &= (M_y - M_x) \sin \alpha \cos \alpha + M_{xy} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \\ V_n &= V_x \sin \alpha - V_y \cos \alpha \\ &+ \left\{ (1-\nu)(Q_x \cos \alpha - Q_y \sin \alpha) - 4 \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \cos \alpha \right) \right\} \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \dots \dots \dots (9)$$

また、境界条件に Kirchhoff の仮定を導入しているから、隅角点の拘束力も考慮しなければならない。隅角点の拘束力 $R$ は、次式で与えられる。

$$R = M_{nt,i} + M_{nt,i} \dots \dots \dots (10)$$

ここで、 $M_{nt,i}$ 、 $M_{nt,i}$ は、たとえば2辺 $i$ 、 $\bar{i}$ が交わる隅角点における各辺のねじりモーメント。

以上の計算過程から、図-4に示すような大形の任意4辺形板要素の節線 $i$ 、 $j$ 、 $\bar{i}$ 、 $\bar{j}$ の各節点における材端力と材端変位について、次の関係が得られる

$$\{f_b\} = [A_b] \{P_b\} \dots \dots \dots (11)$$

$$\{\delta_b\} = [B_b] \{P_b\} \dots \dots \dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \{f_b\} &= [V_{ni} M_{ni} V_{nj} M_{nj} V_{ni} M_{ni} V_{nj} M_{nj}]^T \\ \{\delta_b\} &= [w_i \theta_{ni} w_j \theta_{nj} w_i \theta_{ni} w_j \theta_{nj}]^T \\ \{P_b\} &= [p_{r_i} m_{r_i} p_{r_j} m_{r_j} p_{r_i} m_{r_i} p_{r_j} m_{r_j}]^T \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

式(13)中、 $\{f_b\}$ ：節線 $i$ 、 $j$ 、 $\bar{i}$ 、 $\bar{j}$ 上の各選点における $V_n$ 、 $M_n$ のベクトル。 $\{\delta_b\}$ ：節線 $i$ 、 $j$ 、 $\bar{i}$ 、 $\bar{j}$ 上の各選点における $w$ 、 $\theta_n$ のベクトル、 $\{P_b\}$ ：図-1(b)、(c)、図-2に示した各選点に与えた節線荷重のベクトル、 $[A_b]$ 、 $[B_b]$ ：式(11)、(12)の計算過程において得られる影響係数のマトリックス。

式(11)、(12)により節線荷重のベクトルを消去すると、

$$\{f_b\} = [A_b] [B_b]^{-1} \{\delta_b\} = [K_b] \{\delta_b\} \dots \dots \dots (14)$$

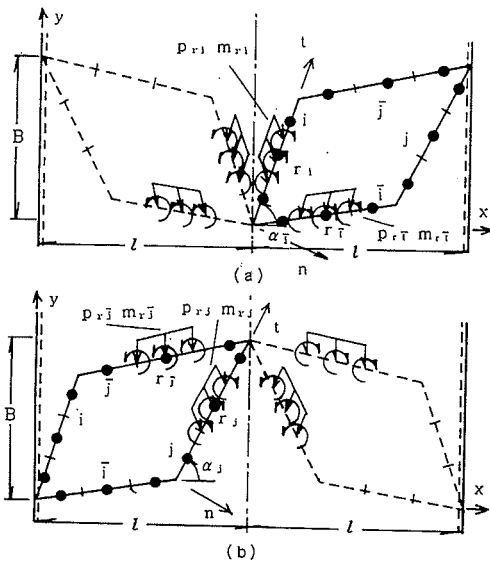


図-3 剛性方程式を求めための一方無限板

わち、図-2に示すように、節線上の選点( $r_i$ 、 $r_j$ 、 $r_i$ 、 $r_j$ )を中点にするように挟んでとった任意の小区間 $d_r$ にそれぞれ図示の強さの線荷重と線モーメントを作用させる。

このような板の力系は、図-3(a)、(b)に示す2つの力系を重ね合わせて作り出すことができる。同図(a)、(b)の板は、図-1(b)、(c)の板の辺長 $l$ を2倍にしたものである。図(a)はその右半分に着目し、節線 $i$ 、 $\bar{i}$ の選点 $r_i$ 、 $r_i$ を挟んでそれぞれ強さ $p_{r_i}$ 、 $m_{r_i}$ 、 $p_{r_i}$ 、 $m_{r_i}$ の線荷重と線モーメントを作用させ、同様に図(b)はその左半分に着目し、節線 $j$ 、 $\bar{j}$ 上の選点 $r_j$ 、 $r_j$ を挟んでそれぞれ強さ $p_{r_j}$ 、 $m_{r_j}$ 、 $p_{r_j}$ 、 $m_{r_j}$ の線荷重と線モーメントを作用させる。これら2つの力系を重ね合わせると、隅角点を含めた4つの節線に自由なたわみが与えられ、このときのたわみ $w$ は、(1)の基本解を用いて次

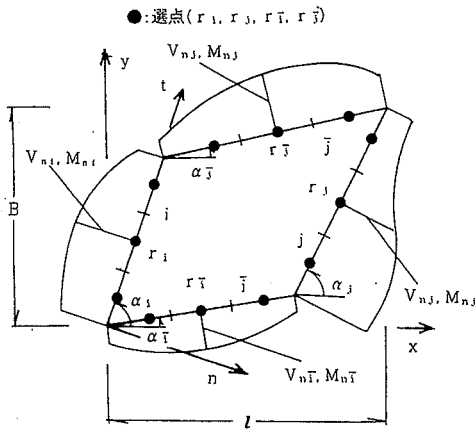


図-4 任意4辺形大形平板要素と材端力の分布

ここで,  $[K_b]$  は図-4に示した曲げを受ける大形任意4辺形板の剛性マトリックス.

一方, 図-1 (d) の板内荷重  $q$  による節線  $i, j, \bar{i}, \bar{j}$  に相当する各選点での変位 ( $w, \theta_n$ ) と断面力 ( $V_n, M_n$ ) は, 前述のように式 (6), (9) に基づいて求まる. この変位を式 (14) の節線変位で相殺し, 断面力を重ね合わせると荷重項のベクトルが得られる. すなわち

$$\{f_j\} = \{f_q\} - [K_b] \{\delta_q\} \dots\dots\dots (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \{f_j\} &= [V_{nfi} M_{nfi} V_{nfj} M_{nfj} V_{nki} M_{nki} V_{nkj} M_{nkj}]^T \\ \{f_q\} &= [V_{nqi} M_{nqi} V_{nqj} M_{nqj} V_{nqi} M_{nqi} V_{nqj} M_{nqj}]^T \dots\dots (16) \\ \{\delta_q\} &= [w_{qi} \theta_{nqi} w_{qj} \theta_{nqj} w_{qi} \theta_{nqi} w_{qj} \theta_{nqj}]^T \end{aligned} \right\}$$

式 (16) 中,  $\{f_j\}$ : 図-4に示されている任意4辺形板要素の各節線の選点における荷重項のベクトル,  $\{f_q\}$ : 図-1 (d) の板の板内荷重  $q$  による各節線に相当する選点の断面力のベクトル,  $\{\delta_q\}$ : 同様に変位のベクトル.

式 (14) と (15) を組み合わせると, 剛性方程式は,

$$\{f_s\} = [K_b] \{\delta_b\} + \{f_j\} \dots\dots\dots (17)$$

なお, 式 (10) について述べた仮定により, 以上の剛性方程式を誘導する過程で, 図-4に示されている任意4辺形板要素の隅点に拘束力  $R$  が残っている. これらは節線荷重, および板内荷重に対して, 式 (9), (10) より材端力と同様に求められる, 式 (14), (15) さらに式 (17) を求めるのと同様の操作によって次式を得る.

$$\left. \begin{aligned} \{f_R\} &= [K_R] \{\delta_b\} + \{f_{Rj}\} \\ \{f_R\} &= [R_i R_j]^T, \{f_{Rj}\} = [R_{Ri} R_{Rj}]^T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

式 (18) 中,  $\{f_R\}$ : 節線  $i, j$  の両端 (隅点) における拘束力のベクトル,  $\{f_{Rj}\}$ : 同様に荷重項のベクトル.

### 3. 面内力を受ける任意4辺形大形平板要素の剛性方程式

#### (1) 基礎方程式と基本解

要素の弾性変形は等方性平板理論に従うものとし, 応

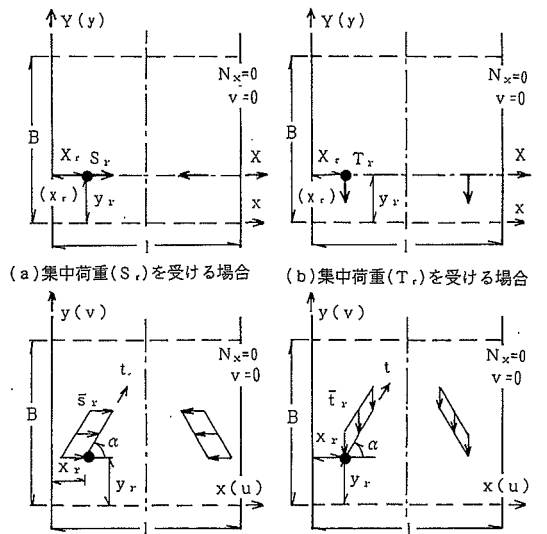


図-5 基本解を求めるための一方向無限板

力関数  $\phi$  を導入する. 直交座標  $x, y$  で支配される基礎方程式は

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \dots\dots\dots (19)$$

また,  $x, y$  方向の変位  $u, v$ , 軸力  $N_x, N_y$ , せん断力  $N_{xy}$  と応力関数  $\phi$  の関係式は周知のとおりである<sup>12)</sup>.

まず, 図-5 (a), (b) に示すような座標  $X, Y$  に支配され, 相対2辺に  $N_x=0, v=0$  の境界条件を与えた  $Y$  方向無限板 (シャイベ) を考える. ここで, 同図に示すような,  $X$  軸上の対称点  $(X_r, 1-X_r)$  に一對の集中面内力  $S_r, T_r$  を受ける場合の応力関数  $\phi_s, \phi_T$  ( $Y \geq 0$ ) を, 式 (19) の解 (級数解) によって与え, 次に, 同図の座標軸  $x, y$  を考えて座標変換を行う<sup>12)</sup>. さらに, 図-5 (c), (d) に示すような, 板内で任意の斜角  $\alpha$  を持つ  $t$  方向に, 分布幅  $d_r$  を持つ面内の対称部分線荷重 (強さ  $\bar{s}_r, \bar{t}_r$ ) を受ける場合の応力関数をそれぞれ  $\phi_s, \phi_t$  とする. これらは前述の  $\phi_s, \phi_T$  を分布幅に関して線積分し, 次式のように与えられる.

$$\phi_s = \bar{s}_r \cdot G_s, \phi_t = \bar{t}_r \cdot G_t \dots\dots\dots (20)$$

$$\begin{aligned} G_s = \frac{l^2}{2\pi^3} \sum \frac{1}{n^3} [ & \{ (S_3 + \nu_2 m Y_1) \sin K_1 - H_1 S_4 \cos K_1 \} e^{-m Y_1} \\ & - \{ (S_3 + \nu_2 m Y_2) \sin K_2 - H_2 S_4 \cos K_2 \} e^{-m Y_2} \\ & + H_3 \{ S_3 (\sin K_3 - \sin K_4) - S_4 (\cos K_3 \\ & + \cos K_4) \} ] \sin m x \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_t = - \frac{l^2}{2\pi^3} \sum \frac{1}{n^3} [ & \{ (S_5 + \nu_2 m Y_1) \cos K_1 + H_1 S_4 \sin K_1 \} e^{-m Y_1} \\ & - \{ (S_5 + \nu_2 m Y_2) \cos K_2 + H_2 S_4 \sin K_2 \} e^{-m Y_2} \\ & + H_3 \{ S_5 (\cos K_3 - \cos K_4) + S_4 (H_1 \sin K_3 \end{aligned}$$

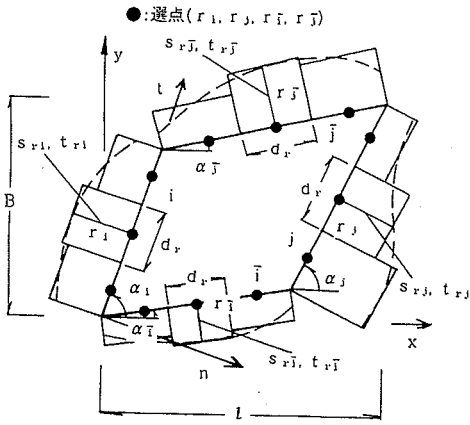


図-6 剛性方程式を求めるための外力の分布の近似

$$+H_2 \sin K_4) \} \sin mx \dots\dots\dots (22)$$

なお、 $S_3 = -\nu_1 + \nu_2 \sin^2 \alpha$ ,  $S_4 = \nu_2 \sin \alpha \cos \alpha$

$$S_5 = 2 + \nu_2 \sin^2 \alpha, \nu_1 = 1 - \nu, \nu_2 = 1 + \nu$$

また、式 (21), (22) 中の  $Y_1, Y_2, K_1, K_2, H_1, H_2, H_3$  は、着目点の位置  $y$  によって、表-1 のように与えられる。

以上のように、式 (20) で与えられる  $\phi_s, \phi_t$  を変位、断面力の諸式に代入すれば、前述の対称線荷重  $\bar{s}_r, \bar{t}_r$  を受ける場合の  $x, y$  座標系における変位、断面力の基本解が得られる。なお、これらの解も曲げを受ける板要素の基本解と同様に、十分な収束値が保証される。

(2) 面内力を受ける要素とその剛性方程式

まず、図-6 に示すような、曲げを受ける板要素 (図-2 参照) と同一の形状、ならびに接線上の選点と分割区間を持つ大形の板要素 (シャイベ) の領域を考える。そこで、斜角  $\alpha$  を持つ任意方向  $t$  の節線上に、図のように分割された  $t$  方向の外力 (強さ  $t_r$ )、および法線方向  $n$  の外力 (強さ  $s_r$ ) を作用させ、隅角点を含めて任意の変位を生じさせる力系を組み立てる。ここで、図-5(c), (d) に示される部分線荷重を次式のように変換する。

$$\left. \begin{aligned} s_r &= \bar{s}_r \sin \alpha + \bar{t}_r \cos \alpha \\ t_r &= \bar{s}_r \cos \alpha - \bar{t}_r \sin \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

次に、図-7 (a), (b) に示す 2 つの力系を重ね合わせる。これらの板は図-5 (c), (d) の板の辺長 1 を 2 倍にし、式 (23) の外力の変換を行って重ね合わせたもので、それぞれの右半分、左半分に着目し、節線  $i, j, \bar{i}, \bar{j}$  の各選点に、図-6 のような外力の分布と任意の変位を与える。このような重ね合わせの方法は、前章 (2) で説明した曲げを受ける板の場合と同様であるので詳細な記述は省略する。したがって、図-6 に示す板の応力関数  $\phi$  は、式 (8) と同様に次のように表わされる。

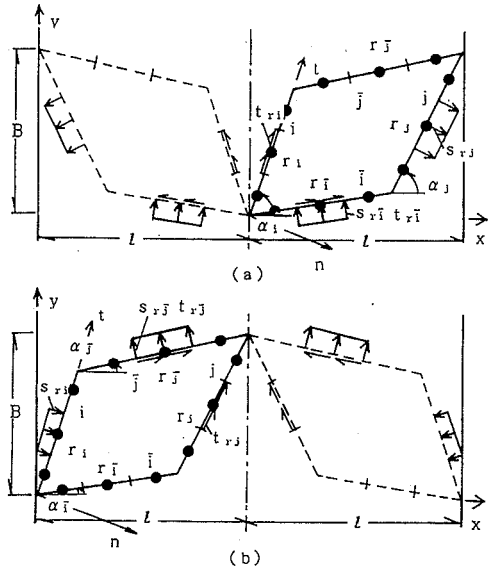


図-7 剛性方程式を求めるための一方向無限板

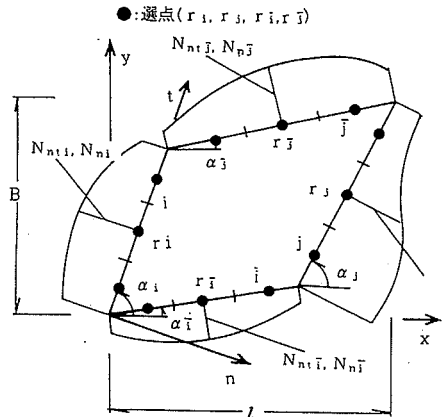


図-8 任意 4 辺形大形平板要素と材端力の分布

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{r\bar{r}} (s_{r\bar{r}} G_s^* + t_{r\bar{r}} G_t^*) + \sum_{r\bar{r}} (s_{r\bar{r}} G_{s\bar{t}}^* + t_{r\bar{r}} G_{t\bar{t}}^*) \\ &+ \sum_{r\bar{r}} (s_{r\bar{r}} G_s^* + t_{r\bar{r}} G_t^*) + \sum_{r\bar{r}} (s_{r\bar{r}} G_s^* + t_{r\bar{r}} G_t^*) \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

さらに、 $x, y$  座標系で与えられた変位、断面力の基本解を用いて式 (24) と同様の重ね合わせを行い、図-6 の各節線上的選点における  $t, n$  方向の変位  $u_i, v_n$  および軸力  $N_n$ 、せん断力  $N_m$  を次式で与える。

$$\left. \begin{aligned} u_i &= u \cos \alpha + v \sin \alpha \\ v_n &= u \sin \alpha - v \cos \alpha \\ N_n &= N_x \sin^2 \alpha + N_y \cos^2 \alpha - 2N_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ N_m &= N_{xy} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - (N_y - N_x) \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

以上の結果を用い、前章 (2) で説明した式 (11), (12), および (14) と同様の演算を行うと、図-8 に示すような節線  $i, j, \bar{i}, \bar{j}$  の選点に任意の材端力と材端変位を持

つ面内力を受ける任意4辺形大形板要素の剛性方程式が次の形に得られる。

$$\left. \begin{aligned} \{f_e\} &= [K_e] \{\delta_e\} \\ \{f_e\} &= [N_{ni} N_{ni} N_{nj} N_{nj} N_{ni} N_{ni} N_{nj} N_{nj}]^T \\ \{\delta_e\} &= [u_i v_{ni} u_j v_{nj} u_i v_{ni} u_j v_{nj}]^T \end{aligned} \right\} \dots\dots (26)$$

式(26)中,  $\{f_e\}$ : 節線  $i, j$  の各選点の  $N_n, N_{in}$  のベクトル,  $\{\delta_e\}$ : 節線の各選点の  $u_i, v_n$  のベクトル,  $[K_e]$ : 剛性マトリックス

#### 4. 板内点の変位と断面力

##### (1) 曲げを受ける要素の板内点の変位と断面力

解析結果として得られた各節線の選点における変位のベクトルを  $\{\delta_b\}$  とし, 図-2の節線荷重によるものを  $\{\delta_{bp}\}$ , および図-1.(d)の板内荷重  $q$  によるものを  $\{\delta_q\}$  とすれば

$$\{\delta_b\} = \{\delta_{bp}\} + \{\delta_q\} \dots\dots (27)$$

ここで, 板内荷重を考慮した板内点のたわみを求めるための換算節線荷重を  $\{\bar{P}_b\} = [\bar{p}_{ri} \bar{m}_{ri} \bar{p}_{rj} \bar{m}_{rj} \bar{p}_{ri} \bar{m}_{ri} \bar{p}_{rj} \bar{m}_{rj}]^T$  とすれば, 式(11), 式(27)より

$$\{\delta_{bp}\} = [B_b] \{\bar{P}_b\} \dots\dots (28)$$

$$\{\bar{P}_b\} = [B_b]^{-1} \{\delta_b - \delta_q\} \dots\dots (29)$$

したがって, 板内点のたわみ  $w$  は, 式(8), 式(6)を重ね合わせて次式で与えられる。

$$\begin{aligned} w = & \sum_{ri} (\bar{p}_{ri} F_p^* + \bar{m}_{ri} F_m^*) + \sum_{rj} (\bar{p}_{rj} F_p^* + \bar{m}_{rj} F_m^*) \\ & + \sum_{ri} (\bar{p}_{ri} F_p^* + \bar{m}_{ri} F_m^*) + \sum_{rj} (\bar{p}_{rj} F_p^* + \bar{m}_{rj} F_m^*) + q F_q \\ & \dots\dots (30) \end{aligned}$$

また,  $x, y$  座標系の基本解, あるいは式(9)の関係式を用いれば, 板内点の  $x, y$  あるいは  $t, n$  方向の断面力が得られる。

##### (2) 面内力を受ける要素の板内点の変位と断面力

図-6の要素の節線荷重のベクトルを  $\{S_b\} = [S_{ri} t_{ri} S_{rj} t_{rj} S_{ri} t_{ri} S_{rj} t_{rj}]^T$  とすれば, これらによる周辺各選点の変位のベクトル  $\delta_{es}$  は, 曲げの場合の式(11)と同様に次式で表わされる。

$$\{\delta_{es}\} = [B_s] \{S_b\} \dots\dots (31)$$

解析結果として得られた各選点の変位のベクトル  $\{\delta_e\}$  は, 板内荷重を考慮していないので,

$$\{\delta_e\} = \{\delta_{es}\} \dots\dots (32)$$

したがって, 節線荷重  $\{S_b\}$  は次式で与えられる。

$$\{S_b\} = [B_s] \{\delta_e\} \dots\dots (33)$$

結局, 板内点の応力関数は式(24)で与えられ,  $x, y$  座標系の基本解, あるいは式(25)の関係式を用いれば, 板内点の  $x, y$ , あるいは  $t, n$  方向の変位と断面力が得られる。

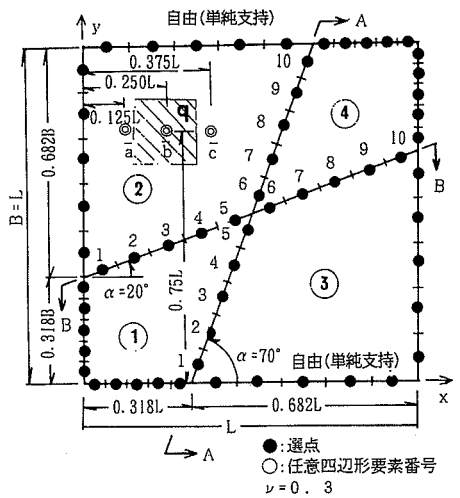


図-9 解析モデル

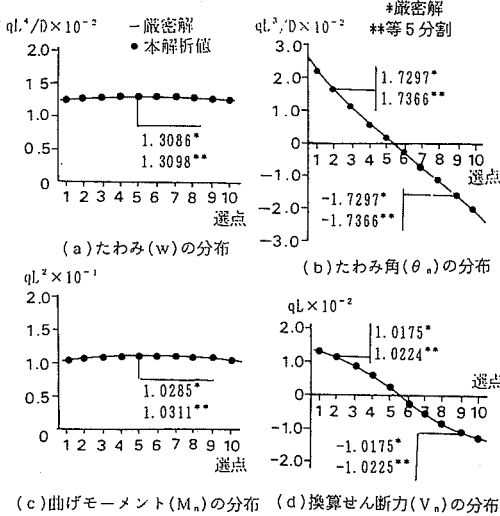
#### 5. 数値計算例

ここでは, 任意4辺形大形板要素の剛性方程式の精度を検証するための基本的な例題を示す。なお, 本文の計算はすべて倍精度計算によって行い, 要素の剛性方程式を作成するための基本解は, 有効数字12桁の収束値を保証している。

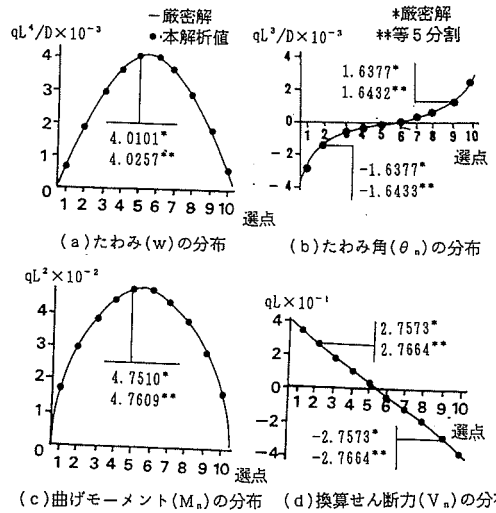
##### (1) 曲げを受ける要素の数値計算例

まず, 図-9に示すような等分布荷重(強さ  $q$ : 図-9のような非対称部分等分布荷重と全面等分布荷重の2ケース)を受ける相対2辺単純支持, 他の2辺自由の単一正方形板を, 図のように等5分割に選点を配置した板要素4枚を直接剛性法によって接続する。ただし, 曲げを受ける板の場合は, 隅角点に残っている拘束力の不平衡を解除するため, 隅角点に集まる各節線の隅角点近傍で隣接する選点の解析精度に影響をおよぼさない範囲(本例題の場合は分割区間の1/10の区間)<sup>14)</sup>に等分布する換算せん断力作用させ, その区分の選点におけるたわみ( $w$ )の連続条件を満足させると同時に, 隅角点の拘束力の不平衡を解除する。また, 図のように, 要素の隅点の開角に変化を持たせて接続するようにし, 板の中心における要素①, ④の開角は50°, ②③の開角は130°としている。次に各要素の各選点の材端変位( $w, \theta_n$ ), 材端力( $M_n, V_n$ )の計算結果を厳密解(図-9の板を分割しないで単一板として求めた有効数字6桁の収束値)と比較した。図-10, 11, 12は, 全面等分布荷重を受ける場合のデータで, 図-12は, 4辺単純支持の場合のものである。いずれの場合も誤差は1%以内に留まっている。

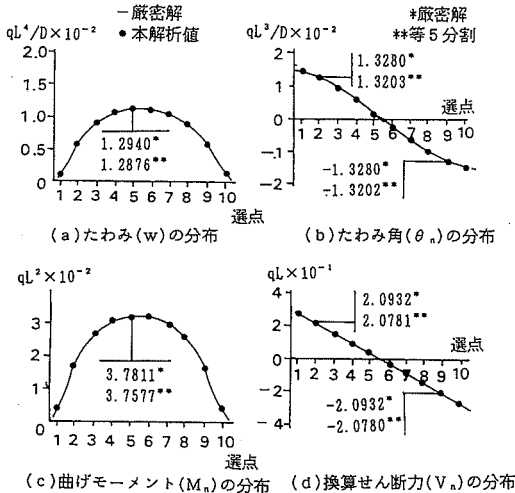
次に, 表-3, 4に示すデータは, 図-9に指示した内点  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  の全面等分布荷重を受ける場合の変位と断



図一〇 等分布荷重が作用した場合のA-A断面の変位と断面力の分布 (2辺単純, 2辺自由)



図一〇 等分布荷重が作用した場合のA-A断面の変位と断面力の分布 (4辺単純支持)



図一〇 等分布荷重が作用した場合のB-B断面の変位と断面力の分布 (2辺単純, 2辺自由)

表一三 等分布荷重が作用した場合の内点の変位と断面力 (2辺単純, 2辺自由)

着目点	たわみ (w)	たわみ角 ( $\theta_a$ )	たわみ角 ( $\theta_a$ )
	$q L^4 / D \times 10^{-2}$	$q L^3 / D \times 10^{-3}$	$q L^3 / D \times 10^{-2}$
$\bar{a}$	0.5230 (0.5223)	3.9358 (3.9362)	0.1252 (0.1232)
$\bar{b}$	0.9581 (0.9588)	2.9638 (2.9630)	0.2285 (0.2273)
$\bar{c}$	1.2470 (1.2463)	1.5828 (1.5834)	0.2994 (0.2967)

着目点	曲げモーメント ( $M_a$ )	曲げモーメント ( $M_a$ )	換算せん断力 ( $V_a$ )	換算せん断力 ( $V_a$ )
	$q L^2 \times 10^{-1}$	$q L^2 \times 10^{-1}$	$q L \times 10^{-1}$	$q L \times 10^{-1}$
$\bar{a}$	0.5469 (0.5430)	0.1033 (0.1015)	3.0091 (3.0088)	-0.0243 (-0.0252)
$\bar{b}$	0.9335 (0.9308)	0.1697 (0.1664)	1.9463 (1.9451)	-0.0391 (-0.0383)
$\bar{c}$	1.1658 (1.1643)	0.2062 (0.2024)	0.9557 (0.9554)	-0.0477 (-0.0425)

\* ( ) 内は厳密解

面力を, それぞれの境界について示しているが, 誤差は1%以内に留まっている。

図一13, 14, 15は, 図一9に示す非対称部分等分布荷重を受ける場合のデータで, 図一15は4辺単純支持の場合のものである。いずれの場合も誤差は1%以内に留まっている。

次に, 表一5, 6に示すデータは, 内点 $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$ の非対称部分等分布荷重を受ける場合の変位と断面力を, それぞれの境界について示しているが, 誤差は1%以内に留まっている。

なお, 以上のすべてのデータについて, 等7分割として計算した場合も誤差は同一のレベルであった。本文の

表一四 等分布荷重が作用した場合の内点の変位と断面力 (4辺単純支持)

着目点	たわみ (w)	たわみ角 ( $\theta_a$ )	たわみ角 ( $\theta_a$ )
	$q L^4 / D \times 10^{-2}$	$q L^3 / D \times 10^{-3}$	$q L^3 / D \times 10^{-2}$
$\bar{a}$	1.2971 (1.2914)	8.7484 (8.7501)	-3.4534 (-3.4567)
$\bar{b}$	2.3295 (2.3281)	6.3043 (6.3010)	-6.3055 (-6.3010)
$\bar{c}$	2.9868 (2.9853)	3.2545 (3.2588)	-8.1333 (-8.1391)

着目点	曲げモーメント ( $M_a$ )	曲げモーメント ( $M_a$ )	換算せん断力 ( $V_a$ )	換算せん断力 ( $V_a$ )
	$q L^2 \times 10^{-2}$	$q L^2 \times 10^{-2}$	$q L \times 10^{-1}$	$q L \times 10^{-1}$
$\bar{a}$	1.9328 (1.9361)	1.7265 (1.7283)	2.4156 (2.4103)	-0.8683 (-0.8633)
$\bar{b}$	2.9466 (2.9438)	2.9481 (2.9438)	1.4871 (1.4819)	-1.4850 (-1.4813)
$\bar{c}$	3.4259 (3.4223)	3.6519 (3.6561)	0.7011 (0.7039)	-1.8269 (-1.8233)

\* ( ) 内は厳密解

表一五 部分等分布荷重が作用した場合の内点の変位と断面力 (2辺単純, 2辺自由)

着目点	たわみ (w) $qL^4/D \times 10^{-4}$	たわみ角 ( $\theta_x$ ) $qL^3/D \times 10^{-3}$	たわみ角 ( $\theta_y$ ) $qL^3/D \times 10^{-3}$
a	3.6453 (3.6419)	2.6842 (2.6897)	0.3165 (0.3187)
b	6.4071 (6.4038)	1.6267 (1.6257)	0.5650 (0.5615)
c	7.6259 (7.6291)	0.3804 (0.3763)	0.6841 (0.6832)

着目点	曲げモーメント ( $M_x$ ) $qL^2 \times 10^{-2}$	曲げモーメント ( $M_y$ ) $qL^2 \times 10^{-2}$	換算せん断力 ( $V_x$ ) $qL \times 10^{-2}$	換算せん断力 ( $V_y$ ) $qL \times 10^{-2}$
a	0.6081 (0.6042)	0.3219 (0.3265)	7.5091 (7.5081)	0.5811 (0.5863)
b	1.1149 (1.1173)	0.5762 (0.5731)	1.2860 (1.2854)	0.9239 (0.9285)
c	0.9055 (0.9070)	0.4371 (0.4350)	-4.7221 (-4.7216)	0.9166 (0.9195)

\* ( ) 内は厳密解

表一六 部分等分布荷重が作用した場合の内点の変位と断面力 (4辺単純支持)

着目点	たわみ (w) $qL^4/D \times 10^{-4}$	たわみ角 ( $\theta_x$ ) $qL^3/D \times 10^{-4}$	たわみ角 ( $\theta_y$ ) $qL^3/D \times 10^{-4}$
a	1.2167 (1.2189)	8.8329 (8.8316)	-2.0523 (-2.0578)
b	2.0251 (2.0284)	3.5465 (3.5432)	-3.5400 (-3.5429)
c	2.1071 (2.1044)	-1.7739 (-1.7727)	-4.1493 (-4.1532)

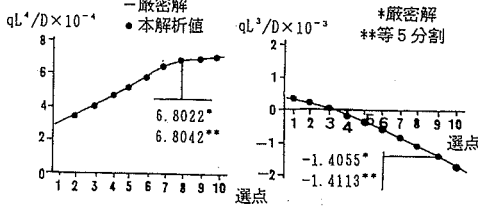
着目点	曲げモーメント ( $M_x$ ) $qL^2 \times 10^{-3}$	曲げモーメント ( $M_y$ ) $qL^2 \times 10^{-3}$	換算せん断力 ( $V_x$ ) $qL \times 10^{-2}$	換算せん断力 ( $V_y$ ) $qL \times 10^{-2}$
a	3.3916 (3.3972)	3.8455 (3.8422)	7.1088 (7.1081)	-0.6241 (-0.6269)
b	6.6754 (6.6741)	6.6771 (6.6741)	0.9985 (0.9972)	-0.9981 (-0.9972)
c	3.9129 (3.9143)	5.3549 (5.3523)	-4.8526 (-4.8501)	-1.0041 (-1.0031)

\* ( ) 内は厳密解

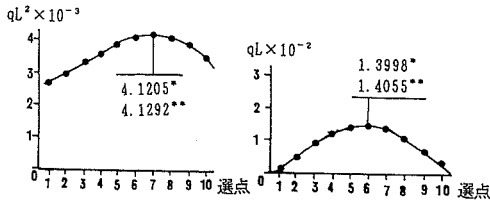
解法は, 板の領域で厳密解を用いている. また, 周辺に作用させる仮想力も厳密に積分され, 隅角点拘束力を含めつり合い条件を満している. 数値解析の結果, 3~5分割で代表的な点(選点)では前述のようにほとんど正当な解を与える<sup>12), 14)</sup>. 分割数を増加させても誤差のレベルは変わらず, 分布形状についての情報を増やすことになる. 図一16に示す周辺固定菱形板の鈍角部における固定モーメントの集中性, 内点のたわみと断面力の別解<sup>10)</sup>との比較を図一17, および表一7に示すが, 良好な一致が見られる.

(2) 面内力を受ける要素の数値計算例

図一18に示すような相対2辺に面内の部分等分布荷重(強さs)を受け, 他の2辺が自由な単一正方形板を, 図一9の板と同様に4分割して接続した. 図一19, 20には各要素の各選点の材端変位( $u_i, v_i$ ), 材端力( $N_i, N_{ni}$ )のデータを, 表一8には, 図一18に指示した内点,  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$ の変位と断面力のデータを示し, 厳密解(図一18の板を分割しないで単一板として求めた有効数字6桁の収束値)と比較している. いずれの場合も誤差は1%以

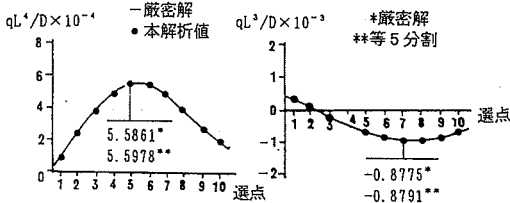


(a) たわみ (w) の分布 (b) たわみ角 ( $\theta_x$ ) の分布

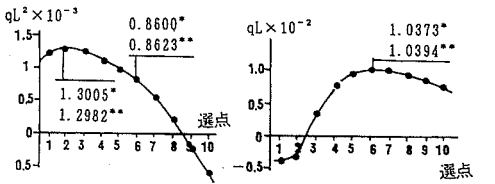


(c) 曲げモーメント ( $M_x$ ) の分布 (d) 換算せん断力 ( $V_x$ ) の分布

図一13 部分等分布荷重が作用した場合のA-A断面の変位と断面力分布 (2辺単純, 2辺自由)

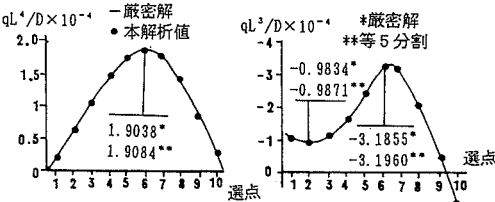


(a) たわみ (w) の分布 (b) たわみ角 ( $\theta_x$ ) の分布

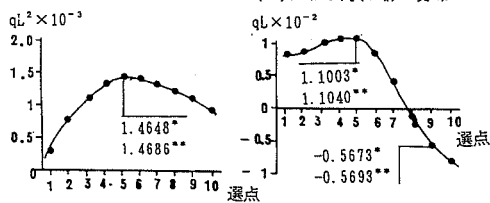


(c) 曲げモーメント ( $M_x$ ) の分布 (d) 換算せん断力 ( $V_x$ ) の分布

図一14 部分等分布荷重が作用した場合のB-B断面の変位と断面力分布 (2辺単純, 2辺自由)



(a) たわみ (w) の分布 (b) たわみ角 ( $\theta_x$ ) の分布



(c) 曲げモーメント ( $M_x$ ) の分布 (d) 換算せん断力 ( $V_x$ ) の分布

図一15 部分等分布荷重が作用した場合のA-A断面の変位と断面力分布 (4辺単純支持)



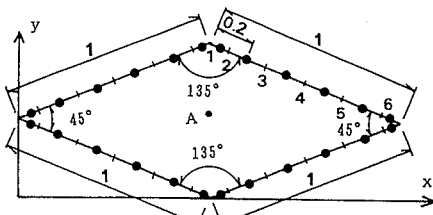


図-16 解析モデル ( $\nu=0.3$ )

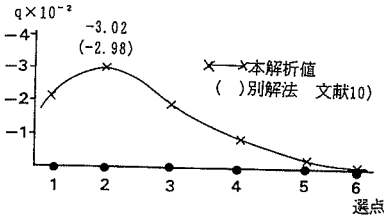


図-17 固定モーメント ( $M_n$ )

表-7 着目点 A の変位と断面力

たわみ (w)		曲げモーメント ( $M_x$ )		曲げモーメント ( $M_y$ )	
$q/D \times 10^{-3}$		$q \times 10^{-2}$		$q \times 10^{-2}$	
本解析値	別解法	本解析値	別解法	本解析値	別解法
0.373	0.377	0.988	0.976	1.458	1.444

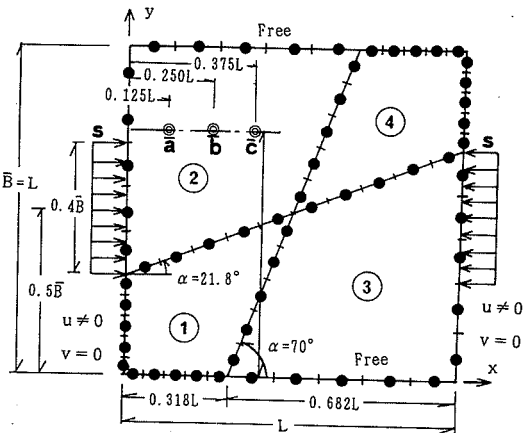
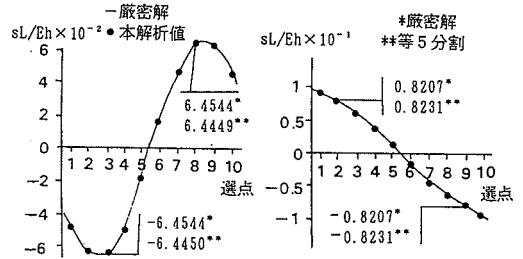


図-18 解析モデル

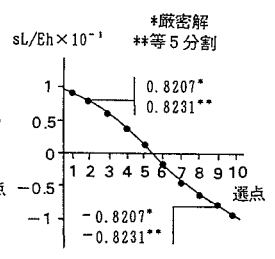
内に留まり、等7分割として計算した場合も誤差は同一のレベルであった。

## 6. まとめ

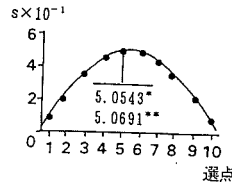
本文で提示した1パネルにわたるような大形の任意4辺形要素の剛性方程式は、隅角点を含めた任意の4辺に、曲げと面内力に対応する任意の材端力と材端変位を与え得る高精度のものである。すなわち、剛性方程式の作成にあたっては、要素の変位および断面力を要素の支配方程式を厳密に満足する級数解によって与え、要素の



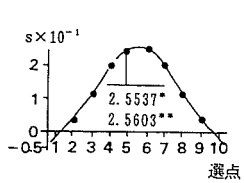
(a)変位 ( $v_n$ ) の分布



(b)変位 ( $u_n$ ) の分布

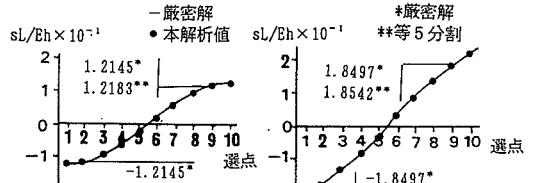


(c)軸力 ( $N_n$ ) の分布

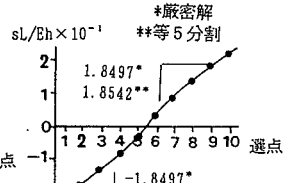


(d)せん断力 ( $N_{sn}$ ) の分布

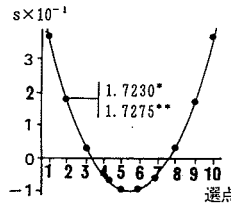
図-19 A-A 断面の変位と断面力の分布



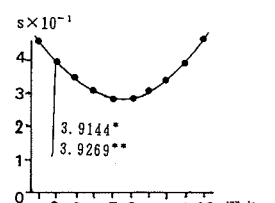
(a)変位 ( $v_n$ ) の分布



(b)変位 ( $u_n$ ) の分布



(c)軸力 ( $N_n$ ) の分布



(d)せん断力 ( $N_{sn}$ ) の分布

図-20 B-B 断面の変位と断面力の分布

表-8 内点の変位と断面力

着目点	変位 ( $u$ )	変位 ( $v$ )	軸力 ( $N_x$ )	軸力 ( $N_y$ )
	$sL/Eh \times 10^{-1}$	$sL/Eh \times 10^{-1}$	$s \times 10^{-1}$	$s \times 10^{-1}$
a	-1.5269 (-1.5250)	-0.5619 (-0.5645)	3.1261 (3.1200)	0.5841 (0.5824)
b	-1.0771 (-1.0737)	-0.7286 (-0.7300)	3.9311 (3.9292)	-0.3871 (-0.3853)
c	-0.5481 (-0.5458)	-0.7749 (-0.7725)	4.0916 (4.0899)	-0.8090 (-0.8085)

\* ( ) 内は厳密解

材端条件のみを級数解法と選点法を併用して与えている。しかも、要素の変位および断面力は、一方向無限板に部分線荷重が作用する場合の単級数の解の重ね合わせによって構成されており十分な収束値が保証されている。

5. (1), (2) で検証した各種のモデルについて見れ

ば,荷重系,開角,領域の大小,節線上の選点,あるいは,板内点によらず,本解析値と厳密解の差異は1%以内に留まっている。

以上のように,本文で提示した周辺に任意の拘束条件を持つ大形の任意4辺形板要素は,不規則なパネルを持つ平板構造の解析に有用なものと考ええる。

謝辞:本研究を行うにあたって,赤松邦康君(当時,大阪工業大学大学院生,現在日本道路公団)に協力して頂いた。記して謝意を表します。

#### 参考文献

- 1) Cheung, Y. K., King, I. P. and Zienkiwicz, O. C. : Slab bridges with arbitrary shape and Support conditions ; a general method of analysis based on finite elements, Proc. Inst. Civ. Engrs, Part 2, Vol.40, pp.9~36, 1968.
- 2) Gustafson, W.C. and Wright, R. N. : Analysis of skewed composite girder bridges, J. struc. Div. Proc. of ASCE, Vol.94, ST.4, pp.919~941, 1968.
- 3) Mizusawa, T. and Kajita, T. : Analysis of skew plates in bending by using B-spline functions, Memoirs of Daido Institute of Technology, 14, pp.85~91, 1979.
- 4) Mizusawa, T., Kajita, T. and Naruoka, M. : Analysis of skew plate problems with various constrains, J. of sound and vibrations, 73, pp.575~584, 1980.
- 5) Brown, T. G. and Ghali, A. : Semi-analytic solution of skew plates in bending, Proc. Instn. Civ. Engr., part 2, Vol.57, pp.165~175, 1974.
- 6) Mukhopadhyay, M. : Finite strip method of analysis of clamped skew plate in bending, Proc. Instn. Civ. Engr., Part 2, Vol.61, pp.189~195, 1976.
- 7) Li, W. Y., Cheung, Y. K. and Tham, L. G. : Spline finite strip analysis of general plates. J. Eng. Mech. A.S.C.E, Vol.112, pp.43~54, 1986.
- 8) 水澤富作・梶田建夫:斜板の曲げおよび振動解析へのSpline帯板法の適用について,土木学会論文報告集, No.341, pp.147~154, 1984.
- 9) Vogt, H. : Das statische Verhalten von zweiseitig auf gelagerten schiefwinkligen einfeldplatten, Beton und Stahlbetonbau, Heft. 11, pp.291~294, 1955.
- 10) Morley, L. S. D. : Bending of clamped rectilinear plates, Quant. J. Mech. Appl. Math, Vol.17, pp.293~317, 1964.
- 11) Irschik, H. and Ziegler, F. : Application of the Green's function method to thin elastic polygonal plates, Acta Mechanica, Vol.39, pp.155~169, 1981.
- 12) 岡村宏一・石川一美・古市 亨:多格間平板構造の一解法,土木学会論文集,第416号/I-13, pp.275~284, 1990.
- 13) 岡村宏一・石川一美・古市 亨:曲げを受ける大形直交異方性斜板要素の剛性マトリックス,第13回構造工学における数値解析シンポジウム論文集,日本鋼構造協会, pp.117~122, 1989.
- 14) 岡村宏一・石川一美:多経間曲線平板構造の一解法,土木学会論文集,第374号/I-6, pp.379~388, 1986.

(1992.8.24 受付)

## STIFFNESS EQUATIONS OF LARGE-SIZE QUADRILATERAL PLATE ELEMENTS UNDER BENDING OR IN-PLANE FORCES

Hirokazu OKAMURA, Kazumi ISHIKAWA and Tohru FURUICHI

This paper proposes high precision stiffness equations for large-size quadrilateral plate elements, that can be applied in the analysis of plate structures composed by one or more panels.

Displacements and stress resultants can be applied to the elements, whose arbitrary boundary conditions are obtained by the superposition of fundamental solutions in a single trigonometric series for the problem of semi-infinite plates in one of the directions. The nodal conditions along the element edge were considered by combining the analytical method above mentioned with a numerical method (point-matching method).

The accuracy of the results obtained in the numerical calculations confirms the usefulness of the stiffness equations proposed herein.