

**投稿論文** (和文ノート)

**TECHNICAL**

**NOTE**

# 節理方向のグループ化と確率的モデル化に関する一考察

大西有三\*・中川誠司\*\*

節理性岩盤の挙動は、その内部に多数存在する節理の方向性が大きな影響を持つと考えられる。将来、岩盤の信頼性設計を行う場合、この分布についてより詳細な記述を確率・統計的に行う必要が有る。本報告では、繰り返しによって節理の方向グループと各グループの確率分布を同時に推定する、卓越方向解析の新しい手法の提案を行った。

**Keywords:** joint orientation, clustering, fisher distribution, bingham distribution

## 1. はじめに

岩盤内に存在する地質学的な不連続面には、比較的規模が大きく、数の限られた断層・層理面などと、規模は小さいがその数が極めて多い節理などがある。前者については個々の不連続面が岩盤の力学的な挙動に与える影響が大きく、それぞれの存在と性状を明らかにすることが必要である。しかし後者は、個々の全てを把握することは実質的に不可能であり、岩盤の挙動に対する影響についても、集団としての影響を取り扱わざるを得ない。こうした理由から、後者のような節理群は、全体的な性状を統計的に捉えてやればよいと考えられる。

節理群の特性のうち、特に重要となるのはその方向性であり、中硬岩から硬岩の挙動に大きな影響を及ぼす。本研究では、この節理の方向分布の解析手法の改良を目的とする。結果として得られる方向分布は、節理群を確率的に発生させてモデル化を行ったり、あるいは、集団としての岩盤への統計的な影響を評価する際に重要となる。具体的には、1) 観測された節理を集中方向ごとにグループ化し、2) 各群の方向性を確率・統計的に記述する。これら一連の解析を卓越方向解析と称する。

ここで提案する方法は、2) で推定する確率分布が、1) のグループ化に密接に関わるため、先にこれについて簡単に触れた後、グループ化の方法について述べる。

## 2. 方向データの記述方法

節理群の方向性を記述する方法にはいくつかの方法があるが、代表的なものを示せば、(a) 走向/傾斜 (b) 傾斜方位/傾斜 (c) 面の法線ベクトル(軸)といったものである。(a)、(b)はフィールドでの計測時によく

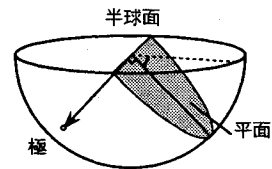


図-1 平面の極 (pole)

用いられる。また (c) は、面を(半)球面上の一点(極)で代表させることができるため(図-1)、数多くの面を統計的に取り扱うのに用いられる。従来から地質学の分野では、こうした極をステレオ投影した図を用いて、不連続面の集中方向を検討することが行われている。

平面の方向性を確率・統計的に記述するために、従来から様々な確率分布が考案されている。これらの多くは、節理を平面として捉えた場合、その極が(半)球面上に形づくる分布を記述するものである。ここではこうした分布として Fisher 分布<sup>1)</sup>と Bingham 分布<sup>2),3)</sup>を用いた。

前者は数学的に簡単な式で与えられるため、古くから多用されてきた。確率密度関数は以下ようになる。

$$f(\theta) = \frac{\kappa}{4\pi \sinh \kappa} \exp(\kappa \cos \theta) \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 $\theta$ は集中方向からの角である。 $\kappa$ は方位分散係数と呼ばれ、この値が大きいほど集中度が高くなる。なお、 $\kappa$ の不偏推定量は次式で与えられる。

$$\kappa = \frac{N-1}{N-|R|} \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 $|R|$ は単位極ベクトルの和  $R$  の大きさ、 $N$ は極の数である。 $R$ は分布の中心方向を指す。

式からも分かるように Fisher 分布は集中方向周りに等方的な分布である。一方、Bingham 分布は集中方向周りに楕円状の非等方的な分布形を有し、現実の分布をより忠実に表現できる。分布密度関数は次式で表される。

$$f(\theta, \phi) = \frac{1}{4\pi a} \exp\{(\kappa_1 \cos^2 \phi + \kappa_2 \sin^2 \phi) \sin^2 \theta\} \dots (3)$$

\*正会員 Ph. D.・工博 京都大学助教授 工学部環境地球工学専攻 (〒606-01 京都市左京区吉田本町)  
\*\*学生会員 京都大学大学院工学研究科土木工学専攻修士課程

$\theta$  は集中方向からのばらつき角、 $\phi$  は集中方向周りの角を表す。 $\kappa_1, \kappa_2$  は集中度を表す係数、 $d$  は正規化定数である。Fisher 分布では、基本となる統計量は和ベクトル  $R$  であったが、Bingham 分布では次の外積マトリクスである。

$$X = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} x_i x_i & x_i y_i & x_i z_i \\ y_i x_i & y_i y_i & y_i z_i \\ z_i x_i & z_i y_i & z_i z_i \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N v_i v_i^T \dots \dots \dots (4)$$

$v_i$  は、各单位極ベクトルである。この固有値、固有ベクトルを用い、Bingham 分布の各係数、分布方向を与える。

これらの分布を仮定し、節理群のグループ化を行う。

### 3. 節理群のグループ化 (クラスタリング)

岩盤内の節理群は多くの場合、複数の卓越方向をもっている。例えば、花崗岩では、直交3方向に節理が卓越する。こうした卓越方向が十分に離れ、かつ個々の群が十分集中していれば問題はないが、そうでなければ、それぞれの群について前述のような確率分布を当てはめることは困難となる。そこで、こうしたデータを適切なグループ (クラスター) に分割することが必要となる。

従来よく用いられてきたクラスター化の手法は、いわゆるハードクラスタリングと呼ばれるものである。これは、一つのデータをみると、それはどれか一つのクラスターにのみ属するという考えにもとづいていた。こうした方法としては、Mantab<sup>ら</sup><sup>4)</sup>や、吉中<sup>ら</sup><sup>5)</sup>によるものなどがある。しかし、ハードクラスタリングではいずれもクラスターの周辺で分布が“カット”されるため、分布同士の重なり合いが無視されている。これは、節理分布が複数の卓越方向を持つ確率分布に従うと仮定する以上、観測値が複数の確率分布の重ね合わせの実現値として得られるということに矛盾する。

一方、近年注目を浴びつつあるファジイ理論を用いたクラスタリング手法として、ファジイクラスタリングがある (Ruspini<sup>6)</sup>; 大隅<sup>7)</sup>)。これは、ハードクラスタリングがデータの所属をどれか一つのクラスターに限定していたのに対して、全てのクラスターにいくらかの重みをもって所属させ、中間的な状態を許容するものである。すなわち、ハードクラスタリングにおけるデータの所属度が  $\{0, 1\}$  の2値で表されていたものを、ファジイクラスタリングでは  $[0, 1]$  の非2値 (多値) に拡張している。

本報告では、これらを踏まえた上で、次のような前提をもとにクラスタリングの方法を改良した。

- (a) 節理は複数の卓越方向周りに確率分布をする。
- (b) それぞれの確率分布の重ね合わせの結果として全体の確率分布が得られる。
- (c) 観測値は全体の確率分布の実現値である。

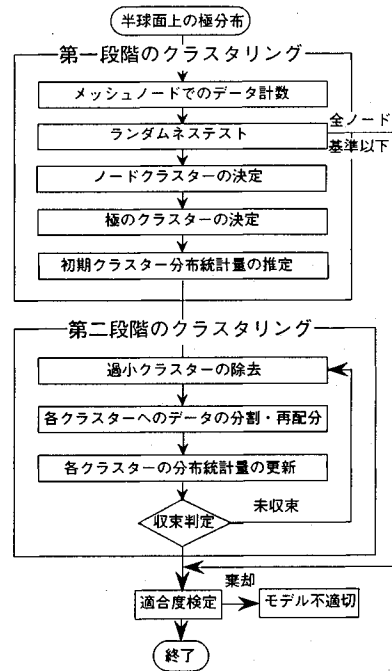


図-2 卓越方向解析の流れ

こうした考えにもとづき、一様分布を含む複数の確率分布の和からなる、方向分布の確率分布モデルを考える。具体的なクラスタリングの方法は以下ようになる。

- (a) 初期クラスターの決定：従来のハードクラスタリング手法により、初期クラスターを決定する。
- (b) 確率分布・統計量の決定：各クラスターについて確率分布を推定する。
- (c) クラスタリング：各データをその点における各クラスターの確率分布密度に比例して重みに分割・配分する。
- (d) 確率分布・統計量の更新：新たなクラスターについて確率分布を推定する。
- (e) 収束計算：各クラスターの統計量の収束を確認する。未収束ならば (c) に戻って繰り返す。

### 4. 卓越方向解析の手順

筆者らの提案する、確率的な節理の卓越方向解析の手順は図-2の様なものである。要点を以下に示す。

#### (1) ランダムネス・テスト

球中心に頂点を持つ計数円錐 (図-3) と半球面の交わりで定義される計数円を用い、その内部の極を数える。円錐は立体角で大きさを定義し、具体的には計数円が半球表面積の1%を占める大きさを与える。また、計算の際には、図-4に示すような半球面メッシュのノードを計数円の中心に取る。

こうして求めた半球面上各ノードにおける密度分布の

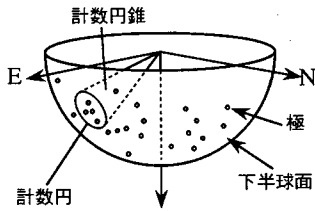


図-3 計数円錐と極の計数

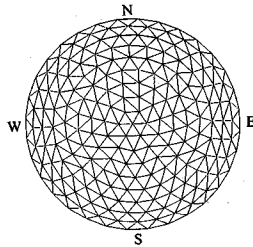


図-4 半球面上のメッシュ

うち、限界密度以上の部分を判別する。これには、95%のポアソン分布検定を利用し、次式によって計数円内の極数のしきい値を与える。

$$P(D > X) = 1 - \sum_{k=1}^X \frac{e^{-m} m^k}{k!} \leq 0.05 \dots \dots \dots (5)$$

ここに、 $m$  は全半球面での計数円内の極の数の期待値であり、しきい値  $X$  は上式を満たす最大の整数をとる。この時点で限界密度を超えるノードが無ければ節理はランダムに分布するとして解析を終了する。

(2) 初期クラスター・確率分布の決定 (第一段階のクラスタリング)

(1) で得た限界密度を超えるノードのうち、隣り合うもの同士をグループ化してそれぞれ初期のクラスターを定義する。この際、各ノードを中心に持つ計数円内の極全てをこのクラスターに割り付ける。

求めたクラスターにつき、仮定した確率分布 (Fisher 分布, Bingham 分布など) を推定し、それぞれの統計量を求める。なお、限界密度に達せず、クラスターに割り付けられなかった極については、一様な分布を仮定するクラスターを別に設け、ここに割り付ける。

(3) クラスター・確率分布の更新・収束計算 : (第二段階のクラスタリング)

仮定した確率分布、及び一様分布を用いて、前述のような非 2 値的なクラスタリングを行う。収束判定は、確率分布の分散に当たる統計量、およびクラスターの大きさの変動値が一定値以下になることで行う。

なお、クラスターの大きさ (クラスターを構成する極の重みの和) が全体の 5% に満たない場合、このクラスターは他のものに含まれるとして一様分布に割り付ける。

(4) 適合度検定

推定された分布が観測データに適合しているかどうか

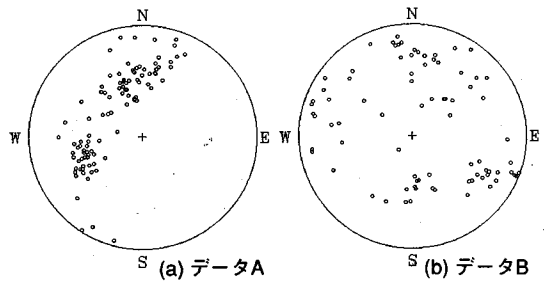


図-5 極の分布 (等角ステレオ投影)

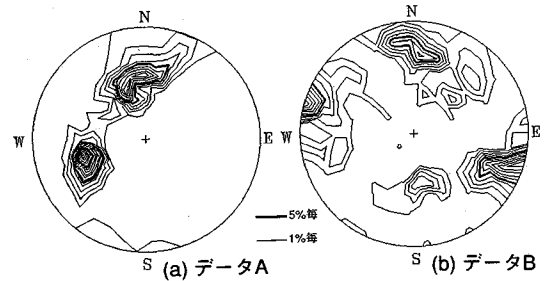


図-6 極のコンター図

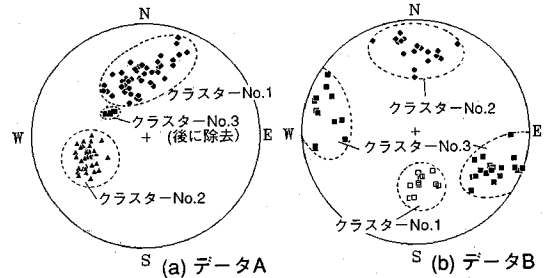


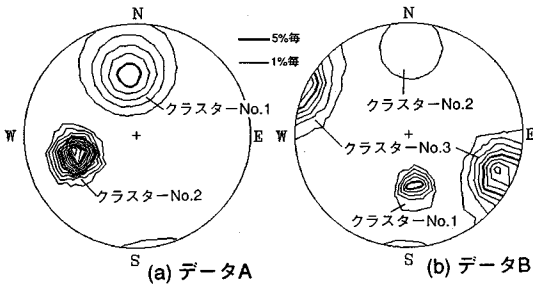
図-7 初期クラスター

を確認する。これには  $\chi^2$  検定を用いるが、十分な精度で検定を行うためには、かなりの数の観測データ (極) を用いる必要がある。これは、半球面上の分布が本質的には 2 次元分布であるためである。露頭などでの方向データの取得には多大な労力を要するため、統計的に有為な数のデータを取得することは難しい。推定された分布の検定は、今後の課題となろう。

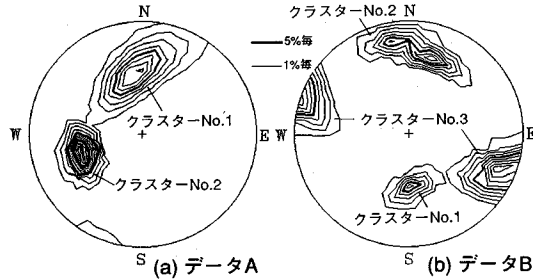
5. 解析例

ここでは、データ A (図-5 (a)), データ B (図-5 (b)) のような節理群 (極の分布) に対して卓越方向解析を行った例を示す。節理密度のコンター図 (等分布密度線図) はそれぞれ図-6 (a), (b) のようになる。

図-7 は、ハードクラスタリングによって、初期のクラスターを決定したものである。図-8, 9 はそれぞれ、最終的に Fisher 分布, Bingham 分布を推定した結果である。ここで、それぞれの分布モデル (の重ね合わせ) について、データに対する適合性を比較するために、実



図—8 Fisher 分布による推定



図—9 Bingham 分布による推定

データに対する AIC<sup>8)</sup> (赤池情報量規準) を計算すると、291 (Fisher) > 259 (Bingham) [データ A], 266 (Fisher) > 215 (Bingham) [データ B] となる。すなわち、値が大きい程モデルの適合性が悪くなるという AIC の性質から、従来よく用いられる Fisher 分布よりも、異方性を有する Bingham 分布の方が、相対的には実分布に適合することが分かる。推定された各クラスターの統計量を表—1, 2 に示す。ここで、データ B ではデータ A に比べてクラスター No. 0, すなわち、半球面上の一樣分布の占める割合が大きいことが注目される。これは、後者の方が、節理方向がよりランダムに分布していることを示している。

6. おわりに

本報告では、岩盤内の不連続面、特に節理群の方向分布解析に際して、確率分布を導入する手法の改良を行った。推定された節理の方向性に関する確率分布は、節理性岩盤の確率的なモデル化や、広域的な力学的挙動を解明する上で、必要となる情報を提供すると思われる。

表—1 データ A の解析結果

クラスター-No.		0	1	2	クラスター-No.		0	1	2
Fisher 分布	%	5.5	56.7	37.3	Bingham 分布	%	2.3	62.0	35.7
	$\kappa$	(一様分布)	10.9	47.9		$\kappa_1$	18.0	43.7	
	走向	N83E	N18W			$\kappa_2$	3.5	19.0	
	傾斜	58S	58N			走向	N83E	N18W	
					傾斜	58S	58N		

表—2 データ B の解析結果

クラスター-No.		0	1	2	3	クラスター-No.		0	1	2	3
Fisher 分布	%	37.7	9.7	29.3	23.3	Bingham 分布	%	39.4	12.0	19.4	29.2
	$\kappa$	(一様分布)	73.3	1.8	38.5		$\kappa_1$	58.7	241	77.8	
	走向	N86E	N88W	N24E			$\kappa_2$	14.7	6.9	8.7	
	傾斜	57N	74S	83N			走向	N86E	N86W	N24E	
						傾斜	51N	74S	84N		

最後に本研究における解析手法の特徴を示しておく。

- (1) 本手法の非 2 値的なクラスタリング技術は、節理群が各方向の確率分布の和の実現値として現れるという意味で、従来の手法に比べてより妥当である。
- (2) それぞれの分布の集中度を表す係数に加え、分布全体のランダムさを表すパラメータとして、一樣分布 (クラスター No. 0) の割合を得ることができる。

参考文献

- 1) Fisher, R. A.: Dispersion on a sphere, Proc. Royal Society in London., A-217, pp.295-305, 1953.
- 2) Bingham, C.: Distribution on the sphere and on the projective plane, Ph. D. dissertation, Yale University, 1964.
- 3) Onstott, T. C.: Application of the Bingham distribution function in paleomagnetic studies, Journal of Geophysical Research, 85-B 3, pp.1500-1510, 1980.
- 4) Mahtab, M. A., R. J. Shanley, D. D. Bolstad and J. R. Allredge: Analysis of fracture orientation for input to structural models of discontinuous rock, USBM 7669, 1972.
- 5) 吉中龍之進・吉田淳・藤田朝雄: 岩盤不連続面の方向性に関する分布特性の評価とそのブロック理論への適用, 第 7 回岩の力学国内シンポジウム講演概要集, pp.145-150, 1987.
- 6) Ruspini, E. H.: A new approach to clustering, Information and Control, 15, pp.22-32, 1969.
- 7) 大隅 昇: ファジイクラスタリング, 数理科学, No.191, pp.34-41, 1979.5.
- 8) 赤池弘次: 情報量規準 AIC とはなにか—その意味と将来への展望—, 数理科学, No.153, 1976.

(1992.7.22 受付)

A METHOD FOR GROUPING AND PROBABILISTIC MODELLING OF JOINT ORIENTATIONS

Yuzo OHNISHI and Seiji NAKAGAWA

Field Measurements of joint attitudes will define a scatter of orientations which can be interpreted statistically if plotted on a stereonet. The preferred orientations of joint sets are defined by using the contour diagram. This paper describes a new method for grouping clustered joint normals and for probabilistic modelling of mean joint orientation by means of the non-uniform Bingham distribution analysis.