

# グリーン関数法による断面2次元構造物と波の弱非線形干渉問題の解析

喜岡 渉\*・石田 啓\*\*

任意断面をもつ2次元構造物とストークス波の非線形干渉問題の解析方法を、グリーン関数法に基づき開発した。定式化においては、2次のオーダーの速度ポテンシャルを求める上で問題となる開境界の取り扱いについて、その厳密な処理方法を示した。適用例としては矩形および台形断面潜堤を選び、自由表面積分の収束性を検討するとともに、2次のポテンシャルを求めて潜堤付近での倍周波数成分の変動特性を調べた。

**Keywords :** Green's function method, harmonic generation, weakly nonlinear diffraction, submerged breakwater

## 1. はじめに

有限水深における断面2次元構造物とストークス波の弱非線形干渉問題については、Massel<sup>1)</sup>、吉田ら<sup>2)</sup>および吉田ら<sup>3)</sup>がそれぞれ領域分割法、グリーン公式による方法および領域分割法(選点解法)を用いた定常境界値問題の解析を行っており、またIsaacson・Cheung<sup>4)</sup>は境界積分方程式を用いた非定常解析を行っている。このうち領域分割法は、流体場が仮想の鉛直境界面によって矩形形状に分割できる場合に適用に限られる。また、任意形状断面の構造物に対して適用可能な解析方法<sup>2),4)</sup>については、1次の波の反射率が有意となる場合の仮想境界の取り扱いに問題が残されている。

任意断面の構造物に対して適用可能なグリーン関数法を用いて断面2次元弱非線形回折波の解析を行った例としては、回折波力を取り扱った喜岡・角南<sup>5)</sup>、Wu・Taylor<sup>6)</sup>およびVoda<sup>7)</sup>のほか、2次のオーダーの反射率、伝達率を求めたVoda<sup>7)</sup>、McIver・McIver<sup>8)</sup>、Palm<sup>9)</sup>およびWu<sup>10)</sup>の研究がある。これらの研究例では、無限水深下でのVoda<sup>7)</sup>およびPalm<sup>9)</sup>のものを除くと、直接2次のオーダーの速度ポテンシャルを求めることなく波力係数値などを算定できるように定式化されており、各点での2次の速度ポテンシャルの計算が必要となる弱非線形干渉波の波形などを計算することはできない。

本研究では、グリーン公式に基づく積分方程式から直接2次の速度ポテンシャルを求めることにより、任意形状の断面2次元構造物による弱非線形回折波を計算する方法について検討する。定式化にあたっては、グリーン関数として1次のオーダーではラプラスの方程式の特異

解を含むとともに物体表面上での境界条件を除く他の全ての境界条件を満足する関数として定義されたものを用いることにより、開境界の厳密な取り扱いが可能であることを示す。次いで、矩形および台形断面の潜堤に対する計算例を示し、弱非線形理論下での非線形干渉波の特性について調べることにする。

## 2. 弱非線形回折理論

### (1) 基礎方程式

座標軸を図-1に示すようにとり、非粘性、非回転の流体運動を仮定する。また、水深は一定で $h$ とし、構造物表面 $S_0$ は流体境界から内向きの連続な法線ベクトル $\mathbf{n}$ をもつ任意形状の断面を仮定する。従来のStokes型のせつ動法にしたがい、速度ポテンシャル $\Phi$ が微小なパラメータ $\varepsilon=A/\lambda$ (ただし、 $A$ :1次のオーダーの波の振幅、 $\lambda$ :構造物の代表長)について次のように展開できるものとする。

$$\Phi = \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + O(\varepsilon^3) \dots \dots \dots (1)$$

1次のオーダーの波(基本波)の角周波数を $\omega$ とすると、式(1)の各項はさらに次式のように表わすことができる。

$$\Phi_1 = \text{Re}\{\phi_1(x, z)e^{-i\omega t}\} = \text{Re}\{(\phi_1^i + \phi_1^r)e^{-i\omega t}\} \dots \dots (2)$$

$$\Phi_2 = \text{Re}\{\phi_0(x, z) + \phi_2(x, z)e^{-2i\omega t}\} \\ = \text{Re}\{(\phi_0 + (\phi_2^f + \phi_2^g))e^{-2i\omega t}\} \dots \dots \dots (3)$$

上式の定常項 $\phi_0$ は、 $\varepsilon^2$ までの流体力と水位変動に寄与しないため、ここでは取り扱わないこととする。 $\phi_1^i$ は次の式(4)で与えられる1次の速度ポテンシャルの入射波成分を示し、 $\phi_1^r$ は散乱波成分で、 $\phi_2^f$ 、 $\phi_2^g$ はそれぞれ後に述べる2次のポテンシャルの自由波成分および拘束波成分を示す。

$$\phi_1^i = -\frac{igA}{\omega} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{ikx} \dots \dots \dots (4)$$

\* 正会員 Ph. D. 名古屋工業大学助教授 工学部社会開発工学科

(〒466 名古屋市昭和区御器所町)

\*\* 正会員 工博 金沢大学教授 工学部土木建設工学科

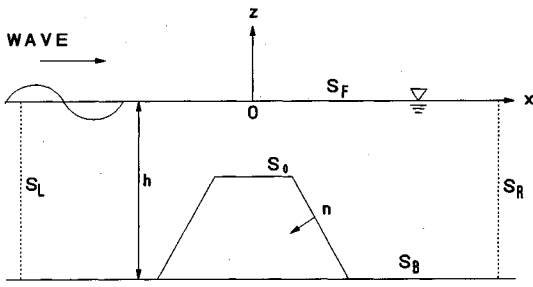


図-1 座標系と記号の定義

ただし、 $k$  は次式を満たす波数を示す。

$$\nu = \frac{\omega^2}{g} = k \tanh kh \quad \dots\dots\dots (5)$$

1 次の散乱波ポテンシャル  $\phi^p$  はラプラスの方程式を満足し、境界条件として自由表面  $S_F$ 、水底  $S_B$  および構造物表面  $S_0$  でそれぞれ次の式 (6), (7) および (8) を満たすほか、式 (9) で表わされる radiation 条件を満足する関数として求めることができる。

$$\frac{\partial \phi_1^p}{\partial z} - \nu \phi_1^p = 0 \quad (z=0) \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{\partial \phi_1^p}{\partial z} = 0 \quad (z=-h) \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{\partial \phi_1^p}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_1^p}{\partial n} \quad (\text{on } S_0) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{\partial \phi_1^p}{\partial x} \mp ik \phi_1^p = 0 \quad (x=\pm\infty) \quad \dots\dots\dots (9)$$

また、1 次の速度ポテンシャル  $\phi_1 = \phi_1^i + \phi_1^p$  は遠方で次のように表わすことができる。

$$\phi_1 = -\frac{igA}{\omega} K_T \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{ikx} \quad x \rightarrow +\infty \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\phi_1 = -\frac{igA}{\omega} (e^{ikx} + K_R e^{-ikx}) \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \quad x \rightarrow -\infty \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $K_T$ 、 $K_R$  はそれぞれ 1 次のオーダーの伝達率、反射率を示す。

2 次の速度ポテンシャル  $\phi_2$  はラプラスの方程式を満足し、自由表面境界条件としては式 (12) を、水底  $S_B$  および構造物表面  $S_0$  でそれぞれ式 (13), (14) を満足するものでなければならない。

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z} - 4\nu \phi_2 = f(x) \quad (z=0) \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z} = 0 \quad (z=-h) \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial n} = 0 \quad (\text{on } S_0) \quad \dots\dots\dots (14)$$

ただし、

$$f(x) = -\frac{i\omega}{2g} \phi_1 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \nu \phi_1 \right) + \frac{i\omega}{g} (\nabla \phi_1)^2 \quad \dots\dots\dots (15)$$

計算上便宜となることから、上式に  $\phi_1$  に関するラプラス方程式と自由表面境界条件式を用いて  $x$  についてのみの微分形に書き換えておくと、次式を得る。

$$f(x) = \frac{i\omega}{2g} \left[ 3\nu^2 \phi_1^2 + \phi_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + 2 \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 \right] \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで、 $\phi_2$  に関する radiation 条件を考える。式 (10), (11) を式 (16) に代入することにより、遠方での  $f(x)$  の挙動は次式によって表わされることがわかる。

$$f(x) = \frac{3i\omega A^2}{2\nu} K_T^2 (k^2 - \nu^2) e^{2ikx} \quad x \rightarrow +\infty \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$f(x) = \frac{3i\omega A^2}{2\nu} (k^2 - \nu^2) (e^{2ikx} + K_R^2 e^{-2ikx}) - \frac{igA^2}{\omega} K_R (3\nu^2 + k^2) \quad x \rightarrow -\infty \quad \dots\dots\dots (18)$$

非斉次項  $f(x)$  は遠方でも 0 に漸近せず、 $\phi_2$  には 1 次の波に拘束される成分が含まれなければならないことがわかる。なお、 $k^2 = \nu^2$  となる無限水深の結果 (例えば、Voda<sup>7)</sup>) と異なり、 $e^{2ikx}$  または  $e^{-2ikx}$  で空間的に変動する項を含み、 $x \rightarrow +\infty$  においても  $f(x) = 0$  とはならない。さらに、 $x \rightarrow -\infty$  では 1 次の波の反射率  $K_R$  に比例して時間的に振動する項 (式(18) の右辺 2 行目の項) を含むことから、開境界の処理にあたってはその取り扱いが解析精度上問題となる。

Voda<sup>7)</sup> にしたがって式 (3) に示すように  $\phi_2 = \phi_2^e + \phi_2^s$  と置く。このとき、自由波の速度ポテンシャル  $\phi_2^e$  は次の radiation 条件を満足する。

$$\frac{\partial \phi_2^e}{\partial x} \mp ik_2 \phi_2^e = 0 \quad (x=\pm\infty) \quad \dots\dots\dots (19)$$

ただし、 $k_2$  は角周波数  $2\omega$  の波の波数で、次式を満たす。

$$4\nu = k_2 \tanh k_2 h \quad \dots\dots\dots (20)$$

一方の拘束波ポテンシャル  $\phi_2^s$  は、式 (12), (13) および式 (17), (18) より、遠方で次式のように与えられる。

$$\phi_2^s = -\frac{3i\omega A^2}{2\nu} K_T^2 (k^2 - \nu^2) \frac{\cosh 2k(h+z)}{4\nu \sinh^2 kh} e^{2ikx} \quad x \rightarrow +\infty \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\phi_2^s = -\frac{3i\omega A^2}{2\nu} (k^2 - \nu^2) \frac{\cosh 2k(h+z)}{4\nu \sinh^2 kh} \cdot (e^{2ikx} + K_R^2 e^{-2ikx}) + \frac{igA^2}{4\omega\nu} K_R (3\nu^2 + k^2) \quad x \rightarrow -\infty \quad \dots\dots\dots (22)$$

上式から  $\phi_2^s$  に対する radiation 条件は次の各式のように表わされる。

$$\frac{\partial \phi_2^s}{\partial x} \mp ik_2 \phi_2^s = \begin{pmatrix} \gamma^R \\ \gamma^L \end{pmatrix} \quad (x=\pm\infty) \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここに、

$$\gamma^R = i(2k - k_2)K_I^2 \tilde{\gamma}(z) e^{2ikz} \dots (24)$$

$$\gamma^L = \{ i(2k + k_2)e^{2ikz} - i(2k - k_2)K_R^2 e^{-2ikz} \} \cdot \tilde{\gamma}(z) - \frac{gA^2 k_2}{4\omega\nu} K_R (3\nu^2 + k^2) \dots (25)$$

$$\tilde{\gamma}(z) = \frac{3i\omega A^2}{2\nu} (k^2 - \nu^2) \frac{\cosh 2k(h+z)}{4\nu \sinh^2 kh} \dots (26)$$

すなわち、 $\tilde{\gamma}(z)=0$ となる無限水深のケースとは異なり、 $\phi_2^*$ についての radiation 条件式は  $x=\pm\infty$ において非齊次式となる。このため、図-1に示す計算領域の両側境界  $S_R$  および  $S_L$  においては式(9)や(19)で与えられるような通常の開領域の取り扱い方は適用できないことになる。特に  $S_L$  側では、 $K_R$ に比例する式(25)の右辺第3項からの寄与分も算定しておくことが計算の収束性を保証するためにも重要と考えられるが、従来の解析例<sup>11-14)</sup>ではこの項の寄与は無視されている。

いったん速度ポテンシャル  $\phi_1 (= \phi_1^i + \phi_1^r)$ ,  $\phi_2$ が計算されれば、2次のオーダーまでの水位変動  $\eta$ は自由表面におけるベルヌーイの式より次の各式で与えられる。

$$\eta_1 = Re \left\{ \frac{i\omega}{g} \phi_1(x, 0) e^{-i\omega t} \right\} \dots (27)$$

$$\eta_2 = Re \left\{ \left[ 2i\omega \phi_2 + \frac{3}{4} \nu^2 \phi_1^* + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 \right] e^{-2i\omega t} \right\} \quad (z=0) \dots (28)$$

$$\bar{\eta}_2 = \frac{1}{4g} \left( \nu^2 \phi_1 \phi_1^* - \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_1^*}{\partial x} \right) \quad (z=0) \dots (29)$$

ここに、 $\bar{\eta}_2$ は2次のオーダーで現われる平均水位の変動量を示し、式中の\*は共役複素数を示す。上式(27)~(29)において散乱波ポテンシャルが0で  $\phi_1 = \phi_1^i$ となる場合には、水位変動を表わす各式は一定水深域を進行する Stokes 理論の第2近似解と一致する。

(2) 積分方程式

2次の速度ポテンシャル  $\phi_2$ を計算するにあたって、図-1に示すような流体境界  $S = S_F + S_L + S_B + S_0 + S_R$ を考え、流体境界上の点  $Q=(\xi, \zeta)$ と計算点  $P=(x, z)$  に関しての次の2次元グリーン関数 (Wehausen・Laitone<sup>11)</sup>)を導入する。

$$G(P, Q; k) = \widehat{G}(P, Q) - \frac{2\pi\nu}{k} \frac{\cosh kh(h+\zeta) \cosh kh(h+z)}{\nu h + \sinh^2 kh} \cdot \cos k(x-\xi) \dots (30)$$

ここに、実数部  $\widehat{G}$ は次の積分型(31)または級数式(32)で与えられる。

$$\widehat{G}(P, Q; k) = \log \{ (x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2 \}^{1/2} + \log \{ (x-\xi)^2 + (z+2h+\zeta)^2 \}^{1/2} - 2 \log h - 2 \int_0^\infty \left\{ \frac{\mu+\nu}{\mu} \right.$$

$$\frac{e^{-\mu h} \cosh \mu(h+\zeta) \cosh k(h+z)}{\mu \sinh \mu h - \nu \cosh kh} \cdot \cos \mu(x-\xi) + \frac{e^{-\mu h}}{\mu} \Big] d\mu \dots (31)$$

$$\widehat{G}(P, Q; k) = \frac{2\pi\nu}{k} \frac{\cosh k(h+\zeta) \cosh k(h+z)}{\nu h + \sinh^2 kh} \cdot \sin k|x-\xi| - 2\pi \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\mu_n} \frac{\mu_n^2 + \nu^2}{\mu_n^2 h + \nu^2 h - \nu} \cdot \cos \mu_n(h+z) \cdot \cos \mu_n(h+\zeta) e^{-\mu_n|x-\xi|} \dots (32)$$

ただし、 $\mu_n$ は次の方程式の正の実根を示す。

$$\mu_n \tan \mu_n h + \nu = 0 \dots (33)$$

実部の計算については  $|x-\xi|$ が大きい値をとるときには級数式の方が収束性がよい。グリーン関数  $G(P, Q; k)$ は、ラプラスの方程式の基本解となる特異項を含むとともに、次の各境界条件式を満足する。

$$\frac{\partial G}{\partial z} - \nu G = 0 \quad (z=0) \dots (34)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad (z=-h) \dots (35)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} \mp ikG = 0 \quad (x=\pm\infty) \dots (36)$$

いま、倍周波数  $2\omega$ の自由波(波数  $k_2$ をもつ波)に対するグリーン関数を  $G(P, Q; k_2)$ とすると、 $G(P, Q; k_2)$ についての境界条件式は式(34)~(36)における  $\nu$ を  $4\nu$ に、 $k$ を  $k_2$ に置き換えたものになる。

倍周波数のグリーン関数  $G(P, Q; k_2)$ を用いて、流体内部の任意の点  $P$ における  $\phi_2(P)$ の表示式をグリーン公式により導くと、流体境界  $S$ についての次の積分方程式を得る。

$$2\pi\phi_2(P) = \int_S \left\{ \phi_2(Q) \frac{\partial}{\partial n} G(P, Q; k_2) - G(P, Q; k_2) \frac{\partial}{\partial n} \phi_2(Q) \right\} ds(Q) \dots (37)$$

さらに、 $S$ をそれぞれの流体境界  $S_F, S_L, S_B, S_0$ および  $S_R$ にわけて  $\phi_2$ に関する境界条件式(12)~(14)および式(16), (19), (23)~(26)と  $G(P, Q; k_2)$ に関する境界条件式を適用すると、式(37)は次のように書き換えられる。

$$2\pi\phi_2(P) = \int_{S_0} \phi_2(Q) \frac{\partial}{\partial n} G(P, Q; k_2) ds - \int_{S_F} f(Q) G(P, Q; k_2) ds - \int_{S_R} \gamma^R G(P, Q; k_2) ds + \int_{S_L} \gamma^L G(P, Q; k_2) ds \dots (38)$$

ここで、 $P$ を構造物表面  $S_0$ 上でとるものとするとき未知量  $\phi_2(P)$ に対する次の積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} \pi\phi_2(P) &= \int_{S_0} \phi_2(Q) \frac{\partial}{\partial n} G(P, Q; k_2) ds \\ &\quad - \int_{S_F} f(Q) G(P, Q; k_2) ds \\ &\quad - \int_{S_R} \gamma^R G(P, Q; k_2) ds \\ &\quad + \int_{S_L} \gamma^L G(P, Q; k_2) ds \quad (P \text{ on } S_0) \\ &\dots\dots\dots(39) \end{aligned}$$

上式は数値的に解く必要があるが、いったん \$S\_0\$ 上での \$\phi\_2(Q)\$ が求めれば式 (38) から任意点 \$P\$ の \$\phi\_2(P)\$ を算定することができる。

1 次散乱ポテンシャル \$\phi\_1^p\$ の算定には従来の種々の計算方法を用いることができるが、ここでは \$\phi\_2\$ と同様にグリーン公式に基づく積分方程式を直接解くことにより求めることとする。すなわち、波数 \$k\$ のグリーン関数 \$G(P, Q; k)\$ を用いて式 (38), (39) に対応する積分方程式をグリーン公式によって導くと、それぞれ次式を得る。

$$\begin{aligned} 2\pi\phi_1^p(P) &= \int_{S_0} \left\{ \phi_1^p(Q) \frac{\partial}{\partial n} G(P, Q; k) \right. \\ &\quad \left. - G(P, Q; k) \frac{\partial}{\partial n} \phi_1^p(Q) \right\} ds(Q) \\ &\dots\dots\dots(40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi\phi_1^p(P) &= \int_{S_0} \left\{ \phi_1^p(Q) \frac{\partial}{\partial n} G(P, Q; k) \right. \\ &\quad \left. - G(P, Q; k) \frac{\partial}{\partial n} \phi_1^p(Q) \right\} ds \quad (P \text{ on } S_0) \\ &\dots\dots\dots(41) \end{aligned}$$

水位変動 \$\eta\$ の計算にあたっては、最初に式 (41) を解いて \$S\_0\$ 上の \$\phi\_1^p\$ を求めてから、式 (40) によって \$S\_F\$ 上の各点における \$\phi\_1^p\$ を求める。式 (38), (39) 中の \$f(Q)\$ と \$\eta\_2, \bar{\eta}\_2\$ の計算には \$\partial\phi\_1^p/\partial x\$ および \$\partial^2\phi\_1^p/\partial x^2\$ の値が必要となるが、ここでは式 (40) の \$\partial G(P, Q; k)/\partial n\$ と \$G(P, Q; k)\$ をそれぞれ \$x\$ について 1 階および 2 階微分することによって求めることとする。また、1 次波の伝達率 \$K\_T\$ と反射率 \$K\_R\$ は \$S\_F\$ 上の 1 次速度ポテンシャル \$\phi\_1 = \phi\_1^i + \phi\_1^p\$ を用いてそれぞれ次式によって算定する。

$$K_T = \frac{i\omega\phi_1}{gAe^{ikx}} \quad x \rightarrow +\infty \dots\dots\dots(42)$$

$$K_R = \frac{i\omega\phi_1^p}{gAe^{-ikx}} \quad x \rightarrow -\infty \dots\dots\dots(43)$$

次に、式 (39) を解いて \$S\_0\$ 上の \$\phi\_2\$ を求め、式 (38) によって \$S\_F\$ 上の各点における \$\phi\_2\$ を計算する。最後に、式 (28), (29) によって \$\eta\_2\$ および \$\bar{\eta}\_2\$ を算定する。

### 3. 計算方法

計算にあたっては流体境界 \$S = S\_0 + S\_F + S\_R + S\_L\$ を \$N\$

個の線分要素 \$\Delta S\_i\$ に分割して、各要素内の中分点に節点を取り要素内での諸量は一定値とするいわゆる中点法を用いた。

第 1 段階の 1 次散乱ポテンシャルの計算には、構造物表面 \$S\_0\$ を \$N\_0\$ 分割することにより式 (41) を次の線形連立方程式に近似させて解く。

$$\sum_{j=1}^{N_0} \alpha_{ij}(\phi_1^p)_j = b_i, \quad i=1, N_0 \dots\dots\dots(44)$$

ただし、クロネッカーデルタを \$\delta\_{ij}\$ として、

$$\alpha_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\Delta S_j}{\pi} \frac{\partial}{\partial n} G(P_i, Q_j; k) \dots\dots\dots(45)$$

$$b_i = -\frac{\Delta S_j}{\pi} G(P_i, Q_j; k) \frac{\partial}{\partial n} \phi_1^i(Q_j) \dots\dots\dots(46)$$

である。ここでは自由表面 \$S\_F\$ 上の各点 \$i=1, N\_F\$ における \$\phi\_1^p\$ の値が必要であるため、式 (40) の数値積分を次式によって計算する。

$$(\phi_1^p)_i = \sum_{j=1}^{N_0} \beta_{ij}(\phi_1^p)_j + b'_i \quad i=1, N_F \dots\dots\dots(47)$$

ここに、

$$\beta_{ij} = \frac{\Delta S_j}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} G(P_i, Q_j; k) \dots\dots\dots(48)$$

$$b'_i = -\sum_{j=1}^{N_0} \frac{\Delta S_j}{2\pi} G(P_i, Q_j; k) \frac{\partial}{\partial n} \phi_1^i(Q_j) \dots\dots\dots(49)$$

なお、\$\partial\phi\_1^p/\partial x\$, \$\partial^2\phi\_1^p/\partial x^2\$ の計算は、式 (48), (49) における \$\partial G/\partial n\$, \$G\$ をそれぞれ \$P\_i=(x\_i, z\_i)\$ の \$x\_i\$ について 1 階および 2 階微分したものに置き換えて行う。

積分方程式 (39) を解くためには流体境界 \$S\_0, S\_F\$ のみならず両端の \$S\_R, S\_L\$ についても要素分割しておく必要がある。ただし、方程式の元数はあくまで物体表面 \$S\_0\$ 上の分割数 \$N\_0\$ で決まり、他の要素は非線形境界を処理するための計算点として予備的に使われる。いま、\$S\_R, S\_L\$ 上の要素数をそれぞれ \$N\_R, N\_L\$ (通常は \$N\_R=N\_L\$) とすると、式 (39) は式 (44) と同様に次の線形連立方程式で近似的に表わされる。

$$\sum_{j=1}^{N_0} \alpha_{ij}(\phi_2)_j = b_i, \quad i=1, N_0 \dots\dots\dots(50)$$

ここに、

$$\alpha_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\Delta S_j}{\pi} \frac{\partial}{\partial n} G(P_i, Q_j; k_2) \dots\dots\dots(51)$$

$$\begin{aligned} b_i &= -\sum_{j=1}^{N_R} \frac{\Delta S_j}{\pi} f(Q_j) G(P_i, Q_j; k_2) - \sum_{j=1}^{N_L} \frac{\Delta S_j}{\pi} \gamma^R(Q_j) \\ &\quad \cdot G(P_i, Q_j; k_2) + \sum_{j=1}^{N_S} \frac{\Delta S_j}{\pi} \gamma^L(Q_j) G(P_i, Q_j; k_2) \\ &\dots\dots\dots(52) \end{aligned}$$

\$S\_F\$ 上の各点における \$\phi\_2\$ は式 (38) より次の数値積分によって算定することができる。

$$(\phi_2)_i = \sum_{j=1}^{N_0} \beta_{ij}(\phi_2)_j + b'_i \quad i=1, N_F \dots\dots\dots(53)$$

ここに、

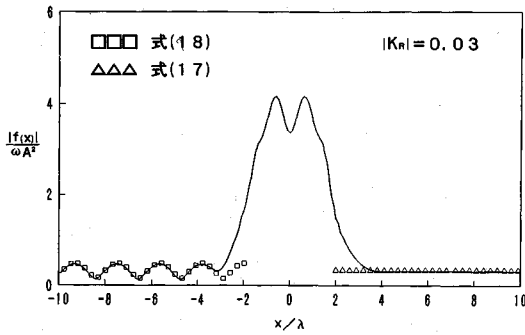


図-2 台形潜堤付近における  $f(x)$  の計算結果 ( $\omega^2\lambda/g=1.61$ )

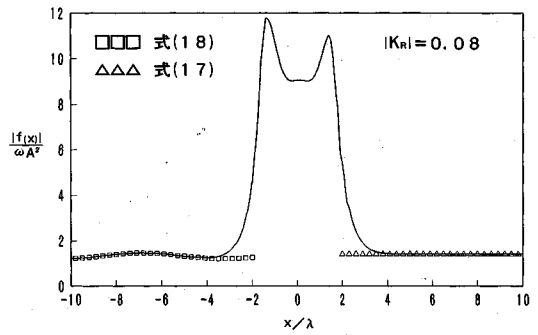


図-4 台形潜堤付近における  $f(x)$  の計算結果 ( $\omega^2\lambda/g=0.18$ )

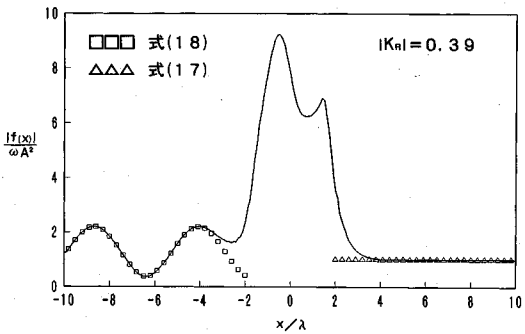


図-3 台形潜堤付近における  $f(x)$  の計算結果 ( $\omega^2\lambda/g=0.40$ )

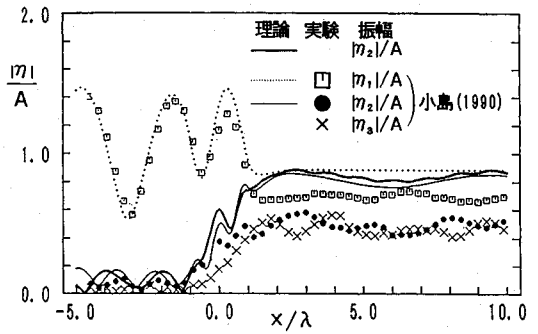


図-5 矩形断面潜堤による非線形干渉波の計算結果

$$\beta_{ij} = \frac{\Delta S_j}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} G(P_i, Q_j; k_2) \dots\dots\dots (54)$$

$$b_i = - \sum_{j=1}^{N_E} \frac{\Delta S_j}{2\pi} f(Q_j) G(P_i, Q_j; k_2) - \sum_{j=1}^{N_E} \frac{\Delta S_j}{2\pi} r^R(Q_j) G(P_i, Q_j; k_2) + \sum_{j=1}^{N_L} \frac{\Delta S_j}{2\pi} r^L(Q_j) G(P_i, Q_j; k_2) \dots\dots\dots (55)$$

式 (50)~(55) におけるグリーン関数  $G$  の算定には、 $P_i$  と  $Q_j$  の水平距離  $|x_i - \xi_j|$  が小さく  $|x_i - \xi_j|/\lambda < 0.05$  のときには積分型の式 (31) を、 $|x_i - \xi_j|/\lambda \geq 0.05$  のときは収束性のよい式 (32) を用いた。

#### 4. 計算結果

計算精度は主に自由表面  $S_F$  の分割範囲と非斉次項  $f(x)$  の評価に影響されると考えられるが、 $f(x)$  の漸近式が (17), (18) で与えられているのでそれらの値と計算結果を比較することによって、適切な  $S_F$  の分割範囲と  $f(x)$  の計算精度を調べることができる。

水深  $h = \lambda$  において底面幅  $5.8\lambda$ 、天端幅  $3.0\lambda$ 、高さ  $0.7\lambda$  (天端水深  $0.3\lambda$ ) の台形潜堤を設置したときの計算例を図-2~図-4 に示す。図中には1次の波の反射率  $|K_R|$  も示してある。計算に用いた要素数は  $N_0 = 62$  で、補助的な要素としては  $S_F$  上の  $-10 < x/\lambda < 10$  を200分

割したものを、 $S_R, S_L$  上ではそれぞれを20分割した要素を用いた。自由表面境界条件式の非斉次項  $f(x)$  は水深が急速に減少して非線形性の影響が強く現れる天端上 ( $-1.5 < x/\lambda < 1.5$ ) で急増し、ピーク値をとるが、反射側、伝達側ともに法面上で減少し、急速に式 (17), (18) から予測される漸近値に近づくことがわかる。ここで、 $A/\lambda = 0.1$  としてアーセル数を  $U_r = AgT^2/h^2$  と定義すると、天端上における  $U_r$  は図-2, 3 および図-4 でそれぞれ  $U_r = 27, 109, 245$  となり、 $U_r$  の増加とともに  $f(x)/\omega A^2$  の値は天端上で大きくなって反射側で漸近値に一致する地点がいくぶん入射側へ遠くなる傾向が見られる。いずれの場合でも、 $S_F$  の分割範囲は潜堤近くの  $-4 < x/\lambda < 4$  程度とればよいことになり、こうした  $f(x)$  の特性は計算効率上都合がよいものとなっている。なお、ここでは  $f(x)$  の絶対値についてのみ示したが、位相差も含めた複素数について式 (17), (18) と比較した結果もほぼ同様な漸近傾向を示す。図-5 は、 $h = \lambda$  において幅  $2.0\lambda$ 、高さ  $0.75\lambda$  (天端水深  $0.25\lambda$ ) の矩形潜堤を設置したときの計算結果で、 $\omega^2\lambda/g = 0.69$ 、 $A/\lambda = 0.04$  のケースについて小島<sup>22)</sup> による実験値とポテンシャル接続法 (選点解法) を用いた理論値を比較のために示してある。1次波の振幅  $|\eta_1|/A$  についてはグラフ上の差異が見られなかったため図には示していない。計算には  $S_F$  の分割範囲を  $-10 < x/\lambda < 10$  までとった。小

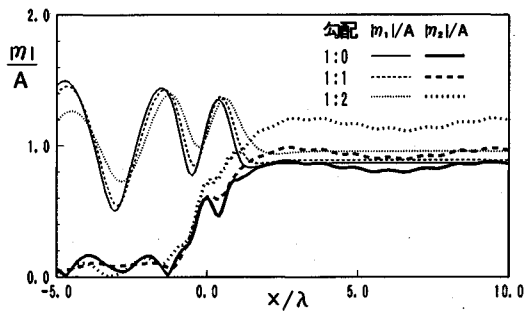


図-6 非線形干渉波に及ぼす法勾配の影響 ( $\omega^2\lambda/g=0.69$ )

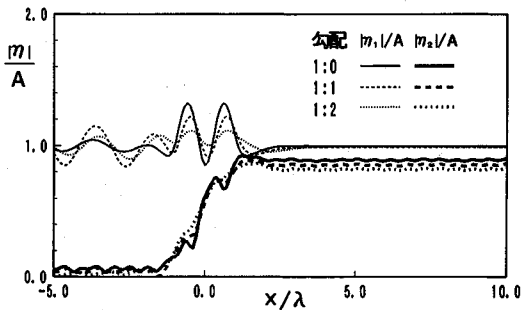


図-7 非線形干渉波に及ぼす法勾配の影響 ( $\omega^2\lambda/g=1.44$ )

島<sup>12)</sup>および大山・灘岡<sup>13)</sup>も指摘しているように、3次以上の成分波の励起により弱非線形理論下での2次成分は実験値と比べて過大なものとなっている。1次成分の振幅も潜堤背後で実験値と比べて過大となっているのは、潜堤によって生じる渦や水の粘性によるエネルギー損失による影響のほかに、2次のオーダーまででは1次の反射率  $K_R$  と伝達率  $K_T$  の間に  $K_R^2 + K_T^2 = 1$  の関係が成り立ち、2倍周波数成分波が励起されることによる補正項は入ってこないことによる。計算結果はポテンシャル接続法によるものと比べると伝達側でいくぶん大きな値となっているが、反射率  $K_R$  がより小さい他のケースについては両者の結果はより一致したものになっている。

潜堤形状が非線形干渉に及ぼす影響を調べるために、図-5の矩形潜堤に法勾配1:1および1:2の法面をつけて底面幅がそれぞれ  $3.5\lambda, 5\lambda$  となるような台形潜堤について計算した結果を比較したものが図-6である。法勾配の効果は、1次波の伝達率を減少させるものの2倍周波数成分については逆に増加させるように働くことがわかる。ただし、入射波の周期  $\omega^2\lambda/g$  に依存し、図-7に示す  $\omega^2\lambda/g=1.44$  のケースでは、法勾配をつけると2倍周波数の振幅はいくぶん小さくなっている。

### 5. おわりに

計算例として示した潜堤のような任意断面の2次元構造物と波の弱非線形干渉問題に適用可能な解析方法をグ

リーン関数法に基づき提案した。計算効率上問題となる自由表面境界の積分範囲については、両側面境界についてもグリーン公式に基づく積分方程式の積分範囲に加えることによって、構造物付近の比較的狭い範囲にとどめることができることを示した。本解析法では流体場各点の2次の速度ポテンシャルを直接求めるため、弱非線形干渉下での圧力、流速等も容易に算定することができる。

謝辞：本研究は、海岸工学委員会研究現況レビュー小委員会(委員長 西村仁嗣 筑波大学教授)のもとでのワーキンググループ(WG2:断面2次元波浪変形の計算法, 主査 大山 巧 清水建設技術研究所研究員)の作業の一環として行なわれたことを付記し、ご討議いただいたWG2のメンバーに感謝の意を表す。なお、本研究は豊田理化学研究所からの研究助成金によったこともあわせて付記し、感謝の意を表す。

### 参考文献

- 1) Massel, S. R. : Harmonic generation by waves propagating over a submerged step, Coastal Eng., Vol.7, pp.357~380,1983.
- 2) 吉田明徳・村上啓介・小島治幸・鶴本良博：グリーン公式による有限振幅波の定常境界値問題, 海岸工学論文集, 第36巻, pp.469~473,1989.
- 3) 吉田明徳・小島治幸・鶴本良博：ポテンシャル接続法(選点解法)による有限振幅波の境界値問題解析法, 海岸工学論文集, 第38巻, pp.519~523,1990.
- 4) Isaacson, M. and K.-F. Cheung : Time-domain solution for second-order wave diffraction, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., Vol.116, No.2, pp.191~210,1990.
- 5) 喜岡 渉・角南安紀：大断面2次元構造体に作用する波力特性, 第29回海岸工学講演会論文集, pp.472~476,1982.
- 6) Wu, G. X. and R. E. Taylor : The second order diffraction force on a horizontal cylinder in finite water depth, Appl. Ocean Res., Vol.12, No.3, pp.106~111,1990.
- 7) Vada, T. : A numerical solution of the second-order wave-diffraction problem for a submerged cylinder of arbitrary shape, J. Fluid Mech., Vol.174, pp.23~37,1987.
- 8) McIver, M. and P. McIver : Second-order wave diffraction by a submerged circular cylinder, J. Fluid Mech., Vol.29, pp.519~529,1990.
- 9) Palm, E : Nonlinear wave reflection from a submerged circular cylinder, J. Fluid Mech., Vol.233, pp.49~63,1991.
- 10) Wu, G. X. : On the second order wave reflection and transmission by a horizontal cylinder, Appl. Ocean Res., Vol.13, No.2, pp.58~62,1991.
- 11) Wehausen, J. V. and E. V. Laitone : Surface waves, Encyclopedia of Physics, Vol.9, Springer-Verlag, pp.446~778,1960.
- 12) 小島治幸：没水水平版による波の分裂現象とその波浪制御法への応用に関する研究, 九州大学学位論文, 199 p,

1990.

- 13) 大山 巧・灘岡和夫：潜堤を通過する非線形波列の分裂現象の解析, 土木学会論文集, No. 450/II-20, pp. 31~40,

1992.

(1992. 8. 3 受付)

---

## GREEN'S FUNCTION APPROACH TO THE WEAKLY NONLINEAR INTERACTION PROBLEM OF TWO-DIMENSIONAL STRUCTURES OF ARBITRARY CROSS-SECTION

Wataru KIOKA and Hajime ISHIDA

The problem of second-order interaction of plane monochromatic incident water waves with two-dimensional structures of arbitrary form in finite water depth has been solved using the integral-equation method based on Green's theorem. The second-order double-frequency diffraction potential is obtained explicitly. It is shown that, to meet the nonhomogenous free surface condition, the contribution from the integration with respect to two imaginary vertical lines at infinity on both sides of a structure must be included in the integral equation. The present approach has been applied to a two-dimensional submerged breakwater to investigate higher harmonic generation. Extensive convergence tests are made for the integration over the free surface. Numerical results are obtained for the second harmonic amplitude oscillation over the submerged breakwater.

---