

固体粒子浮遊による二次元下層密度流先端部の解析

福嶋祐介*

固体粒子を浮遊する二次元密度流フロントの解析モデルを提案した。モデルの基礎方程式は流体の質量保存式、固体粒子の質量保存式、及び運動方程式である。モデルの妥当性を検討するため、塩水と淡水による二次元密度流フロントの数値解析を行った。この結果を実験値と比較したところ、抗力係数が $c_D = 0.5$ のとき解析結果は実験値を説明する。このモデルを粉雪雪崩に適用した結果、高速で移動する雪崩のフロントの特性を表すことができた。

Key Words : suspension flow, density current, density front, underflow

1. 序 論

傾斜した底面上に周囲流体より密度の大きな流体が流入すると、その密度差により傾斜面上を流れ下層密度流を形成する。下層密度流は、その流動特性の違いにより、先端部と定常部に分けられる。この先端部は自然界でしばしば観察され、密度流フロントとも呼ばれる。密度流フロントは、河口付近で観察される塩水くさびの先端部、貯水池に流入する濁水の先端部などもあり、これらは工学的にも重要である。密度差は、淡水と塩水、清水と濁水などによって生ずる。前者は溶解性の物質による密度流の代表例であり、この他温度差による密度流がある。後者は固体粒子が流体中に浮遊しているため密度流となる代表例であり、固体と流体の二相流である。この例として、固液二相流である泥水流、固気二相流である雪崩、火砕流などがあげられる。

密度流フロントの流動機構についての研究はこれまで主として実験的検討が多くなされている。この中で古典的なものに Keulegan¹⁾、Middleton²⁾の研究がある。Keulegan は、さまざまな水量に対して密度流フロントの流動機構についての測定を行い、水平床の条件に対し密度流フロントの形状が相似になることを示している。一般に密度流フロントの形状は、水路床勾配に依存し、同じ水路床勾配では、密度差、流量に関係なく、その形状は相似になることが示唆されている。Middleton は水路の傾斜角をいくつか変えて、そのときのフロントの挙動を実験的に明らかにした。

一方、密度流フロントの流動特性を理論的に解明しようとする試みもいくつかなされている。福岡ら³⁾は、塩水及び泥水を用いて下層密度流フロントの実験を行い、フロントの先端速度、高さを測定しており、またフロント

内の流速分布、濃度分布の詳細な測定を行っている。福岡らはこの実験結果をもとに密度流フロントの形状を簡略化してあらわした。それを基に理論式を示して数値解析を行い、先端速度と高さの流下方向変化を求め実験値と比較している。福岡と福嶋⁴⁾は成層化した貯水池内の濁水の挙動を解析しているが、下層密度流フロントの解析で、福岡ら³⁾の理論を用いている。福岡ら³⁾の理論は、界面及び底面に作用するせん断力及び連行を無視している。また、江頭⁵⁾はフロントでの連行が重要であるとの認識から、連行を考慮したフロントの流動の理論を提案し、実験結果と比較している。秋山ら⁶⁾は下層密度流をフロント部と後続部に分け、後続部を特性曲線法で、フロント部を一次元解析する方法をとっている。秋山らのモデルでは、周囲水の連行とフロント部に作用する抵抗を考慮している。しかしながら、福岡ら³⁾⁴⁾の理論、江頭⁵⁾、秋山ら⁶⁾の用いたフロントの基礎方程式はともに先験的に与えられたもので、その誘導過程の根拠が明確ではない。また、これらの理論は溶解性の物質が密度流の原因となる場合を想定したもので、懸濁性の物質による密度流の解析を行うものではない。先にも述べたように、懸濁性の物質による密度流フロントは自然界で多く観察され、これらの流動機構を理論的に解明することの意義は大きいと思われる。

本研究の目的は、溶解性あるいは懸濁性の物質による密度流フロントの流体力学的な基礎方程式を求めることである。特に全層雪崩などを想定し、体積濃度がかなり大きい場合の取扱いが可能であるように配慮する。このような流れでは、固体粒子の密度が周囲流体の密度に比べてかなり大きい場合が生ずることを念頭におき、通常密度流の解析で用いられるブーシネスク近似は用いない。

以上の理論を塩水を用いた密度流フロントの実験結果と比較し、理論に含まれる諸係数を合理的に定める。また、浮遊性あるいは懸濁性の密度流フロントの代表例で

* 正会員 工博 長岡技術科学大学 助教授 工学部建設系
(〒940-21 長岡市上富岡町 1603-1)

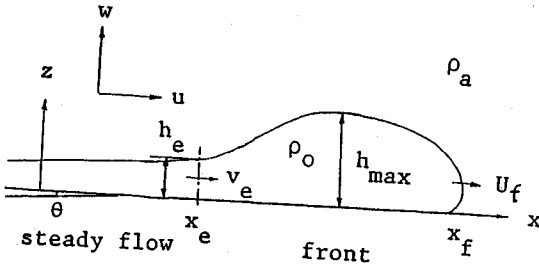


図-1 固体粒子浮遊による密度流の概要と記号

ある, 粉雪雪崩の数値解析例を示す。

2. 固液及び固気二相流の基礎方程式

固体の粒子が小さい場合には, 固相の流速は z 方向に沈降速度 w_s だけ小さく x 方向には液相の流速と等しくなると考えられる。また, 固体粒子の密度が周囲流体の密度に比べて極めて大きく, 固体粒子の小さい濃度でも混相流体としての密度が周囲流体の密度より大きくなる場合を想定して, プーシネスク近似は用いない。流れの概要及び記号を図-1に示す。流れの主流方向を x 軸, これと直交方向上向きの座標を z 軸にとる。 x 方向, z 方向の流速成分を u , w で表す。以下の取扱いでは, 乱流が十分に発達しており, 分子拡散, 分子粘性の効果が無視できる場合を考える。また, レイノルズ方程式, 拡散方程式において, 小さいオーダーの項を無視する。プーシネスク近似を用いない解法を行うため必要最小限の効果を表す項のみを残すことにする。

固液あるいは固気混相流としての密度 ρ は, 流体相 (液相あるいは気相) の密度 ρ_a , 固相の密度 ρ_s により次のように表される。

$$\rho = \rho_a(1-c) + \rho_s c = \rho_a(1+Rc) \dots\dots\dots (1)$$

ここで, c は固体粒子の体積濃度, $R = (\rho_s - \rho_a)/\rho_a$ は流体に対する固体粒子の相対比重である。

固体粒子の拡散方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} uc + \frac{\partial}{\partial z} (w - w_s)c = -\frac{\partial}{\partial z} \overline{c'w'} \dots\dots\dots (2)$$

ここで, w_s は固体粒子の沈降速度である。ここで, x 方向の濃度・速度相関の項は z 方向の濃度・速度相関に比べて小さいオーダーであるとし, 後者の項のみを考慮する近似を行う。液相 (気相) の質量保存式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} (1-c) + \frac{\partial}{\partial x} u(1-c) + \frac{\partial}{\partial z} w(1-c) = \frac{\partial}{\partial z} \overline{c'w'} \dots\dots\dots (3)$$

式 (2) に ρ_s , 式 (3) に ρ_a をかけ, これらの和をとり, さらに式 (1) の関係を用いると混相流の質量保存式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} \rho u + \frac{\partial}{\partial z} \rho w = \rho_s w_s \frac{\partial c}{\partial z} - (\rho_s - \rho_a) \frac{\partial}{\partial z} \overline{c'w'} \quad (4)$$

x 方向, z 方向の運動方程式は次のようになる。ただし, 速度相互の相関, 濃度速度相関のうち主要な項のみを残し, x 方向の速度・濃度相関項は無視している。

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u + \frac{\partial}{\partial x} \rho u^2 + \frac{\partial}{\partial z} \rho uw = \rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho u'w'} \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho w + \frac{\partial}{\partial x} \rho uw + \frac{\partial}{\partial z} \rho w^2 = -\rho g \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho w'^2} \quad (6)$$

式 (6) において圧力を一様流体分の静水圧 p_1 , 密度差分の静水圧 p_2 , 静水圧からの差圧 p' に分けて考える。すなわち, 式 (6) は次のように分割して表される。

$$p_1 = \rho_a g \cos \theta (H - z) \dots\dots\dots (7)$$

$$p_2 = \rho_a R g \cos \theta \int_z^H c dz \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho w + \frac{\partial}{\partial x} \rho uw + \frac{\partial}{\partial z} \rho w^2 = -\frac{\partial}{\partial z} p' - \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho w'^2} \dots\dots (9)$$

ここで, H は z 座標で測った水面の高さで, 流体が静止しているか, あるいは流速が極めて小さい場合には次のように書ける。

$$H = H_0 + x \tan \theta \dots\dots\dots (10)$$

式 (7), (8) を式 (5) に代入し式 (10) を用いて整理すると, 式 (5) は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \rho u + \frac{\partial}{\partial x} \rho u^2 + \frac{\partial}{\partial z} \rho uw \\ &= \rho_a R c g \sin \theta - \rho_a R g \cos \theta \int_z^H c dz \\ & - \frac{\partial}{\partial x} p' - \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho u'w'} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

以降の解析では, 式 (9) を直接解くことはしないが, 式 (11) の圧力項でその一部を考慮する。

3. 層積分方程式

2. で求められた固液二相流の基礎方程式 (2), (4), (11) を積分して層積分の方程式を求める。まず, 固相の質量保存式 (2) を底面 ($z=0$) から界面 ($z=h$) まで積分する。積分にあたっては界面の高さ h が独立変数 t, x の関数であることを考慮する。式 (2) の積分は次のように表される。

$$\begin{aligned} & \int_0^h \left\{ \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} uc + \frac{\partial}{\partial z} (w - w_s)c - \frac{\partial}{\partial z} \overline{c'w'} \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h c dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u c dz - \frac{\partial h}{\partial t} c_i - \frac{\partial h}{\partial x} u_i c_i \\ & + (w_i - w_s) c_i - (w_b - w_s) c_b + \overline{c'w'}|_i - \overline{c'w'}|_b = 0 \quad (12) \end{aligned}$$

ここで、 u_i は界面での x 方向での流速、 w_b は底面での z 方向の流速、 w_i は界面での z 方向の流速、 c_i は界面での固体粒子の体積濃度、 c_b は底面での固体粒子の体積濃度である。境界条件として、次の関係が与えられる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_i \frac{\partial h}{\partial x} - w_i = w_e \dots\dots\dots (13)$$

$$w_i c_i - \overline{c'w'}|_i = 0 \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 w_e は局所的な進行速度である。式(13)、(14)を用い、また界面での濃度 c_i が十分に小さく零となると仮定すると式(12)は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h cdz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h ucdz = \overline{c'w'}|_b - w_e c_b \dots\dots\dots (15)$$

式(4)、及び式(11)についても同じように積分を行えば、次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho u dz = \rho_e w_e + \rho_s (\overline{c'w'}|_b - c_b w_s) \dots\dots\dots (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho u^2 dz = \rho_a u_i w_e$$

$$+ \rho_a Rg \sin \theta \int_0^h cdz - \rho_a Rg \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \int_x^h cdz' dz$$

$$- \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} p' dz - \rho \overline{u'w'}|_i + \rho \overline{u'w'}|_b \dots\dots\dots (17)$$

以上得られた式(15)、(16)、(17)が密度流の層積分方程式である。式(17)に見られるように、これらの式は密度流で一般的に仮定されるブーシネスク近似は行っていない。従って、これらの式は、雪崩などの周囲流体の密度に比べて密度が極めて大きい場合の現象にも適用できる。また、これらの基礎方程式で塩水や温度差などに基づく密度流フロントの解析をする場合には、固体粒子の沈降速度を零とすればよい。

4. 密度流フロントの基礎方程式

ここでは3.で得られた層積分方程式をさらに x 方向に積分して、密度流フロントの基礎方程式を求める。図-1に示したように、フロントの先端部の位置を $x = x_f(t)$ 、 $x = x_e(t)$ とし、それぞれ x_f 、 x_e は時間の関数とする。式(16)は次のように積分される。

$$\begin{aligned} & \int_{x_e}^{x_f} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho u dz - \rho_a w_e \right. \\ & \left. - \rho_s (\overline{c'w'}|_b - c_b w_s) \right\} dx \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_e}^{x_f} \int_0^h \rho dz dx - \frac{\partial x_f}{\partial t} \int_0^h \rho_f dz + \frac{\partial x_e}{\partial t} \int_0^{h_e} \rho_e dz \\ & + \int_0^{h_f} \rho_f u_f dz - \int_0^{h_e} \rho_e u_e dz - \int_{x_e}^{x_f} \rho_a w_e dx \\ & - \int_{x_e}^{x_f} \rho_s (\overline{c'w'}|_b - c_b w_s) dx = 0 \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{\partial}{\partial t} x_f - u_f = w_f \dots\dots\dots (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} x_e = v_e \dots\dots\dots (20)$$

ここで、 w_f は x 方向の進行速度、 v_e はフロント後部の速度である。式(19)、(20)の関係を式(18)に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_e}^{x_f} \int_0^h \rho dz dx = \int_0^{h_f} \rho_f w_f dz + \int_0^{h_e} \rho_e (u_e - v_e) dz \\ & + \int_{x_e}^{x_f} \rho_a w_e dx + \int_{x_e}^{x_f} \rho_s (\overline{c'w'}|_b - c_b w_s) dx \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

進行に関する項を次のように表す。

$$\int_0^{h_f} \rho_f w_f dz + \int_{x_e}^{x_f} \rho_a w_e dx = \rho_a P_i W_e \dots\dots\dots (22)$$

ここで、 P_i は密度流フロント上面の潤辺長であり、 W_e はフロントによる平均の進行速度である。式(21)は次のように簡単化される。このとき、諸量が t のみの関数となることから、左辺の微分は常微分となることに留意する。

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{x_e}^{x_f} \int_0^h \rho dz dx = \rho_a P_i W_e + \int_0^{h_e} \rho_e (u_e - v_e) dz \\ & + \int_{x_e}^{x_f} \rho_s (\overline{c'w'}|_b - c_b w_s) dx \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

式(15)、式(17)の積分は、式(18)から式(23)と同様の手順によって得られる。これを結果のみ記せば、式(15)、(17)は次のように積分される。

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{x_e}^{x_f} \int_0^h cdz dx \\ & = \int_0^{h_e} c_e (u_e - v_e) dz + \int_{x_e}^{x_f} (\overline{c'w'}|_b - c_b w_s) dx \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

運動方程式の積分は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{x_e}^{x_f} \int_0^h \rho u dz dx = \rho_a P_i u_i W_e + \int_0^{h_e} \rho_e u_e (u_e - v_e) dz \\ & + \rho_a Rg \sin \theta \int_{x_e}^{x_f} \int_0^h cdz dx - \rho_a Rg \cos \theta \int_0^{h_e} \int_{x'}^{h_e} cdz' dz \\ & - \int_0^{h_f} p' dz + \int_0^{h_e} p' dz - \int_{x_e}^{x_f} \rho_a \overline{u'w'}|_i dz \\ & + \int_{x_e}^{x_f} \rho_b \overline{u'w'}|_b dz \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

以上、得られた式(23)、(24)、(25)が密度流フロントを一次元化した基礎方程式である。

式(23)、(24)、(25)の左辺の積分を用いてフロント部の密度 ρ_0 、平均体積濃度 C 及び平均流速 U が次のように定義される。

$$\int_{x_e}^{x_f} \int_0^h \rho dz dx = \rho_0 A \dots\dots\dots (26)$$

$$\int_{x_e}^{x_f} \int_0^h cdzdx = CA \dots\dots\dots (27)$$

$$\int_{x_e}^{x_f} \int_0^h \rho u dz dx = \rho_0 UA \dots\dots\dots (28)$$

ここで、 A はフロントの面積である。式(26)～(28)で定義される、 ρ_0, C, U はフロント内で一定であると仮定する。密度流フロントを構成する物質が固体の場合には先に述べたように混相流の平均密度 ρ_0 は次のように表される。

$$\rho_0 = \rho_a(1 - C) + \rho_s C = \rho_a(1 + RC) \dots\dots\dots (29)$$

ここで、固体粒子を浮遊する流れでは、 R は流体中の固体粒子の比重である。一方、溶解性の物質の場合には RC は相対密度差である。密度流フロントの解析を行うためいくつかの仮定を行う。式(25)の右辺、第5、6項、第7項、第8項をそれぞれ次のように表す。

$$\int_0^{h_f} p' dz - \int_0^{h_e} p' dz = \rho_a c_D U_f^2 h_f \dots\dots\dots (30)$$

$$\int_{x_e}^{x_f} \rho_a \overline{u'w'}|_i dz = \frac{1}{2} f_i \rho_a U^2 P_i \dots\dots\dots (31)$$

$$\int_{x_e}^{x_f} \rho_b \overline{u'w'}|_b dz = -\frac{1}{2} f_b \rho_b U^2 P_b \dots\dots\dots (32)$$

式(30)では、フロント前部と後部の圧力差に基づく形状抵抗が作用すると考えている。また、式(31)、(32)はそれぞれ界面と底面に作用するせん断力を表したものである。ここで、 c_D は形状抵抗係数、 f_i 、 f_b はそれぞれ界面と底面の摩擦抵抗係数である。

式(23)、(24)、(25)を解くためには、定常部の流速分布、濃度分布に関する何らかの仮定をおく必要がある。フロントの後端の速度 u_e は z に依らず一定である。定常部の流速分布、濃度分布は著者¹³⁾の解析により相似解が得られていることが確認されており、次のような無次元形で表すことができる。

$$u_e = u_m \zeta(z/b_{1/2}) \dots\dots\dots (33)$$

$$c_e = c_m \phi(z/b_{1/2}) \dots\dots\dots (34)$$

ここで、 u_m 、 c_m は、それぞれ最大流速、最大濃度であり、 $b_{1/2}$ は、流速の半値半幅である。このとき、式(23)、(24)、(25)は次のように表される。

$$\frac{d}{dt} \rho_0 A = \rho_a P_i W_f + (\rho_a I_1 u_m b_{1/2} - \rho_1 v_e h_e) + \rho_s P_b w_s (E_s - c_b) \dots\dots\dots (35)$$

$$\frac{d}{dt} CA = c_m b_{1/2} (I_4 u_m - I_3 v_e) + P_b w_s (E_s - c_b) \dots\dots\dots (36)$$

$$\frac{d}{dt} \rho_0 UA = \rho_a P_i u_i W_f + \rho_a b_{1/2} (I_2 u_m^2 - I_1 v_e u_m) + \rho_a R g \sin \theta CA - \rho_a R g \cos \theta I_5 c_m b_{1/2}^2 - \rho_a c_D U_f^2 h_f$$

$$-\frac{1}{2} f_i \rho_a U_f^2 P_i - \frac{1}{2} f_b \rho_b U_f^2 P_b \dots\dots\dots (37)$$

ここで、 h_e は定常部の高さであり、次のように定義する。

$$h_e = (\int_0^\infty u dz)^2 / \int_0^\infty u^2 dz \dots\dots\dots (38)$$

また、 ρ_1 は定常部の平均密度であり次のように表される。

$$\rho_1 = \rho_a + \frac{1}{h_e} \int_0^\infty \rho_a R c_m \phi dz = \rho_a (1 + I_3 R c_m b_{1/2} / h_e) = \rho_a (1 + I_0 R c_m) \dots\dots\dots (39)$$

式(35)から式(37)の中の諸積分値は次のように定義される。

$$I_1 = \int_0^\infty (1 + R c_m \phi) \zeta d\eta = I_{10} + R c_m I_4 \dots\dots\dots (40)$$

$$I_2 = \int_0^\infty (1 + R c_m \phi) \zeta^2 d\eta = I_{20} + R c_m I_{21} \dots\dots\dots (41)$$

$$I_3 = \int_0^\infty \phi d\eta \dots\dots\dots (42)$$

$$I_4 = \int_0^\infty \zeta \phi d\eta \dots\dots\dots (43)$$

$$I_5 = \int_0^\infty \int_\eta^\infty \phi d\eta' d\eta \dots\dots\dots (44)$$

式(40)、(41)に含まれる積分値は次のように与えられる。

$$I_{10} = \int_0^\infty \zeta d\eta \dots\dots\dots (45)$$

$$I_{20} = \int_0^\infty \zeta^2 d\eta \dots\dots\dots (46)$$

$$I_{21} = \int_0^\infty \phi \zeta^2 d\eta \dots\dots\dots (47)$$

定常部の高さは、式(38)に、式(45)、(46)を代入して次のように求められる。

$$h_e = b_{1/2} I_{10}^2 / I_{20} \dots\dots\dots (48)$$

ここで、式(39)の中の係数は次のように表される。

$$I_0 = I_3 b_{1/2} / h_e = I_3 I_{20} / I_{10}^2 \dots\dots\dots (49)$$

I_{10} 、 I_{20} 、 I_3 は濃度 c_m の関数ではないことから、 I_0 も濃度の関数ではない。フロントの移動速度を U_f 、フロントの高さを h_{max} 、フロント前部の長さを L_f 、後部の長さを L_e とする。これらの関係は以下のように与えられる。

$$U_f = U + dL_f / dt \dots\dots\dots (50)$$

$$U_e = U - dL_e / dt \dots\dots\dots (51)$$

$$L_f = \xi_f h_{max} \dots\dots\dots (52)$$

$$L_e = \xi_e h_{max} \dots\dots\dots (53)$$

$$A = \xi_A h_{max}^2 \dots\dots\dots (54)$$

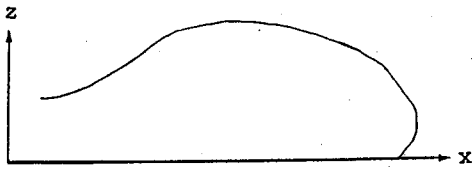


図-2 浮遊下層密度流のフロント形状

表-1 形状係数の値

ξ_A	ξ_i	ξ_b	ξ_f	ξ_c
2.011	3.41	2.58	1.23	1.46

$$P_i = \xi_i h_{max} \dots\dots\dots (55)$$

$$P_b = \xi_b h_{max} \dots\dots\dots (56)$$

ここで、 ξ_f , ξ_c , ξ_A , ξ_i , ξ_b はフロントの形状に依る関数であり、フロントの形状によって定まる。フロントの形状は厳密には斜面の傾斜角によって僅かに変化し、また固・液混相流の場合と液・液相流とで変わる可能性がある。このようにフロントの形状は必ずしも不変ではないが、代表的な形状として著者が行った実験をもとに第一次近似として図-2のような形状を考えることにする。このとき形状係数は表-1のようになる。

連行速度 W_c 、連行係数 E_c を次のように表す。

$$W_c = E_c U \dots\dots\dots (57)$$

実験結果との比較の場合には、次式で表される連行係数を、用いた。

$$E_c = 0.36(\theta/90^\circ) \dots\dots\dots (58)$$

雪崩の計算では、次式で表される連行係数を用いた。

$$E_c = 0.1(\theta/90^\circ) \dots\dots\dots (59)$$

式(58)は、Beghin et al.⁷⁾が塩水を用いた傾斜サーマルに対して得られた連行係数を著者が再整理して得たものである。塩水による密度流フロントの流動特性は傾斜サーマルに近いと考え、式(58)を今回の解析で用いるものとする。

式(59)は、Escudier and Maxworthy⁸⁾が広い水理条件のもとで測定を行い、周囲流体と流れ部の密度差が極めて大きい場合の観測結果をまとめている。その結果、連行係数 E_c は密度差の大小に依って連行係数が大きくは変わらないことを示している。また、彼らは鉛直サーマルの連行係数の測定結果を求め、その値が0.1程度であるとしている。一方、Beghin et al.⁷⁾の傾斜サーマルを対象とした実験結果は連行係数が斜面の傾斜角に比例するとい

う結果を得ている。式(59)は、このような Escudier and Maxworthy⁸⁾と Beghin et al.⁷⁾の実験結果を表現した実験式である。著者⁹⁾¹⁰⁾が式(59)を用い粉雪雪崩の解析を行っている。界面抵抗係数 f_i は、金子の式¹¹⁾を用い、底面抵抗係数は f_b は流速分布の対数則¹²⁾から求めた。固・液混相流と液・液相流との大きな違いは式(35)、(36)において $w_s(E_c - c_b)$ の項が含まれていることである。一般に固体粒子の連行係数 E_c は底面でのせん断力の関数である。連行係数 E_c が底面付近の濃度 c_b より大きな場合は、固体粒子の巻き上げが大きくなりフロント内の固体粒子が増加する。一方、 E_c が c_b より小さい場合は固体粒子が沈降することになる。

5. フロント後部の境界条件

著者¹³⁾は、 $k-\epsilon$ 乱流モデルを用いて、傾斜プリューム¹³⁾の定常部が相似解をもつことを明らかにしている。ここでは、その結果を密度流フロントの後部に接続し境界条件として与える方法を示す。著者は、上流端から密度フラックスが連続的に与えられる場合には、流速が一定になり、濃度が流下距離に反比例し、噴流幅が流下距離に比例するという相似解をもつことを示した。密度差のフラックスを Q_c とする。これは速度を u 、濃度を c とするときのように定義される。

$$Q_c = \int_0^\infty u c dz = \int_0^\infty u_m c_m b_{1/2} \zeta \phi d\eta$$

$$= I_4 u_m c_m b_{1/2} \dots\dots\dots (60)$$

ここで、 I_4 は式(43)で与えられる係数である。流入密度フラックスが式(60)で与えられ、仮想原点からの距離を x_0 とすると、その位置での流速、濃度の最大値、流速の半値半幅 $b_{1/2}$ は次のように与えられる。

$$u_m = (Rg \sin \theta Q_c)^{1/3} F'_{max} \dots\dots\dots (61)$$

$$c_m = c_{m0} \frac{x_0}{x} \dots\dots\dots (62)$$

$$b_{1/2} = \eta_{1/2} x \dots\dots\dots (63)$$

F'_{max} , $\eta_{1/2}$ は相似解の解析より得られた、無次元最大速度、無次元の流速の半値半幅である。 c_{m0} は $x = x_0$ での最大濃度を表す。

密度流フロントの解析では、与えられた濃度の初期値 c_{m0} と密度フラックス Q_c 、及び表-2に記された F'_{max} , $\eta_{1/2}$ より、 $u_m, c_m, b_{1/2}$ を計算し、これをフロント上流端の値として与え計算を進める。

6. 二次元下層密度流の実験

以上で得られた理論式を検討するため、下層密度流フロントの実験を行った。実験装置を図-3に示す。実験に用いた水槽は2つあり、一つめの水槽は、長さ1.8m、幅

表-2 計算に用いた諸係数の値

θ (deg)	F'_{max}	$b_{1/2}$	I_{10}	I_{20}	I_{21}	I_3	I_4	I_5
10	3.83	0.00257	0.963	0.679	0.399	0.630	0.482	0.212
15	3.56	0.00340	0.954	0.677	0.431	0.654	0.499	0.210
30	3.34	0.03991	0.986	0.705	0.441	0.695	0.505	0.206

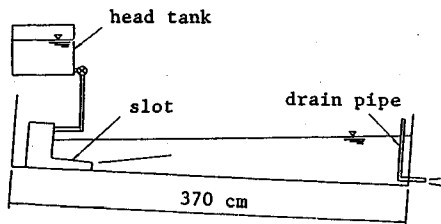


図-3 実験装置

表-3 実験条件

Run No.	θ (deg)	Q (l/s)	C (%)
1	10	0.317	1.0
2	15	0.317	1.0
3	30	0.317	1.0

0.15m, 高さ 1.0m の水槽に傾斜角 $\theta = 30^\circ$ の底板を設置したものである。スロットの開口部の高さは 4cm である。二つめの水槽は、長さ 3.7m, 幅 0.15m, 高さ 0.4m, 水路床勾配可変の水槽を用いた。これを 図-3 に示す。スロットの開口部の高さ 1.8cm である。これらの水槽に淡水を満し重量濃度 1% に調整を行った塩水をスロットから流入させフロントを形成させた。測定項目は、密度流フロントの移動速度、フロントの高さである。これらはいずれも水路の横方向からビデオカメラでフロントの流動を記録し、後にストップモーションアナライザーを用いてデータ化した。さきに述べたように、塩分の重量濃度 1% の塩水を用いて流量を変化させ、水路床勾配 $\theta = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ で実験を行ったものである。計算結果と比較したデータは流量がもっとも大きく、水路床勾配が $\theta = 10^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ の 3 通りである。これらの実験条件を表-3 にまとめて示す。

7. 計算結果と実験値の比較

本論文で展開した基礎方程式は固・液混相流についてのものであるが、この理論は液・液相流にも適用可能である。一般的に固・液混相流の実験はかなり難しくここで比較できる測定結果はない。そこで、ここでは 6. で述べた液・液相流の実験結果と理論値との比較を行い理

論の妥当性を検討する。

本論文で提案した理論の妥当性を検討するため、7. の実験結果と比較したのが 図-4 から 図-6 である。これらの 図で (a) がフロントの高さを、(b) がフロントの移動速度を、(c) がフロントの濃度を表している。水路床勾配は 図-4 から 図-6 まで順に $\theta = 10^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ である。図中、曲線は抗力係数 c_D をパラメータとした計算結果を示し、丸印が実験値を示したものである。

図-4(a) は $\theta = 30^\circ$ の密度流フロントの高さの変化を流下距離に対して示したものである。この 図から抗力係数 $c_D = 0.0$ のものは、実験値より下まわっており、 $c_D = 0.5$ から 1.0 の計算値がほぼ実験値と一致することが見て取れる。図-4(b) は密度流フロントの先端速度を示したものである。この場合実験値はかなり大きなばらつきを示しており、特に流下距離が小さい範囲 ($x < 20\text{cm}$) ではかなり大きな値をとる。この理由として考えられるのは、流下距離が小さい範囲ではフロントの形成領域に相当し、流速がスロットの出口の流速に近くなっていたためと考えられる。その後流速はわずかに減少して行くが、 $c_D = 0.5 - 1.0$ の計算値が実験値の概略を表している。図-4(c) は濃度分布の計算値を示したものである。フロントの濃度は、周囲流体の連行によって急激に減少し、流下距離 $x = 200\text{cm}$ で初期濃度の 1 割程度まで減少する。

図-5(a)-(c) の $\theta = 15^\circ$ の結果を見ると、フロントの高さ(図-5(a))、フロントの速度(図-5(b))は、ともに $c_D = 0.5$ の計算結果が実験値の変化を良く表している。図-5(c) より、濃度の低下は $\theta = 30^\circ$ より小さく、 $x = 200\text{cm}$ では、初期値の 2 割ないし 3 割程度になっている。 $\theta = 10^\circ$ で抗力係数を $c_D = 0.0$ とした場合、解析を行うことができなかった。これは抗力係数が小さく、式 (58) の連行係数も小さな場合には、フロントの移動速度が大きくなり、解析の段階で零割などが発生する為である。解析を行うことができた $c_D = 0.5 - 2.0$ の計算結果を見ると、図-6(a) で表されるフロントの高さは、 $c_D = 0.5$ の結果が実験値とほぼ一致していることがわかる。一方、フロントの速度 図-6(b) は、 $c_D = 0.5$ でも計算値がやや小さな値となる。図-6(c) より、フロント部の濃度は指数関数的に減少するが、その値は $x = 200\text{cm}$ で初期値の 3 割程度となっている。

以上の実験値と実測値との比較により、次のことがわ

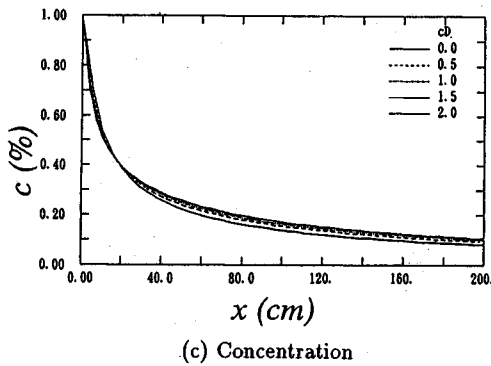
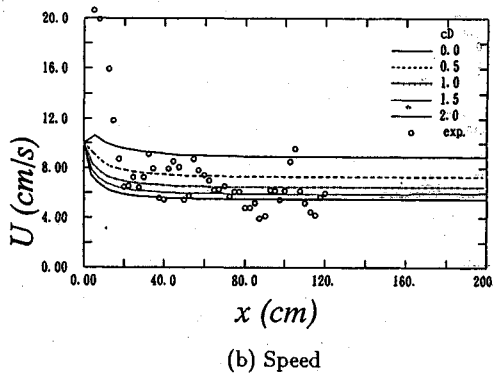
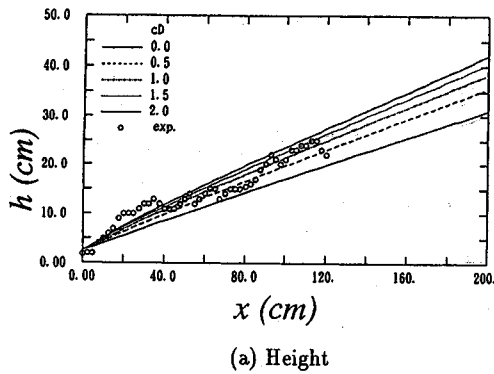


図-4 塩水密度流フロントの計算結果と実験値との比較 ($\theta = 30^\circ$)

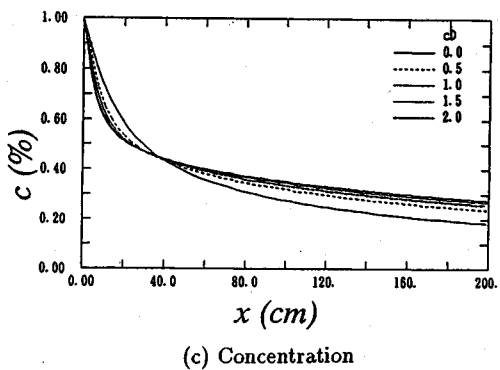
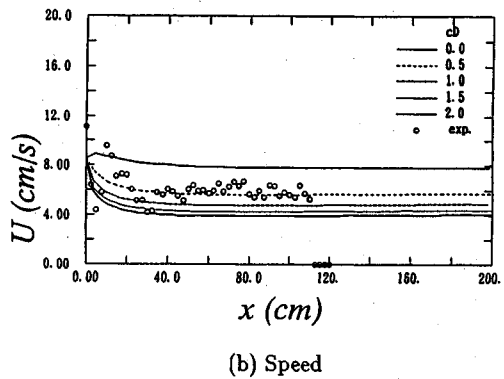
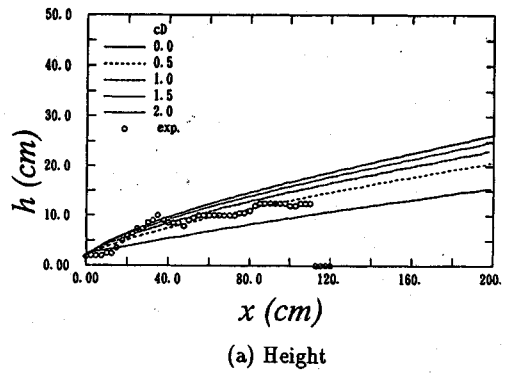


図-5 塩水密度流フロントの計算結果と実験値との比較 ($\theta = 15^\circ$)

かる。フロントの高さの変化は水路床勾配によって大きく変化する。一方、フロントの速度の変化特性は水路床勾配によってあまり差が大きい。この傾向は図-4(a)、図-5(a)、図-6(a)の高さの変化を表した図の比較から、また、図-4(b)、図-5(b)、図-6(b)の速度の変化を表した図の比較から明らかである。フロントの速度の変化に影響を与える因子として、周囲水とフロント内密度差による有効重力、せん断応力、形状抵抗が考えられる。フロントの高さが増すことで、有効重力が増加するが、同時に形状抵抗、周囲水の連行による見かけの抵抗が増加する。

水路床勾配が大きい条件では、このようにフロントの高さが増すことで、これらの因子が影響しあってフロントの速度が決まる。水路床勾配が小さい場合にはこの逆の傾向であり、フロントの高さが小さくても形状抵抗などが減少するため、それほど速度の減少は小さくはないものと考えられる。

以上を総合すると、抗力係数が $c_D = 0.5$ 程度で計算値は実測値とよく一致するようである。この抗力係数の値は、福岡ら³⁾、福岡と福嶋⁴⁾の用いた値 $c_D = 1.0 - 1.25$ と比べて小さい。この理由は次のように考えられる。福岡

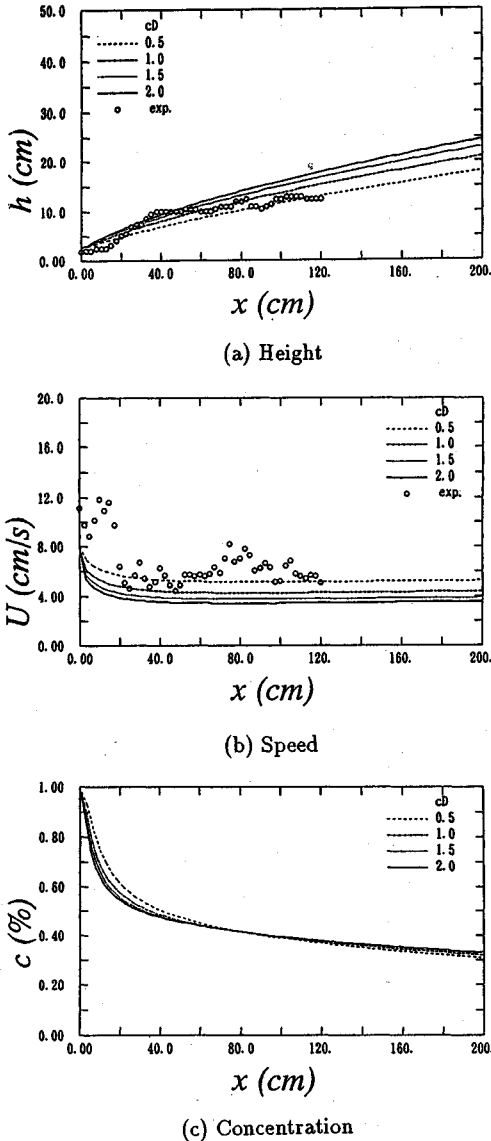


図-6 塩水密度流フロントの計算結果と実験値との比較 ($\theta = 10^\circ$)

ら³⁾、福岡と福嶋⁴⁾の解析では、フロント部の連行を無視していること、また底面及び界面でのせん断抵抗を無視している。これに対して、本論文で提案した理論は、フロントでの連行を考慮しておりこれによる見かけの抵抗が含まれていること、界面及び底面でのせん断応力を考慮していることなどの理由があげられる。また、計算値と実験値との比較から、フロント部の形状抵抗係数の値がいずれもほぼ同じ値になり c_D が約 0.5 となったことから、実験値と比較した範囲で本理論の妥当性が示された。

この節では液・液相流について抗力係数を変化させ、数

値解析結果が実験値をどのように説明するかを検討している。固・液混相流については液・液相流の場合と異なる流動形態をとることが予想され、抗力係数が変わる可能性がある。

8. 雪崩の数値解析

今回提案した理論を代表的な浮遊サーマルである粉雪なだれに適用する。解析に当たって、雪崩のフロント部では洗掘・堆積が無視できると考え、式 (35)、(36) の右辺で ($E_s - c_b \cos \theta = 0$) となるとした。また定常部の濃度は 1% とした。このため、フロント部の濃度と体積の比は流下方向に増加して行く。

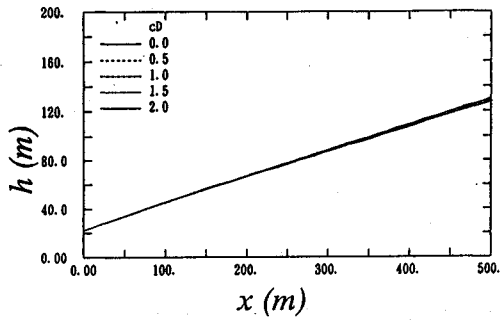
図-7(a)-(c) は雪崩の解析結果を示したものである。図-7(a) は雪崩の高さを、図-7(b) は雪崩の速度を、図-7(c) は雪崩の中の雪粒子の濃度を水平距離に対して示したものである。解析では、密度流フロントの結果を基にし、斜面の角度を $\theta = 30^\circ$ として抗力係数を $c_D = 0.0$ から 2.0 まで変化させた。図-7(a) の高さの流下距離変化は抗力係数を変えてもほとんど同じで差が極めて小さいことがわかる。図-7(b) の速度の変化は抗力係数によって差が現れている。図-7(c) は濃度であるが、この結果も抗力係数に大きくは影響されず差は小さい。

以上のようにして得られた結果より、雪崩の高さは流下距離が 500m ほどで 100m を越えて発達することがわかる。速度は、30m/s を僅かに越えた後緩やかに減少して行く。この結果は Hopfinger¹⁴⁾ が収集した雪崩の高さ、速度の観測結果とほぼ一致する。また、福嶋⁹⁾ は、斜面の傾斜角度が $\theta = 30^\circ$ の場合には、粉雪雪崩の速度が 100m/s を越えて大きくなることを示した。今回の解析では雪崩の先端部での雪粒子の連行を無視したため、前回の計算に比べて小さい速度になったものと思われる。

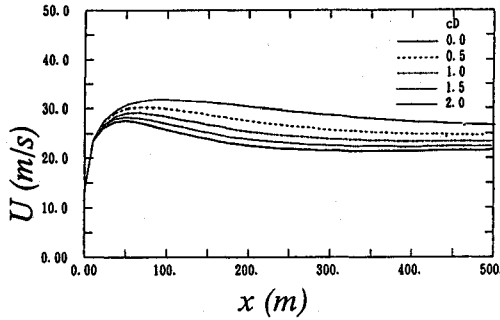
今回の解析では、周囲空気の連行は考慮しているが、底面からの雪粒子の連行・堆積は考慮していない。今後、雪崩の実測データをもとにさらに合理的な解析を行うことが課題として残された。また、雪崩に関する現地の測定が極めてむずかしいことから、理論値と比較することができるデータが乏しいのが現状である。これらのデータ収集もモデルの精度を高める上で重要である。

9. 結 論

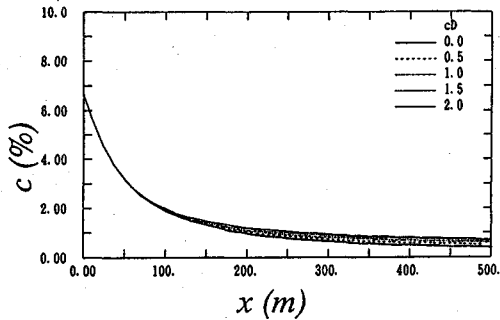
本論では、沈降性の二次元密度流フロントの基礎方程式を提案した。この理論では、固体粒子と混相流体の質量保存式、レイノルズ方程式の層積分を行い、さらにこれらの式を流下方向に積分して得られたものである。境界条件として傾斜壁面密度噴流の相似解を用いることとした。この基礎方程式を用いて、浮遊性の密度流フロントの単純な例である塩水による密度流フロントの解析を行い、実験値と比較した。解析ではフロントの抗力係数



(a) Height



(b) Speed



(c) Concentration

図-7 粉雪雪崩の計算結果

をパラメータとしたがこの値が約 0.5 の場合に水路床角度が $\theta = 30^\circ - 10^\circ$ の実験値と良い一致が得られた。実験条件の違いにもかかわらず抗力係数がほぼ同じ程度であり、この点で理論が十分に妥当であることが示された。

次に、浮遊密度流フロントの代表例である粉雪雪崩を念頭におき、今回提案した基礎方程式によって解析を行った。この結果、雪崩の発達・減衰過程を表現することがで

きた。このことで、今回のモデルが粉雪雪崩のシミュレーションの有効な手段となることが示された。一方、今回のモデルでは固体粒子の濃度が大きい場合の解析ができることを念頭におき、モデルを構築した。しかしながら、固体粒子の濃度が大きくなった場合の抵抗則についてはあまり情報が多くないのが現状である。このため、雪崩の解析では実測値との比較を行うことができず、モデルの妥当性を検討できなかった。これらの点については、モデルの精密化を計ることともに今後の課題である。本研究の一部は文部省科学研究費補助金、一般研究 C (代表者 福嶋祐介, 課題番号 02650355) の補助を受けた。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Keulegan, G.H., The motion of saline fronts in still water, *Nat. Bur. Stand. Rept.*, No. 5831, 1958.
- 2) Middleton, G. V., Experiments on density and turbidity currents, 1. Motion of the head, *Canadian Journal of Earth Science*, Vol. 3, pp. 524-546, 1966.
- 3) 福岡捷二, 水村和正, 加納敏行, 密度流先端部の流動機構に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第 274 号, pp.41-55, 1978.
- 4) 福岡捷二, 福嶋祐介, 成層化した二次元貯水池中で分岐する密度流の解析的研究, 土木学会論文報告集, 第 293 号, pp. 73-84, 1980.
- 5) 芦田和夫, 江頭進治, 中川一, 密度流先端部の挙動に関する研究, 第 16 回自然災害科学総合シンポジウム, pp.239-242, 1979.
- 6) 秋山壽一郎, Wei Wang, 浦勝, 非定常傾斜ブリュームの数値モデル, 水工学論文集, 第 35 巻, pp.167-172, 1991.
- 7) Beghin, P., Hopfinger, E. J. and Britter, R. E., Gravitational convection from instantaneous sources on inclined boundaries, *J. Fluid Mech.*, Vol. 107, pp. 407-422, 1981.
- 8) Escudier, M.P. and Maxworthy, T., On the motion of turbulent thermals, *J. Fluid Mech.*, Vol. 61, part 3, pp. 541-552, 1973.
- 9) 福嶋祐介, 粉雪雪崩の流動機構の解析, 雪氷, 第 48 巻 4 号, pp.189-194, 1986.
- 10) 福嶋祐介, 新潟県棚口地区表層雪崩の流動解析, 雪氷, 第 49 巻 1 号, pp.1-8, 1987.
- 11) 水理委員会密度流研究小委員会, 成層密度流の界面現象 (1), 土木学会論文報告集, 第 242 号, pp.73-90, 1975.
- 12) 日野幹雄, 明解水理学, 丸善, pp.144-145, 1983.
- 13) 福嶋祐介, 乱流モデルによる傾斜壁面密度噴流の解析, 土木学会論文集, 第 399 号/II-10, pp.65-74, 1986.
- 14) Hopfinger, E. J., Snow avalanche motion and related phenomena, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 15, pp. 47-76, 1983.
- 15) Simpson, J. E. and Britter, R. E., The dynamics of the head of a gravity current advancing over a horizontal surface, *J. Fluid Mech.*, Vol. 94, part 3, pp. 477-495, 1979.

(1992. 6. 15 受付)

ANALYSIS ON TWO-DIMENSIONAL DENSITY FRONT WITH SUSPENDED SOLID MATERIALS

Yusuke FUKUSHIMA

Analytical model on the two-dimensional density front with suspended solid material is presented. The fundamental equations for suspension fronts are derived from the mass conservation of fluids and solid materials, and the momentum equation. The model can express the simple density front caused by the dissolute materials in a special case. The numerical calculations are carried out to simulate the saline density fronts and compared with the experimental results. In the calculation, the drag coefficient c_D is chosen as a parameter. The agreement between the model and the experimental results is fairly well if we choose the likely value of $c_D = 0.5$. Finally, the powder snow avalanche is simulated by the presented model. The characteristics of powder snow avalanches are depicted well.
