

軸対称荷重・転位が作用する半無限層状性弾性体内の応力・変位の解析

平島健一*・山之口浩**・浜野浩幹***・
前田尚彦****

本論文では、まず、半無限弾性体に接合した材料定数の異なる多層の層状性弾性体を対象とし、層境界あるいは層内に一般的な軸対称の転位（変位の食違い）やクラックが存在し、また、最上層および層境界に荷重が作用した場合の任意位置における応力・変位分布を積分方程式で提示した。次にこれらの理論式を用いて、数値計算を実行し、2層および5層の舗装モデルに表面荷重が作用する場合ならびに層間に変位差（クラック）が存在する場合についての例を示した。

Keywords: half-space with elastic layers, axisymmetric force and dislocation, computer program, theoretical analysis of stress and displacement

1. 緒 言

新素材開発や材料試験あるいは構造物の築造等に関連して、境界表面に作用する荷重や異種材料の接合境界あるいは内部にクラックや一般的な転位（変位の食違い）が存在する問題の応力・変位解析は重要な研究課題である。

これらに関して従来からかなりの数の論文^{1)~17)}が発表されており、たとえば、Arin & Erdogan (1971) は薄層内に Penney-Shape 状のクラックが存在し、その上下に半無限弾性体が接合され、軸対称荷重を受ける場合の応力拡大係数を求めていた⁵⁾。また平面問題で同種のものを取り扱った論文として Erdogan (1971)¹⁾、および Erdogan & Gupta (1971)⁴⁾のものなどがある。

一般に、3次元弾性体の表面に、ある荷重が作用したり、内部に転位が存在する場合の力学現象を解明しようとするとき、その応力および変位状態を把握するためには、3次元境界値問題として的一般解、すなわち3次元弾性解を求めることが必要である。

特に、最近では破壊力学における疲労破壊の機構を明らかにするために、より精密な弾性応力計算が望まれるようになってきている。

本論文では、半無限弾性体に接合した材料定数の異なる多層の層状性弾性体からなる複合材料（図-1）を対象とし、層境界あるいは層内に一般的な軸対称の転位（変位の食違い）やクラックが存在し、また、最上層および層境界に荷重が作用した場合の応力・変位分布を積分方程式で提示する。ここでの取り扱いは軸対称の仮定のもとに最も一般的であって、表面および内部に作用する外

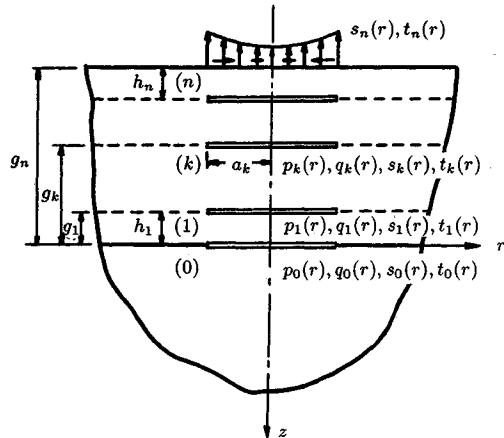


図-1 半無限弾性体に接合した薄層弾性体

荷重としては軸対称の直応力、せん断応力の作用、および境界層あるいは層内に軸方向変位、半径方向変位の一定あるいは線形変化の変位の食違い（一般的な転位）が生じた場合についての定式化を行い、具体的な幾つかの例について数値計算を行う。

この論文での具体的な最終目的の一つは多層の舗装構造の力学的定数を逆解析的に求めることであるが、そのための第1段階での定式化と精度特性の検証を順解析問題として実施することである。

2. 理論の定式化

図-1に示すように等方性的半無限弾性体の表層部に弾性定数の異なる n 層の薄い弾性層が完全接着状態で配置され、それらの接合境界において図-1のような転位あるいはクラックが存在し、表面あるいはクラックに作用荷重が働いている問題を考える。ここでは軸対称問題に限定するものとすれば、任意位置における変位および応力の式は調和方程式を満たす Papkovich-Neuber

* 正会員 工博 山梨大学工学部 土木環境工学科
(〒400 甲府市武田4-3-11)

** 正会員 日本舗道(株)技術研究所所長

*** 正会員 松江工業高等専門学校 土木工学科

**** 山梨大学大学院 修士課程学生

の関数 $\phi_k(r, z)$, $\psi_k(r, z)$ を用いて次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u_r^{(k)} &= -\frac{1}{2\mu_k} \left\{ \frac{\partial \phi_k}{\partial r} + z \frac{\partial \psi_k}{\partial r} \right\}, \\ u_z^{(k)} &= \frac{1}{2\mu_k} \left\{ (3-4\nu_k) \phi_k - \frac{\partial \phi_k}{\partial z} - z \frac{\partial \psi_k}{\partial z} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z^{(k)} &= 2(1-\nu_k) \frac{\partial \phi_k}{\partial z} - \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial z^2} - z \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial z^2}, \\ \sigma_r^{(k)} &= 2\nu_k \frac{\partial \phi_k}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\phi_k + z\psi_k), \\ \sigma_\theta^{(k)} &= 2\nu_k \frac{\partial \phi_k}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\phi_k + z\psi_k), \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (2)$$

$\tau_{rz}^{(k)} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-2\nu_k) \phi_k - \frac{\partial \phi_k}{\partial z} - z \frac{\partial \psi_k}{\partial z} \right]$

ここに、 μ_k, ν_k は各層のせん断弾性係数とポアソン比であり、 k は $1, 2, \dots, n$ の値をとる。式 (1), (2) を満足する関数 $\phi_k(r, z)$, $\psi_k(r, z)$ として次のように選ぶ。

$$\left. \begin{aligned} \phi_0(r, z) &= \int_0^\infty C_1 e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ \phi_0(r, z) &= \int_0^\infty C_2 e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda, \\ \phi_k(r, z) &= \int_0^\infty \{ C_{4k-1} sh\lambda(z+g_k) \\ &\quad + C_{4k} ch\lambda(z+g_k) \} \frac{J_0(\lambda r)}{\lambda sh\lambda_k} d\lambda, \\ \phi_k(r, z) &= \int_0^\infty \{ C_{4k+1} ch\lambda(z+g_k) \\ &\quad + C_{4k+2} sh\lambda(z+g_k) \} \frac{J_0(\lambda r)}{sh\lambda_k} d\lambda, \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (3)$$

ここに、 ϕ_0, ϕ_0 は半無限弾性体での関数を、 ϕ_k, ψ_k は層状部分の第 k 層での関数を、また $g_k = \sum_{j=1}^k h_j$ は図-1 に示したように r 軸から各層までの距離を表す。上式中の係数 C_j は λ のみの関数、すなわち $C_j(\lambda)$ であり、 $J_0(\lambda r)$ は 0 次の Bessel 関数である。また、ここでは簡単のため

$$\left. \begin{aligned} sh\lambda(z+g_k) &= \sinh\lambda(z+g_k), \\ ch\lambda(z+g_k) &= \cosh\lambda(z+g_k), \end{aligned} \right\}$$

を表わすものとする。

式 (3) を式 (1), (2) に代入して計算すると、変位・応力の一般形は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_r^{(0)} &= \frac{1}{2\mu_0} \int_0^\infty (C_1 + C_2 \lambda z) e^{-\lambda z} J_1(\lambda r) d\lambda, \\ u_z^{(0)} &= \frac{1}{2\mu_0} \int_0^\infty (C_1 + (\kappa_0 + \lambda z) C_2) e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda, \\ \sigma_z^{(0)} &= - \int_0^\infty [C_1 + \{2(1-\nu_0) + \lambda z\} C_2] \\ &\quad \times e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda, \\ \sigma_r^{(0)} &= \int_0^\infty \left[-2\nu_0 C_2 J_0(\lambda r) + \frac{1}{2} (C_1 + C_2 \lambda z) \right. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &\quad \times \{J_0(\lambda r) - J_2(\lambda r)\} \right] e^{-\lambda z} \lambda d\lambda, \\ \sigma_\theta^{(0)} &= \int_0^\infty \left\{ -2\nu_0 \lambda C_2 J_0(\lambda r) + \frac{1}{r} (C_1 + C_2 \lambda z) \right. \\ &\quad \times J_1(\lambda z) \left. \right\} e^{-\lambda z} d\lambda, \\ \tau_{rz}^{(0)} &= - \int_0^\infty [C_1 + \{(1-2\nu_0) + \lambda z\} C_2] \\ &\quad \times e^{-\lambda z} J_1(\lambda r) \lambda d\lambda, \\ u_r^{(k)} &= \frac{1}{2\mu_k} \int_0^\infty \{ (C_{4k-1} + C_{4k+2} \lambda z) \\ &\quad \times sh\lambda(z+g_k) + (C_{4k} + C_{4k+1} \lambda z) \\ &\quad \times ch\lambda(z+g_k) \} \frac{J_1(\lambda r)}{sh\lambda h_k} d\lambda, \\ u_z^{(k)} &= \frac{1}{2\mu_k} \int_0^\infty \{ (-C_{4k-1} + \kappa_k C_{4k+1} \\ &\quad - C_{4k+2} \lambda z) \times ch\lambda(z+g_k) \\ &\quad + (-C_{4k} - C_{4k+1} \lambda z + \kappa_k C_{4k+2}) \\ &\quad \times sh\lambda(z+g_k) \} \frac{J_0(\lambda r)}{sh\lambda h_k} d\lambda, \\ \sigma_z^{(k)} &= - \int_0^\infty \{ [C_{4k-1} - 2(1-\nu_k) C_{4k+1} + C_{4k+2} \lambda z] \\ &\quad \times sh\lambda(z+g_k) \\ &\quad + [C_{4k} + C_{4k+1} \lambda z - 2(1-\nu_k) C_{4k+2}] \\ &\quad \times ch\lambda(z+g_k) \} \frac{J_0(\lambda r)}{sh\lambda h_k} \lambda d\lambda, \\ \sigma_r^{(k)} &= \int_0^\infty [2\nu_k \{ C_{4k+1} sh\lambda(z+g_k) \\ &\quad + C_{4k+2} ch\lambda(z+g_k) \} J_0(\lambda r) \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ (C_{4k-1} + C_{4k+2} \lambda z) sh\lambda(z+g_k) \\ &\quad + (C_{4k} + C_{4k+1} \lambda z) ch\lambda(z+g_k) \} \\ &\quad \times \{J_0(\lambda r) - J_2(\lambda r)\}] \frac{\lambda}{sh\lambda h_k} d\lambda, \\ \sigma_\theta^{(k)} &= \int_0^\infty [2\nu_k \{ C_{4k+1} sh\lambda(z+g_k) \\ &\quad + C_{4k+2} ch\lambda(z+g_k) \} \lambda J_0(\lambda r) \\ &\quad + \frac{1}{r} \{ (C_{4k-1} + C_{4k+2} \lambda z) sh\lambda(z+g_k) \\ &\quad + (C_{4k} + C_{4k+1} \lambda z) ch\lambda(z+g_k) \} \\ &\quad \times J_1(\lambda r)] \frac{1}{sh\lambda h_k} d\lambda, \\ \tau_{rz}^{(k)} &= \int_0^\infty \{ [C_{4k} + C_{4k+1} \lambda z] \\ &\quad - (1-2\nu_k) C_{4k+2} sh\lambda(z+g_k) \\ &\quad + [C_{4k-1} - (1-2\nu_k) C_{4k+1} + C_{4k+2} \lambda z] \\ &\quad \times ch\lambda(z+g_k) \} \frac{J_1(\lambda r)}{sh\lambda h_k} \lambda d\lambda, \end{aligned} \right\}$$

(5)

ただし, $\kappa_k=3-4\nu_k$ であり, 上添字 0 は半無限弾性体の, また, k は層状弾性部分の第 k 層のものを示す。また, 図-1 に示すように g_k は r 軸からの各層までの距離である。

3. 連続条件および境界条件

所期の目的の問題の連続条件および境界条件は最も一般的な形として $0 \leq r < \infty$ の全範囲に対して次のように書き表わされる。

(a) $z=-g_k (k=0, 1, 2, \dots, n-1, g_0=0)$ において

$$\left. \begin{aligned} u_z^{(k)} - u_z^{(k+1)} &= p_k(r), \\ u_r^{(k)} - u_r^{(k+1)} &= q_k(r), \\ \sigma_z^{(k)} - \sigma_z^{(k+1)} &= s_k(r), \\ \tau_{rz}^{(k)} - \tau_{rz}^{(k+1)} &= t_k(r), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(b) $z=-g_n$ において

$$\sigma_z^{(n)} = s_n(r), \quad \tau_{rz}^{(n)} = t_n(r) \quad (7)$$

上記の $s_k(r)$, $t_k(r)$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$) はそれぞれ層境界あるいは自由表面に作用する鉛直および水平応力を示し, $p_k(r)$, $q_k(r)$ は層境界の鉛直および水平方向の変位の食違いを表わす。これらは半径方向の座標 r の任意関数であるが、ここでは次のような関数形に設定する。

$$\left. \begin{aligned} p_k(r) &= \hat{p}_k \cdot H(a_k - |r|), \\ q_k(r) &= \hat{q}_k \cdot R(a_k - |r|), \\ s_k(r) &= \hat{s}_k \cdot H(a_k - |r|), \\ t_k(r) &= \hat{t}_k \cdot R(a_k - |r|), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで、 $\hat{p}_k, \hat{q}_k, \hat{s}_k, \hat{t}_k$ は作用荷重（擾乱）の振幅を、また関数 $H(a_k - |r|)$, $R(a_k - |r|)$ は図-2 に示すような Heaviside の階段関数、および直線変化の Ramp 関数であり、これらは Bessel 関数の積分形で次のように表示することができる。

$$\left. \begin{aligned} H(a_k - |r|) &= a_k \int_0^\infty J_1(\lambda a_k) \cdot J_0(\lambda r) d\lambda, \\ R(a_k - |r|) &= a_k \int_0^\infty J_2(\lambda a_k) \cdot J_0(\lambda r) d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで、式 (9) のように分布関数形を選定したのは、式 (4), (5) により式 (1), (2) で求めた応力・変位の無限積分が被積分関数として $J_j(\lambda r)$, ($j=0, 1$) を含み、式 (6), (7) の境界条件が最終的に積分表示でなく、その被積分関数の関数形として与えられることを利用するためにある。たとえば、式 (6) の境界条件の場合、次式のように与えられる。

$$\int_0^\infty F(\lambda) \cdot J_0(\lambda r) d\lambda = p_k(r), \quad (10)$$

ここに、

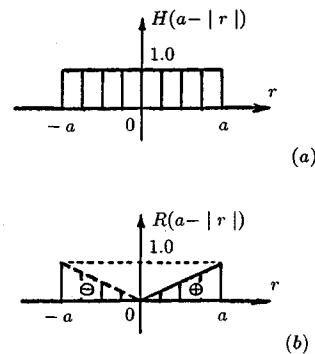


図-2 (a) Heaviside 関数および (b) Ramp 関数

$$\begin{aligned} F(\lambda) = & \frac{1}{2\mu_k sh\lambda h_k} (-C_{4k-1} + \kappa_k C_{4k+1} \\ & + C_{4k+2} \lambda g_k) - \frac{1}{2\mu_{k+1} sh\lambda h_{k+1}} \\ & \times \{(-C_{4k+3} + \kappa_{k+1} C_{4k+5} + C_{4k+6} \lambda g_k) \\ & + ch\lambda h_{k+1} + (-C_{4k+4} + C_{4k+5} \lambda g_k \\ & + \kappa_{k+1} C_{4k+6}) sh\lambda h_{k+1}\}. \end{aligned} \quad (11)$$

したがって、 $p_k(r)$ は式 (8) のように設定すれば、上式と式 (9) より次式が得られる。

$$F(\lambda) = \hat{p}_k a_k J_1(\lambda a_k) \quad (12)$$

その他の場合および残りの境界条件についても全て積分記号中の被積分量に関する関係式、すなわち、 $C_j(\lambda)$, ($j=1, 2, \dots, n$) に関する連立方程式として次式のように得られる。

$$\sum_{j=1}^{4n+2} c_{ij} C_j(\lambda) = \hat{C}_i \quad (i=1, 2, \dots, 4n+2) \quad (13)$$

したがって、 $0 \leq \lambda < \infty$ の任意の λ に関して係数 $C_j(\lambda)$ が求められることになる。なお、上式の係数 c_{ij} および \hat{C}_i は付録 A に示した。

4. 数値計算例および考察

数値計算に際して、式 (13) の連立一次方程式を解いて $C_j(\lambda)$ を決定しなければならない。連立方程式の元数は、この場合、層数の 4 倍 + 2 の大きさになり、その解は簡単に求められるが、 λ の値に依存したものとなっているため、個々の λ を設定して求める必要がある。ここで計算では層厚 h を基準として、軸位および応力の存在する近辺での計算精度を上げるために、

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \lambda \leq 3h & \text{において } \Delta\lambda = h/200 \\ 3h \leq \lambda \leq 10h & \text{において } \Delta\lambda = h/100 \\ 10h \leq \lambda \leq 40h & \text{において } \Delta\lambda = h/50 \end{aligned} \right\}$$

のように分割した λ を用いて $C_j(\lambda)$ を決定し、式 (3) から式 (4), (5) によって変位、応力を求める無限積分を上記のように区分した λ に関して和分近似して数値計算を実行した。したがって、区分数は 2300 個となる。

表-1 図3の例に対する本論文の計算結果とPoulosとの比較

| 弾性係数 E_0 | 層厚 h_1 | Poulos A | 筆者 B | 相対誤差 (A-B)/B×100% |
|---------------|-------------|-------------|---------|----------------------|
| 1 | 0.312 | 0.9810 | 0.9702 | 1.11 |
| | 0.625 | 0.7652 | 0.7555 | 1.28 |
| | 1.250 | 0.5628 | 0.5412 | 2.14 |
| 2 | 0.312 | 0.5713 | 0.5658 | 0.97 |
| | 0.625 | 0.4712 | 0.4660 | 1.11 |
| | 1.250 | 0.3650 | 0.3554 | 2.70 |
| 5 | 0.312 | 0.2769 | 0.2749 | 0.72 |
| | 0.625 | 0.2517 | 0.2496 | 0.84 |
| | 1.250 | 0.2222 | 0.2202 | 0.90 |

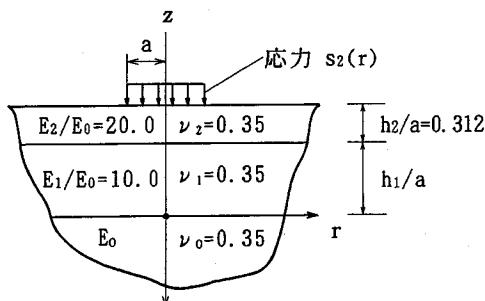


図-3 表面鉛直荷重を受ける二層半無限体モデル

この数値計算に要する計算時間はきわめて短時間のものであるが、より能率を上げるために上の分割数を相対的に減らして、たとえば区分数を上記の1/5、すなわち460個としても計算精度には殆ど影響がみられない。ただし、この計算精度の検証は上表面での荷重条件、接合境界で設定した応力、変位の連続性の満足度によって判定した。具体的には以下に示す数値計算例では、上表面、接合境界の各条件を荷重作用、変位の食違部分を除いて有効数字3~4桁まで満足したものであることが確認されている。

(1) 理論およびプログラムの検証

以上に示した理論によって開発したプログラムの検証のため、 z 軸上の鉛直たわみ、および半径方向（水平方向）線上での鉛直方向たわみをPoulos¹⁷⁾によって与えられた厳密解と比較を行う。

まず、図-3のように半無限弾性体に2層の弾性層がある場合とし、 $E_1/E_0=10.0$ 、 $E_2/E_0=20.0$ として半無限弾性体の弾性係数と1層目の層厚 h_1 を変化させて $z=0$ 、 $r=0$ におけるたわみを比較した。結果を表-1に示す。また、荷重半径 $a=1.0$ 、鉛直作用応力は $\hat{s}_0=1.0$ 、2層目の層厚は $h_2/a=0.312$ 、ポアソン比は $\nu_1=\nu_2=\nu_3=0.35$ として計算した。

この表から分かるように、まず、層厚を一定にした場合 ($h_1/a=0.312$)、半無限弾性体の弾性係数が大きくなるほど、すなわち、弾性係数比 E_1/E_0 の値が小さくなればなるほど相対誤差は小さくなる。また、弾性係数比を一定にした場合、第1層の層厚 h_1 の値が小さくな

表-2 均質な半無限弾性体に対する本論文の結果とPoulosとの比較 (z 方向)

| 測定位置 z | Poulos A | 筆者 B | 相対誤差 (A-B)/B×100% |
|-------------|-------------|------------|----------------------|
| 0. 0 | 0. 1 5 0 0 | 0. 1 4 9 3 | 0. 4 9 |
| 0. 2 | 0. 1 4 7 1 | 0. 1 4 6 0 | 0. 7 6 |
| 0. 4 | 0. 1 4 3 7 | 0. 1 4 2 6 | 0. 7 8 |
| 0. 6 | 0. 1 2 8 6 | 0. 1 2 7 6 | 0. 8 1 |
| 0. 8 | 0. 1 1 7 1 | 0. 1 1 6 1 | 0. 8 6 |
| 1. 0 | 0. 1 0 6 1 | 0. 1 0 5 1 | 0. 9 3 |
| 1. 2 | 0. 0 9 6 0 | 0. 0 9 5 0 | 1. 0 1 |
| 1. 5 | 0. 0 8 3 2 | 0. 0 8 2 2 | 1. 1 5 |
| 2. 0 | 0. 0 6 7 1 | 0. 0 6 6 1 | 1. 4 2 |
| 3. 0 | 0. 0 4 7 4 | 0. 0 4 6 5 | 2. 0 2 |
| 4. 0 | 0. 0 3 6 4 | 0. 0 3 5 4 | 2. 6 2 |
| 5. 0 | 0. 0 2 9 4 | 0. 0 2 8 4 | 3. 2 7 |
| 6. 0 | 0. 0 2 4 7 | 0. 0 2 3 7 | 3. 9 6 |
| 7. 0 | 0. 0 2 1 2 | 0. 0 2 0 2 | 4. 6 0 |
| 8. 0 | 0. 0 1 8 6 | 0. 0 1 7 6 | 5. 2 8 |

ればなるほど精度が良くなっている。たとえば、層厚を $h_1/a=0.312$ とした場合、 $E_0=1.0 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ (i.e. $E_1/E_0=10$) では、相対誤差は1.11%であるが、 $E_0=2.0 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ (i.e. $E_1/E_0=5$) では0.97%， $E_0=5.0 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ ($E_1/E_0=2$) では0.72%と次第に精度が良くなっている。また、 $E_0=1.0 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ とした場合、 $h_1=0.312$ では相対誤差は1.11%， $h_1=0.625$ では1.28%， $h_1=1.250$ では2.14%となり、 h_1 の値が大きくなればなるほど精度が落ちてくる。故に、一般に E_{n+1}/E_n が小さければ小さいほど、 h_n の値が小さければ小さいほど相対誤差は小さくなると推測できる。

次に、図-1の均質の半無限弾性体（すなわち、弾性薄層がない場合）に荷重半径 $a=1.0$ 、鉛直作用応力 $\hat{s}_0=1.0$ が作用する最も単純化された構造モデルで鉛直軸上の鉛直たわみと、表面半径方向（水平方向）における鉛直たわみ、すなわち、表面たわみを比較してみる。表-2は鉛直軸上のたわみである。 $z/r=1.0$ まではいずれも相対誤差は1.0%以内であるが、 z が大きくなると相対誤差は大きくなり、これは主としてたわみが小さくなるために比較に用いる数値自身の分母が小さくなるためで、たわみ差自体は、 $a=1.0$ のとき 1×10^{-3} 程度であるので必ずしも精度が悪いとはいえない。

表-3は表面のたわみを示しているが、舗装構造物等では表面のたわみを測定するので、本論文のプログラムを検証する場合には、 z 軸上のたわみよりこの r 軸上のたわみの方がより重要である。 $r/a \geq 1.0$ では表-2と同様に相対誤差が大きくなっているが、これもやはりたわみが減少することにより比較数値の分母が小さくなることに依存するもので、たわみ差は荷重半径1.0と比較して載荷板中心で 0.7×10^{-3} 、 $r/a=8.0$ で 1.0×10^{-3} と

表-3 均質な半無限弾性体に対する本論文の結果と Poulos との比較 (r 方向)

| 測定位置 r | Poulos A | 筆者 B | 相対誤差 (A-B)/B*100% |
|-------------|-------------|---------|----------------------|
| 0. 0 | 0. 1500 | 0. 1493 | 0. 49 |
| 0. 2 | 0. 1485 | 0. 1474 | 0. 75 |
| 0. 4 | 0. 1438 | 0. 1427 | 0. 78 |
| 0. 6 | 0. 1354 | 0. 1343 | 0. 84 |
| 0. 8 | 0. 1219 | 0. 1207 | 0. 98 |
| 1. 0 | 0. 0954 | 0. 0946 | 0. 93 |
| 1. 2 | 0. 0702 | 0. 0696 | 0. 93 |
| 1. 5 | 0. 0533 | 0. 0524 | 1. 75 |
| 2. 0 | 0. 0387 | 0. 0378 | 2. 47 |
| 3. 0 | 0. 0253 | 0. 0244 | 3. 84 |
| 4. 0 | 0. 0189 | 0. 0179 | 5. 27 |
| 5. 0 | 0. 0150 | 0. 0141 | 6. 27 |
| 6. 0 | 0. 0124 | 0. 0116 | 7. 35 |
| 7. 0 | 0. 0107 | 0. 0097 | 9. 69 |
| 8. 0 | 0. 0094 | 0. 0084 | 11. 36 |

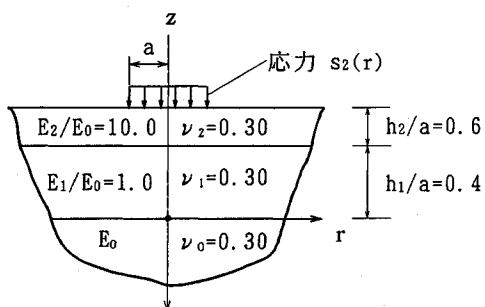


図-4 表面鉛直荷重を受ける二層半無限体モデル

ほとんど変化していない。また、そのたわみの差は $a=1.0$ に対して Poulos の方が 1.0×10^{-3} 程度大きく出ているのみで、両者のたわみの差はほとんど無視して差し支えないものと思われる。

なお、本研究で開発したプログラムは極めて手軽に計算できる特徴があり、パソコンレベルの計算機によって簡単に計算でき、例えば PC9801 レベルのパーソナルコンピュータでの計算時間は約 1 分足らずである。

(2) 数値計算例

以上の結果を踏まえて次に幾つかの計算例を示す。ここで、ポアソン比は $\nu_1=\nu_2=0.30$ 、半無限弾性体に接合する層状部分の層厚の和をすべて等しく、 $\sum_{j=1}^n h_j = 1.0a$ とした。

まず、図-4 は半無限弾性体に弾性係数の異なる 2 層の弾性層が接合され、その表面に半径 $a=1.0$ の円形分布荷重が作用している場合に対し、変位および応力の分布図を求めた。各層の厚さは $h_1/h_2=2/3$ とし、弾性係数は $E_2/E_0=1.0$ および $E_2/E_0=10$ と仮定した。変位・応力は半無限弾性体と上層の境界を $z=0.0$ にとり、半

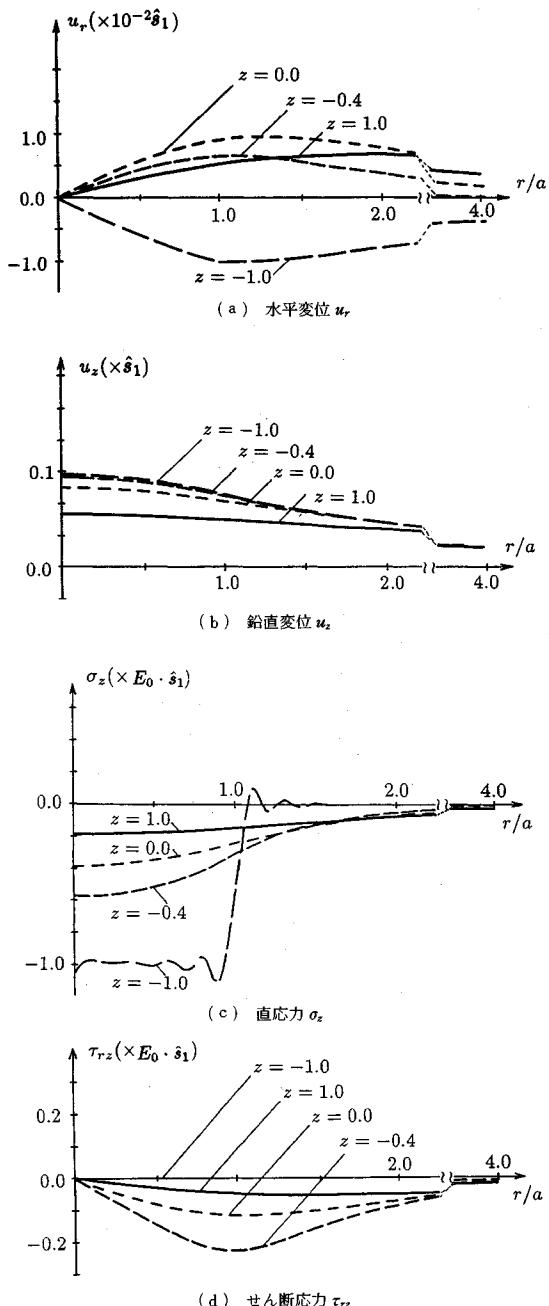


図-5 図 4 の二層解析モデルに対する応力、変位分布図

無限弾性体内の $z=1.0$ 、半無限弾性体と上層との境界 $z=0.0$ 、層 1 と層 2 との境界 $z=-0.4$ 、および表面（荷重作用面） $z=-1.0$ でのものを求めた。

図-5 (a) は各点の r 方向の変位 u_r を表したもので、 $r=0$ で零で、半無限弾性体内の点以外では荷重端まで次第に大きくなり、その後小さくなっている。しかし半無限弾性体内では荷重が分散されて、減少の割合が小さくなっている、かなり遠くまで影響が及んでいる。

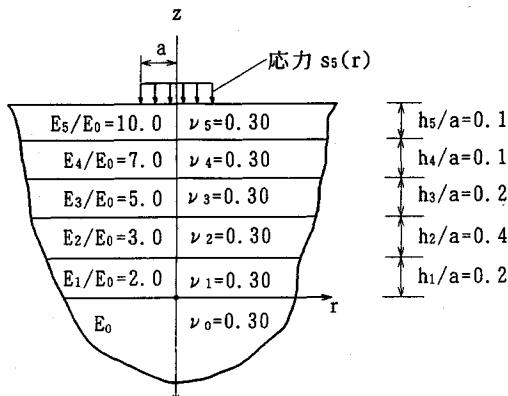


図-6 表面鉛直荷重を受ける五層半無限体モデル

図-5 (b) は z 方向の変位 u_z を表わしたもので、当然であるが表面で最大変位が生じ、内部に行くにしたがって小さくなっている。

図-5 (c) は z 方向の直応力 σ_z を図示したもので圧縮応力が発生している。表面 $z = -1.0$ では応力は荷重の作用区域で荷重と同じ大きさとなるのは当然であるが、それから離れるに従って急激に小さくなっている。ただし、図に見られるように、理論式中に出てくる Bessel 関数の性状から分布図が振動している。これは図の倍率を上げるためにかなり大きく振動しているように見受けられるが、実際は誤差の範囲内である。また、内部にいくにしたがって応力が分散し、小さくなっていくのがわかる。

図-5 (d) はせん断応力 τ_{rz} の分布を図示したもので表面では零で内部にいくにしたがって小さくなっている。

図-6 は半無限弾性体に 5 層の弾性層がある場合を計算したもので荷重条件は同じである。層の厚さは h_1 から h_5 までを 0.2, 0.4, 0.2, 0.1, 0.1 とし弾性係数の比は半無限弾性体を基準として、1:2:3:5:7:10とした。図-7 は $z=1.0$ 、各層の境界面、および表面での値を示す。図-7 (a) は z 方向の変位 u_z 、図-8 (b) は z 方向の応力 σ_z を図示したものである。いずれも、図-5 の場合と同様な傾向を示している。

最後の計算例として、本研究の独自のものとして、層間に変位の食い違い（転位）が存在する場合についての計算結果を示す。図-8 (a), (b) は一層を有する半無限体の層内に上下方向 (z 方向) の変位差 \hat{p}_k が存在するとした場合の上表面 $z = -h$ および層と半無限体の境界 $z = 0$ における z 方向変位を、パラメータ Γ を 1.0, 2.0, 10.0 および 100.0 に変化させて図示したものである。同様に、図-8 (c), (d) は一層を有する半無限体の半無限体側の内部に上下方向の変位差 \hat{p}_k が存在するとした場合、上表面 $z = -(h_0 + h)$ および層と半無限

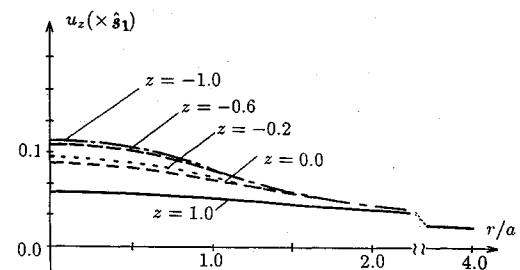
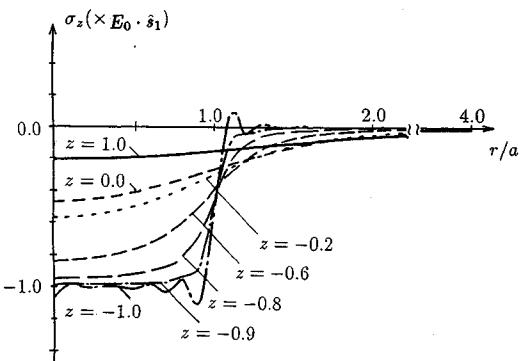
(a) 鉛直変位 u_z (b) 直応力 σ_z

図-7 図 6 の五層解析モデルに対する変位、応力分布

体の境界 $z = -h_0$ における z 方向変位の分布図を示したものである。こけらの結果の利用法等については紙面の都合上、次報に譲る。

5. 結 言

本論文では、軸対称性の荷重が、層状性半無限弾性体に作用する場合について、3 次元弾性論に基づいて解析し、変位・応力分布を明示すると共に、これらに及ぼす弾性係数比、および層厚の影響を明らかにした。また、数値計算例は 2 層および 5 層の舗装モデルに表面荷重が作用した場合ならびに層間に変位差が存在する場合についても示したが、計算用プログラムは境界条件あるいは連続条件の項のところで示したように、より一般的に表層および各層間に垂直および水平応力が作用し、また、各層間には転位が存在し得るよう作成してある。したがって、このプログラムは各層間に開口型やせん断型のクラックが発生した場合にも対応できるものである。

また、Poulos らの計算結果と比較しても、著者らのプログラムは十分な精度を有しており、表面に任意の荷重が作用した場合の任意の弾性定数に対する任意の位置の変位・応力が容易に求められるものである。これらは、材料の実験的検証、新素材の開発、道路舗装等の多層構造物の解析等に関する有力な解析手段となり得るものである。

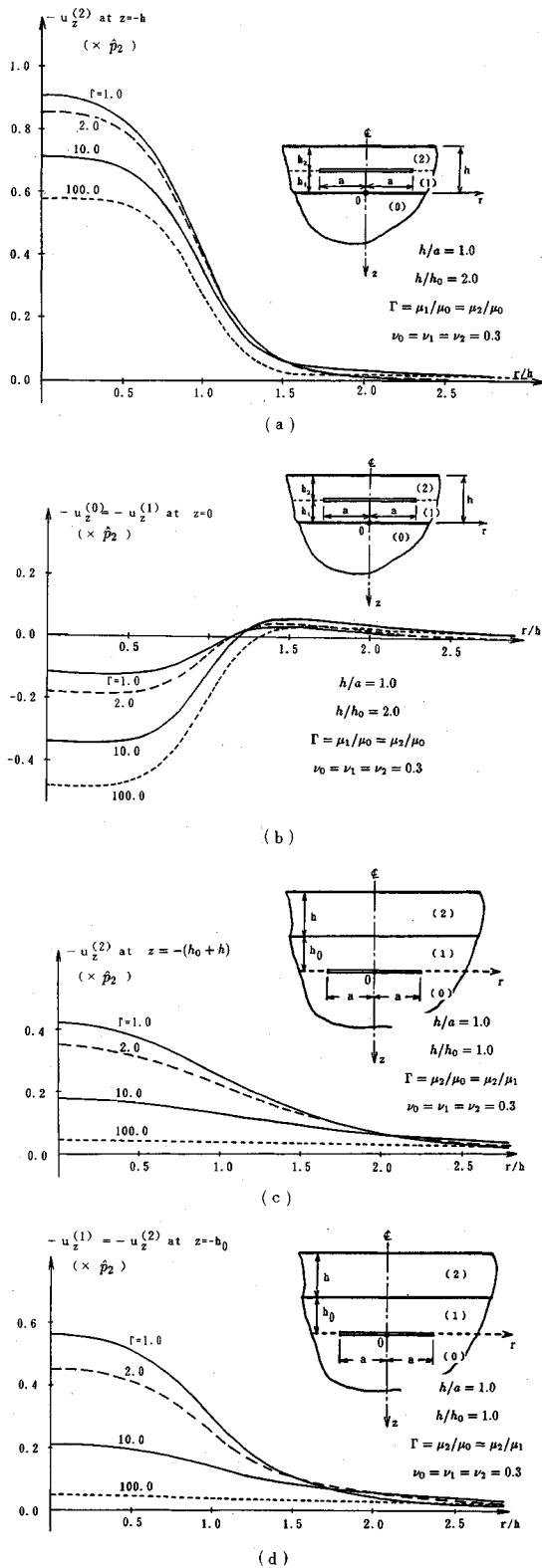


図-8 層内または半無限弾性体内に鉛直方向変位の食違いが存在する場合の変位分布図

さらに、このプログラムは、たとえば舗装道路においてフォーリング・ウエイト・デフレクトメーター(FWD)等で数点の表面たわみを測定し、逆に構成層の弾性係数を求める、いわゆる逆問題に適用できる。また、 r 方向の転位を導入することによって、舗装の層間のずれ問題等にも応用できるもので、その一例の計算結果を示したが、より具体的な適用例について続報で述べる予定である。

付録 A 式(13)の係数 c_{ij} および \hat{C}_i について

本文式(13)の係数 c_{ij} , \hat{C}_i を次に記す。

$$c_{11}=1, c_{12}=\kappa_0,$$

$$c_{13}=\Gamma_0 \coth \lambda h_1, c_{14}=\Gamma_0,$$

$$c_{15}=-\Gamma_0 \kappa_1 \coth \lambda h_1, c_{16}=-\Gamma_0 \kappa_1,$$

$$c_{21}=1, c_{23}=-\Gamma_0,$$

$$c_{24}=-\Gamma_0 \coth \lambda h_1,$$

$$c_{31}=-1, c_{32}=-2(1-\nu_0),$$

$$c_{33}=1, c_{34}=\coth \lambda h_1,$$

$$c_{35}=-2(1-\nu_2), c_{36}=-2(1-\nu_2) \coth \lambda h_1,$$

$$c_{41}=-1, c_{42}=-(1-2\nu_0),$$

$$c_{43}=-\coth \lambda h_1, c_{44}=-1,$$

$$c_{45}=(1-2\nu_1) \coth \lambda h_1, c_{46}=1-2\nu_1,$$

$$c_{4k+1,4k-1}=-\frac{1}{sh\lambda h_k}, c_{4k+1,4k+1}=\frac{\kappa_k}{sh\lambda h_k},$$

$$c_{4k+1,4k+2}=\frac{\lambda g_k}{sh\lambda h_k}, c_{4k+1,4k+3}=\Gamma_k \coth \lambda h_{k+1},$$

$$c_{4k+1,4k+4}=\Gamma_k,$$

$$c_{4k+1,4k+5}=-\Gamma_k (\kappa_{k+1} \coth \lambda h_{k+1} + \lambda g_k),$$

$$c_{4k+1,4k+6}=-\Gamma_k (\lambda g_k \coth \lambda h_{k+1} + \kappa_{k+1}),$$

$$c_{4k+2,4k}=\frac{1}{sh\lambda h_k}, c_{4k+2,4k+1}=-\frac{\lambda g_k}{sh\lambda h_k},$$

$$c_{4k+2,4k+3}=-\Gamma_k, c_{4k+2,4k+4}=-\Gamma_k \coth \lambda h_{k+1},$$

$$c_{4k+2,4k+5}=\Gamma_k \lambda g_k \coth \lambda h_{k+1},$$

$$c_{4k+2,4k+6}=\Gamma_k \lambda g_k,$$

$$c_{4k+3,4k}=-\frac{1}{sh\lambda h_k}, c_{4k+3,4k+1}=\frac{\lambda g_k}{sh\lambda h_k},$$

$$c_{4k+3,4k+2}=\frac{2(1-\nu_k)}{sh\lambda h_k}, c_{4k+3,4k+3}=1,$$

$$c_{4k+3,4k+4}=\coth \lambda h_{k+1},$$

$$c_{4k+3,4k+5}=-2(1-\nu_{k+1}) - \lambda g_k \coth \lambda h_{k+1},$$

$$c_{4k+3,4k+6}=-\lambda g_k - 2(1-\nu_{k+1}) \coth \lambda h_{k+1},$$

$$c_{4k+4,4k-1}=\frac{1}{sh\lambda h_k}, c_{4k+4,4k+1}=-\frac{(1-2\nu_k)}{sh\lambda h_k},$$

$$c_{4k+4,4k+2}=-\frac{\lambda g_k}{sh\lambda h_k}, c_{4k+4,4k+3}=-\coth \lambda h_{k+1},$$

$$c_{4k+4,4k+4}=-1,$$

$$\begin{aligned}
 c_{4k+4,4k+5} &= (1 - 2\nu_{k+1}) \coth \lambda h_{k+1} + \lambda g_k, \\
 c_{4k+4,4k+6} &= \lambda g_k \coth \lambda h_{k+1} + (1 - 2\nu_{k+1}), \\
 c_{4n+1,4n} &= -\frac{1}{sh \lambda h_n}, \quad c_{4n+1,4n+1} = \frac{\lambda g_n}{sh \lambda h_n}, \\
 c_{4n+1,4n+2} &= \frac{2(1-\nu_n)}{sh \lambda h_n}, \\
 c_{4n+2,4n-1} &= \frac{1}{sh \lambda h_n}, \quad c_{4n+2,4n+1} = -\frac{(1-2\nu_n)}{sh \lambda h_n}, \\
 c_{4n+2,4n+2} &= -\frac{\lambda g_n}{sh \lambda h_n}, \\
 \dots &\dots \quad (A \cdot 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{C}_1 &= 2\mu_0 \hat{q}_0 a_0 J_1(\lambda a_0), \quad \hat{C}_2 = 2\mu_0 \hat{q}_0 a_0 J_2(\lambda a_0), \\
 \hat{C}_3 &= \frac{\hat{s}_0}{\lambda} a_0 J_1(\lambda a_0), \quad \hat{C}_3 = \frac{\hat{t}_0}{\lambda} a_0 J_2(\lambda a_0), \\
 \hat{C}_{4k+1} &= 2\mu_k \hat{p}_k a_k J_1(\lambda a_k), \\
 \hat{C}_{4k+2} &= 2\mu_k \hat{q}_k a_k J_2(\lambda a_k), \\
 \hat{C}_{4k+3} &= \frac{\hat{s}_k}{\lambda} a_k J_1(\lambda a_k), \quad \hat{C}_{4k+4} = \frac{\hat{t}_k}{\lambda} a_k J_2(\lambda a_k), \\
 \hat{C}_{4n+1} &= \frac{\hat{s}_n}{\lambda} a_n J_1(\lambda a_n), \quad \hat{C}_{4n+2} = \frac{\hat{t}_n}{\lambda} a_n J_2(\lambda a_n), \\
 \dots &\dots \quad (A \cdot 2)
 \end{aligned}$$

ここに、

$$\Gamma_k = \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}} \quad (A \cdot 3)$$

であり、上記以外の c_{ij} はすべて零である。

参考文献

- 1) Erdogan, F. : Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials Containing Circular or Ring-shaped Cavities, *J. Appl. Mech.*, 829-836, 1965.
- 2) Erdogan, F. : Stress Distribution in a Nonhomogeneous Elastic Plane with Cracks, *J. Appl. Mech.*, 232-236, 1963.
- 3) Erdogan, F. : Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials with Cracks, *J. Appl. Mech.*, 403-410, 1965.
- 4) Erdogan, F & Gupta, G. D. : Layered Composites with an Interface flaw, *Int. J. Solids & Struc.* 7, 1089-1107, 1971.
- 5) Arin, K. & Erdogan, F. : Penny-Shaped Crack in an Elastic Layer Bonded to Dissimilar Half Spaces, *Int. J. Eng. Sci.* 9, 213-232, 1971.
- 6) Erdogan, F. & Arin, K. : Penny-Shaped Interface Crack between an Elastic layer and a Half Space, *Int. J. Eng. Sci.*, 10, 115-125, 1972.
- 7) Farris, T. N. & Keer, L. M. : Williams' Blister Test Analyzed as an Interface Crack Problem, *Int. J. Fracture*, 27, 91-103, 1985.
- 8) Erdogan, F. : Simultaneous Dual Integral Equations with Trigonometric and Bessel Kernels, *ZAMM*, 48, 217-225, 1968.
- 9) Erdogan F. : Approximate Solutions of Systems of Singular Integral Equations, *SIAM J. Appl. Math.*, 17, 1041-1059, 1969.
- 10) Miller, G. R. & Keer, L. M. : A Numerical Technique for the Solution of Singular Integral Equations of the Second Kind, *Quart. Appl. Math.*, 455-465, 1985.
- 11) Erdogan F. : Fracture Problems in Composite Materials, *Eng. Fract. Mech.*, 4, 811-840, 1972.
- 12) Lu, M-C. & Erdogan, F. : Stress Intensity Factors in two Bonded Elastic Layers Containing Cracks Perpendicular to and on the interface-I. Analysis, *Eng. Fract. Mech.*, 18, 491-506, 1983.
- 13) Lu, M-C. & Erdogan, F. : Stress Intensity Factors in two Bonded Elastic Layers Containing Cracks Perpendicular to and on the interface-II. Solution and Results, *Eng. Fract. Mech.*, 18, 507-528, 1983.
- 14) Wang, W-X. Takao, Y. & Suhara, T. : Interaction Between Cracks Perpendicular to and on the Interface in Composite Materials, *JSME Int. J., Series I*, 31, 201-208, 1988.
- 15) Gorce, J. G. & Venezia, W. A. : Bonded Elastic Half-Planes With an Interface Crack and a perpendicular Intersecting Crack that Extends into adjacent Material-I, *Int. J. Eng. Sci.*, 15, 1-17, 1977.
- 16) Gorce, J. G. & Venezia, W. A. : Bonded Elastic Half-Planes with an Interface Crack and a Perpendicular Intersecting Crack that Extends into the adjacent materials-II, *Int. J. Eng. Sci.*, 15, 19-27, 1977.
- 17) Poulos, H. G. & Davis, E. H. : Elastic Solutions for Soil and Rock Mechanics, John Wiley & Sons. 36-142, 1974.

(1992.1.17 受付)

DISPLACEMENTS AND STRESSES DUE TO AXISYMMETRIC DISTRIBUTED FORCES AND DISLOCATIONS WITHIN ELASTIC LAYERS BONDED ON ELASTIC HALF-SPACE

Ken-ichi HIRASHIMA, Hiroshi YAMANOKUCHI, Hiroki HAMANO and Naohiko MAEDA

This paper is concerned with the problem of a penny-shaped dislocation in elastic layers bonded on elastic half-space. Papkovitch-Neuber functions are used for the analysis. The basic equations are expressed by a system of integral equations which can be numerically and approximately satisfied with the collocation of an integration parameter λ . Numerical treatments for some cases are carried out and several numerical results are given by graphical representation.