

# 浮遊砂を有する水流の諸特性について

准員 志村 博 康\*

## ON THE CHARACTERS OF THE WATER FLOW CONTAINING SUSPENDED SEDIMENT

*Hiroyasu Shimura, C.E. Assoc. Member*

### Synopsis :

The fundamental equations of the water flow containing suspended sediment were introduced. From the momentum equation and continuity equation, it was explained by the mixture length theory that the velocity distribution of the flow can be represented by the same logarithmic formula as that for the flow of no suspended sediment. From the equation of energy balance, the equation which explains the decrease of Kármán's const.  $K$  was introduced and compared with the data of Vanoni's and Ismail's experiment. The results showed that the transformation energy from mean flow into turbulence, the dissipation energy by viscosity, and the consumption energy by the diffusion of suspended sediment increase all linearly with increasing concentration. The relation between suspended sediment and turbulence was explained with the reduction of both of large eddies and small eddies due to concentration gradient formed by suspended sediment.

**要旨** 浮遊砂の存在を十分に考慮した基礎方程式を導き、これまでの式の欠陥を明らかにした。運動量方程式及び連続式より、混合長理論に従つて、浮遊砂のある流れの速度分布がその無い流れと同じ式形—対数法則速度分布—で表示し得ることを説明した。満足いくエネルギー平衡式より Kármán's const.  $K$  の減少を示す式を導き、Vanoni, Ismail の実験値と比較した。その結果は、平均流から乱れへのエネルギー移行、粘性によるエネルギー逸散、浮遊砂拡散によるエネルギー消費の三者共、濃度の増加と共に、直線的に増大することを示した。浮遊砂と乱れとの関係は、浮遊砂により形成される濃度勾配によつて、乱れの大きいウズも小さいウズも共に縮小すると云うことで説明された。

### 1. 序

浮遊砂があると流れは速度勾配を増し、乱流交換係数を減少させ、更に又摩擦抵抗係数を減少させる傾向があることは既に観察されてきたところである。

Vanoni<sup>1)</sup>, Ismail<sup>2)</sup> は実験によつて、浮遊砂を有する水流の速度分布は、それを含まない水流の速度分布式—対数法則分布—と同じ式形で表わすことができ、その中の常数—Kármán's const.  $K$ —は濃度の増加と共に減少することを示した。これより上記諸変化傾向はすべて説明することができる。

室田氏<sup>3)</sup>, 椿氏<sup>4)</sup> はこの傾向を一応理論的にもとらえようと試みられた。室田氏は濃度勾配のある場合の運動量方程式を導き、それと濃度分布の基礎式(連続式)とを連立に解いて濃度の速度分布への影響を表わす式を求めようとした。椿氏は、室田氏の式は密度を考慮したが乱れを考慮していないとされて、新たに、密度変化のあるガス体の乱れのエネルギー方程式<sup>5)</sup>をこの流れに適用され、運動量方程式、連続式との関連に於て、若干の仮定の下、Kármán's const.  $K$  減少を表わす式を誘導された。

しかし両氏とも、連続式以外では、浮遊砂の沈降速度による影響を全く見落された。そこで他の幾つかの欠陥とも相まつて、室田氏の場合では、得られた速度勾配式形は、以下でわかる如く、正しいものではなかつたし、又濃度の影響を表わすものでもなかつた。椿氏の場合では、この流れも同じ対数法則速度分布の式形で表示し得ることを説明し得ないまま、それを認めて Kármán's const.  $K$  減少を表わす式を導かねばならなかつたし、又同氏の上記実験のデータとの比較においても、単に実験誤差、或いは理論の中に含まれる誤差だけでは考えられぬ激しいチラバリが見られた。

乱流の速度分布の式形は運動量方程式から求められた。浮遊砂のある場合でもそうあつてよいはずである。し

\* 東京大学大学院学生、農学部農業水理学研究室

かし、その範囲では常数の変化を示すことはできないであろう。これはエネルギーの關係の吟味を必要とするであろう。

本小論文は以上のことを考慮し、新たに、浮遊砂存在による密度変化、運動量変化、エネルギー変化の特性を十分に考慮した基礎方程式を導き、それを吟味して、上記実験事実を説明する式を求め、上記実験値と比較し、その結果に基づいて、浮遊砂と乱れとの關係についての若干の説明を試みた。

2. 基礎方程式

ここでは一般の場合として三次元にて扱う。始めに浮遊砂の沈降速度について約束を設ける。一般に浮遊砂の問題を扱う場合には、その沈降速度に静水中の限界沈降速度をとる。厳密には流れの速度によつて変化する。しかしその様にして得られた結果は濃度分布の問題に見られる如く十分満足いくものである。そこでここでもその様にする。

i) 連続式 浮遊砂を含む水の密度を  $\rho$ 、水のみを  $\rho_0$ 、浮遊砂の濃度（容積比）を  $m$ 、その比重を  $\tau$  とすれば

$$\rho = \rho_0 \{1 + m(\tau - 1)\} \dots\dots\dots (2.1)$$

$x, y, z$  方向の流れの速度成分を  $u, v, w$ 、浮遊砂の沈降速度を  $u_0, v_0, w_0$  とする。流れは非圧縮性とし、質量保存の条件を考慮すれば、周知の速度の連続条件に加えて、浮遊砂濃度の連続式

$$\frac{\partial m}{\partial t} + (u - u_0) \frac{\partial m}{\partial x} + (v - v_0) \frac{\partial m}{\partial y} + (w - w_0) \frac{\partial m}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (2.2)$$

が成立する。今、

$$u = U + u', \quad v = V + v', \quad w = W + w' \dots\dots\dots (2.3)$$

とする。即ち、大文字は平均速度、ダッシュのつく小文字は変動速度である。浮遊砂がある場合には速度変動に伴つて、濃度も変動するから

$$m = \bar{m} + m' \dots\dots\dots (2.4)$$

としなければならぬ。(2.3)、(2.4) を (2.2) に入れ、平均すれば、濃度の平均連続式が得られる。

$$\frac{\partial \bar{m}}{\partial t} + (U - u_0) \frac{\partial \bar{m}}{\partial x} + (V - v_0) \frac{\partial \bar{m}}{\partial y} + (W - w_0) \frac{\partial \bar{m}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{m}'u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{m}'v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{m}'w'}{\partial z} = 0 \dots\dots (2.5)$$

ここで変動濃度について考える。変動濃度は平均速度、沈降速度では起り得ない。それらで起るのは濃度変化であつて濃度変動ではない。変動濃度はある所の浮遊砂の平均の量がそれと異なる平均量の所に、変動速度によつて輸送されることにより起ると考えられる。今、 $(x_2, y_2, z_2)$  の平均量  $\rho_0 \tau \bar{m}_2$  が  $(x_1, y_1, z_1)$  に輸送されたとすれば、その所の変動砂量は  $|\rho_0 \tau m'_1| = |\rho_0 \tau \bar{m}_2 - \rho_0 \tau \bar{m}_1|$ 、二点間の距離は小さいとし、 $\bar{m}_2$  を Taylor 展開し、高次の項を省略し、 $\rho_0 \tau$  で割れば

$$|m'_1| = \left| l_{x_1} \frac{\partial \bar{m}_1}{\partial x_1} + l_{y_1} \frac{\partial \bar{m}_1}{\partial y_1} + l_{z_1} \frac{\partial \bar{m}_1}{\partial z_1} \right|, \quad l_{x_1} = x_2 - x_1, \quad l_{z_1} = z_2 - z_1, \quad l_{y_1} = y_2 - y_1,$$

サフィックスをはずせば一般の場合となる。濃度勾配の正負を考え、輸送方向 ( $l$  の正負) に対し、最も起り得る変動濃度の正負を考慮すれば、絶対値をとり

$$m' = -l_x \frac{\partial \bar{m}}{\partial x} - l_y \frac{\partial \bar{m}}{\partial y} - l_z \frac{\partial \bar{m}}{\partial z} \dots\dots\dots (2.6)$$

上式に  $u', v', w'$  をかけ、平均すれば

$$\left. \begin{aligned} \bar{m}'u' &= -\epsilon_{xx} \frac{\partial \bar{m}}{\partial x} - \epsilon_{yx} \frac{\partial \bar{m}}{\partial y} - \epsilon_{zx} \frac{\partial \bar{m}}{\partial z}, \quad \epsilon_{xx} = \overline{u'l_x}, \quad \epsilon_{yx} = \overline{u'l_y}, \quad \epsilon_{zx} = \overline{u'l_z} \\ \bar{m}'v' &= -\epsilon_{xy} \frac{\partial \bar{m}}{\partial x} - \epsilon_{yy} \frac{\partial \bar{m}}{\partial y} - \epsilon_{zy} \frac{\partial \bar{m}}{\partial z}, \quad \epsilon_{xy} = \overline{v'l_x}, \quad \epsilon_{yy} = \overline{v'l_y}, \quad \epsilon_{zy} = \overline{v'l_z} \\ \bar{m}'w' &= -\epsilon_{xz} \frac{\partial \bar{m}}{\partial x} - \epsilon_{yz} \frac{\partial \bar{m}}{\partial y} - \epsilon_{zz} \frac{\partial \bar{m}}{\partial z}, \quad \epsilon_{xz} = \overline{w'l_x}, \quad \epsilon_{yz} = \overline{w'l_y}, \quad \epsilon_{zz} = \overline{w'l_z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.7)$$

$\epsilon$  はテンソルとして表わされる浮遊砂の乱流交換係数である。なお (2.7) を (2.5) に入れれば、濃度分布を論ずる際に用いられる周知の基礎微分方程式が導かれる。

ii) 運動量方程式 浮遊砂の沈降速度による運動量変化の項が新たに加えられねばならぬ。そこで

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \{ \rho_0 u + \rho_0 m(\tau - 1)(u - u_0) \} &= \frac{\partial}{\partial x} \{ P_{xx} - \rho_0 uu - \rho_0 m(\tau - 1)(u - u_0)(u - u_0) \} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \{ P_{yx} - \rho_0 uv - \rho_0 m(\tau - 1)(u - u_0)(v - v_0) \} + \frac{\partial}{\partial z} \{ P_{zx} - \rho_0 uw - \rho_0 m(\tau - 1)(u - u_0)(w - w_0) \} \\ &+ \rho_0 X + \rho_0 m(\tau - 1)X \end{aligned}$$

及び同類の二つの式。但し  $P_{ij}(i, j = x, y, z)$  は応力\*,  $X, Y, Z$  は単位質量当りの外力の三成分。  
 上式は (2.2) によつて整理できる。(2.1) を使つて

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho u = & \frac{\partial}{\partial x} \{ P_{xx} - \rho uu - \rho_0(\tau-1)muu_0 \} + \frac{\partial}{\partial y} \{ P_{yx} - \rho uv - \rho_0(\tau-1)muv_0 \} \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \{ P_{zx} - \rho uw - \rho_0(\tau-1)muw_0 \} + \rho X \dots\dots\dots (2.8) \end{aligned}$$

及び同類の二つの式。即ち、浮遊砂の沈降速度によつて、一般の流れの式に、{ } 中第三項を加えねばならぬ。(2.3), (2.4) を (2.5) に入れ、平均することによつて、乱れのある場合の平均運動量方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \{ \bar{\rho} U + \rho_0(\tau-1)\bar{m}'u' \} \\ = & \frac{\partial}{\partial x} \{ \bar{P}_{xx} - \bar{\rho}UU + \rho_0(\tau-1)\bar{m}Uu_0 - \rho_0(\tau-1)\bar{m}'u'U - \bar{\rho}u'u' - \rho_0(\tau-1)\bar{m}'u'(U-u_0) - \rho_0(\tau-1)\bar{m}'u'u' \} \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \{ \bar{P}_{yx} - \bar{\rho}UV + \rho_0(\tau-1)\bar{m}Uv_0 - \rho_0(\tau-1)\bar{m}'v'U - \bar{\rho}u'v' - \rho_0(\tau-1)\bar{m}'v'(V-v_0) - \rho_0(\tau-1)\bar{m}'u'v' \} \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \{ \bar{P}_{zx} - \bar{\rho}UW + \rho_0(\tau-1)\bar{m}Uw_0 - \rho_0(\tau-1)\bar{m}'w'U - \bar{\rho}u'w' - \rho_0(\tau-1)\bar{m}'w'(W-w_0) - \rho_0(\tau-1)\bar{m}'u'w' \} \\ & + \bar{\rho}X \dots\dots\dots (2.9) \end{aligned}$$

及び同類の二つの式。浮遊砂を有する水流の見かけ応力は、一般の流れの式に次のものが加わる。先の沈降速度による運動量輸送により形成される見かけ応力(右辺{ }内第三項), 及び浮遊砂の拡散により形成される見かけ応力(同第四, 六, 七項)。尚以下エネルギー式に見る如く, 第六, 七項は第五項 Reynolds stress と同じく平均流から乱れへエネルギーを移行させる機能をとるが, 第三, 四項は第二項対流項と同じくそれをとらず, 流体間での物理量輸送に関係する。同じ見かけ応力とは云え, 両グループは性格が異なるのである。

iii) エネルギー方程式 浮遊砂は乱れと常に関係するから乱れのエネルギー方程式をここに上げる。(2.8) から (2.9) を引けば変動の運動量方程式が得られる。その各々に  $u', v', w'$  をかけ, 加え, 平均すれば,  $E' = u'^2 + v'^2 + w'^2$  と書いて

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \bar{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} + W \frac{\partial}{\partial z} \right) \bar{E}' + \frac{1}{2} \bar{\rho} \left( u' \frac{\partial}{\partial x} + v' \frac{\partial}{\partial y} + w' \frac{\partial}{\partial z} \right) E' \\ & - \frac{1}{2} \rho_0(\tau-1) \bar{m} \left( u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} + w_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \bar{E}' + \frac{1}{2} \rho_0(\tau-1) \bar{m}' \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} + W \frac{\partial}{\partial z} \right) E' \\ & + \frac{1}{2} \rho_0(\tau-1) \bar{m}' \left( u' \frac{\partial}{\partial x} + v' \frac{\partial}{\partial y} + w' \frac{\partial}{\partial z} \right) E' - \frac{1}{2} \rho_0(\tau-1) \bar{m}' \left( u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} + w_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) E' \\ = & - \rho_0(\tau-1) \left\{ \bar{m}'u' \frac{\partial U}{\partial t} + \bar{m}'v' \frac{\partial V}{\partial t} + \bar{m}'w' \frac{\partial W}{\partial t} \right\} \\ & - \bar{\rho} \left\{ u'u' \frac{\partial U}{\partial x} + v'v' \frac{\partial V}{\partial y} + w'w' \frac{\partial W}{\partial z} + u'v' \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + v'w' \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) + w'u' \left( \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right\} \\ & - \rho_0(\tau-1) \left\{ \bar{m}'u' \left[ (U-u_0) \frac{\partial U}{\partial x} + (V-v_0) \frac{\partial U}{\partial y} + (W-w_0) \frac{\partial U}{\partial z} \right] \right. \\ & \quad \left. \bar{m}'v' \left[ (U-u_0) \frac{\partial V}{\partial x} + (V-v_0) \frac{\partial V}{\partial y} + (W-w_0) \frac{\partial V}{\partial z} \right] \right. \\ & \quad \left. \bar{m}'w' \left[ (U-u_0) \frac{\partial W}{\partial x} + (V-v_0) \frac{\partial W}{\partial y} + (W-w_0) \frac{\partial W}{\partial z} \right] \right\} \\ & - \rho_0(\tau-1) \left( \bar{m}'u'u' \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{m}'u'v' \frac{\partial U}{\partial y} + \bar{m}'u'w' \frac{\partial U}{\partial z} + \bar{m}'u'v' \frac{\partial V}{\partial x} + \bar{m}'v'v' \frac{\partial V}{\partial y} + \bar{m}'v'w' \frac{\partial V}{\partial z} \right. \\ & \quad \left. + \bar{m}'u'w' \frac{\partial W}{\partial x} + \bar{m}'v'w' \frac{\partial W}{\partial y} + \bar{m}'w'w' \frac{\partial W}{\partial z} \right) \\ & + \left\{ u' \left( \frac{\partial}{\partial x} P_{xx}' + \frac{\partial}{\partial y} P_{yx}' + \frac{\partial}{\partial z} P_{zx}' \right) + v' \left( \frac{\partial}{\partial x} P_{xy}' + \frac{\partial}{\partial y} P_{yy}' + \frac{\partial}{\partial z} P_{zy}' \right) \right. \\ & \quad \left. + w' \left( \frac{\partial}{\partial x} P_{xz}' + \frac{\partial}{\partial y} P_{yz}' + \frac{\partial}{\partial z} P_{zz}' \right) \right\} + \rho_0(\tau-1) (\bar{m}'u'X + \bar{m}'v'Y + \bar{m}'w'Z) \dots\dots\dots (2.10) \end{aligned}$$

上式は単位体積当りの乱れの平均運動エネルギーの時間的变化を表わす。一般の流れの式に対し新たに次の項が加わる。浮遊砂の沈降, 拡散に伴うエネルギー輸送(左辺第三~六項), 浮遊砂の慣性力のなす仕事(右辺第一

\* 浮遊砂間の衝突, 滑りによる応力も含まれる。

項, これを  $\bar{E}_i'$  で表わす), 浮遊砂拡散により形成される見かけ応力によつて平均流から乱れへのエネルギー移行 (同第三, 四項, 夫々  $\bar{E}_{SS1}'$ ,  $\bar{E}_{SS2}'$  で表わす), 外力に抗して拡散するためのエネルギー消費 (同第六項  $-\bar{E}_{eD}'$ ).

今, 境界が平均流と共に動く範囲を考え, その境界上では変動速度は零であるとして, 上式を空間的に積分する. すると左辺全項は連続式により整理されて一つにまとまる. Reynolds stress による平均流から乱れへのエネルギー移行を  $\bar{E}_{RS}'$ , 粘性によるエネルギー逸散を  $\bar{D}'$  で表わせば

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathcal{E}}' = \int \int \int (\bar{E}_i' + \bar{E}_{RS}' + \bar{E}_{SS1}' + \bar{E}_{SS2}' - \bar{D}' - \bar{E}_{eD}') dx dy dz \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

但し 
$$\bar{\mathcal{E}}' = \frac{1}{2} \int \int \int (\bar{\rho} \bar{E}' + \rho_0(\rho-1) \bar{m}' E') dx dy dz$$

即ち, 上式は平均流と共に動く与えられた閉曲面内の乱れの平均運動エネルギーの総量の時間的変化を表わす. 乱れのエネルギーが増加, 減衰することなく, 統計的に constant に保存されるためには  $d\bar{\mathcal{E}}'/dt=0$  であらねばならぬ.

3. 速度分布式について

これからは channel flow の場合を扱う. 流れの方向に  $x$  軸, 底面に垂直に  $y$  軸, それらに直角に  $z$  軸とし, 種々の平均的物理量は  $x, z$  方向には変化せず,  $y$  方向にのみ変化し, 定常の状態であるとする.

混合長理論は対数法則速度分布の成立を本当に説明するものではない. 本当の説明は他に求められるべきである. がともかく乱れの機構に仮定を設け, それから導かれる結果は事実とよく合う. その仮定は浮遊砂が存在しても全く差しつかえないものである. そこで混合長理論に従つて, 浮遊砂のある場合からも同速度分布式が得られれば, 一応, 浮遊砂のある場合でも, ない場合と同じ形式で表示されることが説明されるわけである.

始めに後に必要な限りで連続式について触れる. 流れは  $V=W=0, U=U(y)$ , 沈降速度は水路勾配小さく  $w_0, w_0 \approx 0$  で  $v_0$  のみで表わされると近似する.

(2.5) において,  $y$  の偏微分係数の項のみ考えればよい. 積分し, 水面条件を考慮すれば常数は零で

$$\overline{m'v'} - \bar{m}v_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (3.1)$$

これが我々の記号での濃度平衡式である.

(2.7) より 
$$\overline{m'u'} = -\epsilon_{yx} \frac{d\bar{m}}{dy}, \quad \overline{m'v'} = -\epsilon_{yy} \frac{d\bar{m}}{dy} \quad \dots\dots\dots (3.2)$$

$\overline{m'v'}$  の存在は明かである.  $\overline{m'u'}$  については, 速度勾配がある場合の  $u'$  と  $l$  (即ち  $v'$ ) の相関を考慮すればその存在は無視できない. (3.2) より,  $\alpha = \epsilon_{yx}/\epsilon_{yy}$  とすれば,

$$\overline{m'u'} = \alpha \overline{m'v'} \quad \dots\dots\dots (3.3)$$

で,  $\alpha$  は  $u'$  と  $v'$  との相関の程度によつて

$$+1 \geq \alpha \geq -1 \quad \dots\dots\dots (3.4)$$

なる値をとることになる. 正の速度勾配では  $\alpha$  は負で, 相関が強いと  $-1$  に近い値となる.

(2.9) において,  $y$  の偏微分係数の項 { } 内を吟味する. 粘性応力は見かけ応力に比し小さく省略される. 第三項と第四項は (3.1) により消える (先の両氏は第三項を見落されたのでこれに気付かれなかつた). 第七項は第五項中の  $\rho_0(r-1)\bar{m}u'v'$  に対し小さく省略されてよい. 後者の二重相関が強く  $-1$  に近づくと対し, 前者の三重相関は弱く  $0$  に近くなる. そこで応力  $\tau$  は

$$\tau = -\bar{\rho} \overline{u'v'} + \rho_0(r-1)\overline{m'u'v_0} \quad \dots\dots\dots (3.5)$$

と表わされる. 混合長理論より

$$-\bar{\rho} \overline{u'v'} = \bar{\rho} l_1^2 \left( \frac{dU}{dy} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (3.6)$$

(3.1), (3.3) より

$$\rho_0(r-1)\overline{m'u'v_0} = \alpha \rho_0(r-1)\bar{m}v_0^2 \quad \dots\dots\dots (3.7)$$

そこで 
$$\tau = \bar{\rho} l_1^2 \left( \frac{dU}{dy} \right)^2 + \alpha \rho_0(r-1)\bar{m}v_0^2 \quad \dots\dots\dots (3.8)$$

一般の流れと同じく  $\tau$  は底面剪断力  $\tau_b$  と近似され,  $l_1 = Ky$ , ( $K$ ; Kármán's const.) と仮定される. 浮遊砂のある場合の摩擦速度は  $U_* = \sqrt{\tau_b/\bar{\rho}_a}$ , (suffix  $a$  は全水深に亘る平均の意) で表わされる. 濃度は極めて小さいので, ここでは,  $\bar{\rho} = \bar{\rho}_a$ , (即ち  $\bar{m} = \bar{m}_a$ ) と近似されてよい. (3.8) を  $\bar{\rho}_a$  で割り, 右辺第二項では  $\bar{m}_a$  の高次項を省略して

\*  $l_1$  の suffix 1 は前出  $l$  と区別するため

$$U_*^2 = K^2 y^2 \left( \frac{dU}{dy} \right)^2 + \alpha \bar{m}_a (r-1) v_0^2 \dots\dots\dots (3.9)$$

故に  $\frac{dU}{dy} = \frac{U_*}{Ky} \cdot \sqrt{1 - \alpha \bar{m}_a (r-1) \left( \frac{v_0}{U_*} \right)^2}$  ..... (3.10)

一般に  $U_* \gg v_0, \bar{m}_a \ll 1$ , なる故, 十分の近似で

$$\frac{dU}{dy} = \frac{U_*}{Ky} \dots\dots\dots (3.11)$$

とすることができる。積分すれば周知の対数法則速度分布式を得る。混合長理論に従つて, 同じ式形で表示されることが一応説明された。なお, root 中の項は, 先述の如く, 速度勾配正のとき  $\alpha$  は負で結果的には一層  $K$  の減少を強めることになる。

運動量方程式の意味の範囲では  $K$  (即ち  $l, \epsilon$ ) が濃度によりいかに影響されるかを示すことはできない (従つて濃度分布式 (3.1) と連立に解いても無意味である)。これにはエネルギーの関係を見なければならぬ。

4. カルマン常数の減少について

(2.10) において  $y$  の偏微分係数の項に注目されたい。椿氏の乱れエネルギー式は種々の項が不足しているのが認められるが, 更に論理の展開の過程で, 乱れエネルギーの拡散率 (筆者の式で云えば 左辺第二項) 及び圧力動揺の寄与 (同右辺第五項に含まれる) を無視されて, 結局, 平均流から乱れへの移行エネルギー, 粘性逸散エネルギー, 外力に抗して浮遊砂拡散によるエネルギー消費の三つで局所的平衡が成立するとされた。実際に成立可能だろうか? 浮遊砂のある流れでこのようなエネルギー関係はまだ実験的に示されていないので, 他の流れ (浮遊砂なし, 従つて最後者は除かれる) から推測しなければならないが, Laufer<sup>9)</sup> の実験によれば, 応力が constant と考えられる底近くの層では, エネルギー輸送 (拡散) が上方に向つてあるけれども 移行エネルギーと逸散エネルギーが支配的で近似的に両者の局所的平衡が成立すると見てよいが, 他層では上記二者が減少して, エネルギー輸送もまた上記二者と同程度或いはそれ以上に重要視される量となり, 上記二者のみで局所的平衡を考えることは全くできない。浮遊砂のある場合にも同様であろう。我々は今, 底近くの濃度を対象とするのではなく, 全断面に亘る平均的な濃度を主として対象としているので 上述の局所的平衡は避けた方がよい。そこで全断面に亘る範囲の流体をとらえて, その総運動エネルギーの平衡を考える。(こうすればエネルギー輸送, 圧力動揺寄与は消える。) この流れでは  $y$  のみについて全水深に亘つて積分すればよい。(2.11) の誘導に於てなされた積分の境界条件は層流底層との接触面に於て満足される。自由水面が境界の場合にはそれは満足されない。代つて, 水面ではエネルギー輸送量の平均は零, 即ち

$$\frac{1}{2} \bar{\rho} \overline{v'E'} - \frac{1}{2} \rho_0 (r-1) \bar{m} v_0 \bar{E}' + \frac{1}{2} \rho_0 (r-1) \overline{m'v'E'} - \frac{1}{2} \rho_0 (r-1) v_0 \overline{m'E'} = 0 \dots\dots\dots (4.1)$$

及び見かけ応力は零, 即ち乱れはほぼ等方性であると考えられるので 変動諸量の相関は零の条件がとられる。なお閉水路では, 定常の場合, 中央部最大速度点が同じ条件を満足するので積分は下半分だけでよい。そこで  $h$  を水面の高さ (或いは最大速度点の高さ),  $a$  を層流底層 (或いは粗度の高さ) とすれば

$$0 = \int_a^h \tau \frac{dU}{dy} dy - \int_a^h \bar{D}' dy + \int_a^h \rho_0 (r-1) \overline{m'v'} Y dy \dots\dots\dots (4.2)$$

椿氏は先述のエネルギー関係の式に, 沈降速度を見落された運動量式を使われたので, 全く不必要に複雑な速度勾配式, 及び Kármán's const.  $K$  減少の式を結果してしまつた。

新たに Kármán's const 減少の式を求めてみる。(4.2) においては, 右辺第三項により, 浮遊砂存在の影響が如実に示されている。第一, 三項中の式形は既に示された。しかし Kármán's const.  $K$  が未知である。第二項については全く不明である。即ち未知の量が二つ故完全な解を得ることはできない。仮定を設けて解かねばならぬ。

第一項に於て, 速度勾配に (3.11) をとることは全く差しつかえない。  $\tau = \bar{\rho}_a U_*^2 (1-y/h)$  なる故

$$\int_a^h \tau \frac{dU}{dy} dy = \bar{\rho}_a \frac{U_*^3}{K} \left( \ln \frac{h}{a} - \frac{h-a}{a} \right) = \bar{\rho}_a \frac{U_*^3}{K} \left( \ln \frac{h}{a} - 1 \right), (\because h \gg a) \dots\dots\dots (4.3)$$

第三項に於て,  $Y = -g$ , ( $g$ ; 重力の加速度), (3.1) より

$$\int_a^h \rho_0 (r-1) \overline{m'v'} Y dy = -\rho_0 (r-1) v_0 g \int_a^h \bar{m} dy = -\rho_0 (r-1) v_0 g \bar{m}_a (h-a) \dots\dots\dots (4.4)$$

第二項について考える。乱れの速度の平均二乗根を  $u (= \sqrt{u'^2})$ , 乱れの渦の平均的直径を  $L$  とすれば

$$\bar{D}' \sim \bar{\rho} u^3/L$$

である。所で Reynolds 数の十分に高い場合には, 任意点の  $u/U_*$  は速度に無関係にほぼある一定の値をとる<sup>10)</sup>。

この値は  $y/h$  により変るから

$$(u/U_*)^3 \sim f(y/h)$$

と書かれる。 $L$  は壁から離れるに従つて大きくなるとは十分に考えられることである。即ち、 $L \sim y$

$$\text{従つて } \bar{D}' \text{ は } \bar{D}' = A \bar{\rho}_a \frac{U_*^3}{y} f\left(\frac{y}{h}\right)$$

(但し  $A$  は係数で、 $\bar{\rho}$  は  $\bar{\rho}_a$  に代えてある) と表わし得る。そこで

$$\int_a^h \bar{D}' dy = A \bar{\rho}_a U_*^3 \int_a^h \frac{1}{y} f\left(\frac{y}{h}\right) dy$$

浮遊砂のない場合、第一項と等しくなることを考慮すれば

$$\int_a^h \frac{1}{y} f\left(\frac{y}{h}\right) dy \sim \left(\ln \frac{h}{a} - 1\right)$$

とすることができる。そこで全ての係数を  $K'$  に含めて

$$\int_a^h \bar{D}' dy = \bar{\rho}_a \frac{U_*^3}{K'} \left(\ln \frac{h}{a} - 1\right) \dots\dots\dots (4.5)$$

と第一項と同じ形に書くことができる。(4.3), (4.4), (4.5) より (4.2) は

$$0 = U_*^3 \left(\ln \frac{h}{a} - 1\right) \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K'}\right) - \bar{m}_a (r-1) g v_0 (h-a) \dots\dots\dots (4.6)$$

但し、両辺は  $\bar{\rho}_a$  で割られ、第三項では  $\bar{m}_a$  の高次項は省略されてある。なお、 $K$  に対して一般にとられる濃度  $m$  は  $\bar{m}_a$  のこと故、ここでも簡単のため、以下では  $\bar{m}_a$  を単に  $m$  と書く。(4.6) より

$$\frac{1}{K} - \frac{1}{K'} = \frac{m(r-1) g v_0 (h-a)}{U_*^3 \left(\ln \frac{h}{a} - 1\right)} \dots\dots\dots (4.7)$$

右辺を  $s$  で表わせば、 $1/K = f_1(s)$ ,  $1/K' = f_2(s)$  で、(4.7) の関係が常に成立するためには  $f_1, f_2$  は  $s$  の一次函数、即ち

$$1/K = \beta_1 s + \delta_1, \quad 1/K' = \beta_2 s + \delta_2$$

で、かつ  $\delta_1 = \delta_2$ ,  $\beta_2 = \beta_1 - 1$  である。浮遊砂の無い場合の  $K$  を  $K_0$  と書けば、 $1/K, 1/K'$  共に  $m=0$  (従つて  $s=0$ ) では  $1/K_0$  なる故  $\delta_1 = \delta_2 = 1/K_0$  である。そこで、常用対数を使い

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_0} + \frac{\beta m(r-1) g v_0 (h-a)}{U_*^3 \left(2.3 \log \frac{h}{a} - 1\right)} \dots\dots\dots (4.8)$$

$$\frac{1}{K'} = \frac{1}{K_0} + \frac{(\beta-1) m(r-1) g v_0 (h-a)}{U_*^3 \left(2.3 \log \frac{h}{a} - 1\right)} \dots\dots\dots (4.9)$$

これが Kármán's const.  $K$  と濃度の関係を表わす式である。式形は椿氏のに比しずつと簡単である。係数  $\beta$  の値は実験から定められねばならない。

### 5. 実験値との比較

(4.8) を Vanoni, Ismail の実験値と比較し、 $\beta$  の値を定めてみる。Vanoni の実験は二次元開水路で行われた。Series I では浮遊砂に 0.16 mm silica sand, 底面粗度に 0.47 mm sand を用い、水路勾配 0.0025 で、水深 (0.299~0.518 feet), 濃度 (0~3.36 g/l) を変え、Series II では浮遊砂に 0.16, 0.13, 0.10 mm silica sand, 底面粗度に 0.88 mm を用い、水路勾配 0.0025, 0.00125 で水深 (0.234~0.554 feet), 濃度 (0~1.33 g/l) を変えて行われた。

筆者の整理、計算に於ては、1) run10, 20~22 は平均濃度 ( $\bar{m}_a$ ) の記入ない故省かれる (その中に 0.13 mm 浮遊砂使用があるので、整理の上では浮遊砂は 0.16, 0.10 mm の二種のみとなる)。2) 各 run については center line 0.0 点の測定値をとつた。その複数のものは値が欠けていないもので一番上に記入のものをとつた。3)  $r$  には石英の比重 2.65 を、 $g$  は 980 cm/sec<sup>2</sup> をとる。4) 粗度の高さ  $a$  には上記底面粗度砂の値 ( $d$ ) をとる。なお筆者の計算では水温から換算した動粘性係数 ( $\nu$ ) で  $U_* d / \nu$  の最小値は 25 であつたのでほぼ満足いく。

Ismail の実験は 10.5×3 inch の矩形開水路で行われた。使用浮遊砂は Vanoni と同じ砂 0.16, 0.10 mm で、底面は滑面であるが砂の堆積、砂漣形成もある。砂の投下量は Vanoni よりも非常に多く (総投下量 0~38,300 g, 全断面平均濃度 0~31.10 g/l) 各投下量に対し動水勾配を変え約四通りの流速 (1.7, 2.6, 3.5, 4.6 feet/sec の附近) を与えて行われた。なお物理諸量のデータは殆んど上半部, 下半部に分けてある。

筆者の整理, 計算に於ては, 1) 開水路の場合と対応させるため下半部をとる。2) Ismail の平均濃度は全断面平均なので, それを下半部平均に変える。これは既に椿氏が行われているので筆者もその方法に従った。なお筆者の計算では run 73~78 から求められる補正係数には 1.45 をとつた。3) 上記計算に必要な  $\alpha'$  (椿氏の記号) の値が run 1~60, 83~98, 119 では欠けているので, それらの run は計算から省かれる。4)  $U_*$  下半部の値が欠けている所では平均の値で代用した(但しあまり差なし)。5)  $h$  の記録なき所では高さの真半分の 0.125 feet で代用した(この値は砂堆積による底面の変化で変らねばならぬが, これには或る程度誤差が作られる)。6)  $a$  について。屑流底層の厚さ  $a=N \cdot \nu / U_*$  で, 常数  $N$  の値として Ismail はその論文中 (11) に於て 11.6 をとつていたので, 幾分多いがそれをとる。又砂漣の相当粗度は

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.74 + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{2.3}{K} \log \frac{h}{a}, \quad (\lambda; \text{摩擦抵抗係数})$$

から計算した (Ismail の (14) は無意味なので pipe の式で代用した)。どちらの値をとるべきかは, その大きさを比較し, Bed condition 及び Ismail の 図-10 ( $\lambda$ , Reynolds 数, 投下量の関係図) を考慮してきめた。なお上の計算では  $Re$  数の低い側では少くな目に, 高い側では多い目に出る様に感ぜられた。  $a$  の決定にはかなりの誤差が作られた様に思われる。もつと改良される必要がある。

以上の結果が図-1 (Vanoni の実験値), 図-2 (Ismail の実験値) に示されている。図-1 では割り合いデータが整っているが, 図-2 ではかなりのばらつきが見られる。

Ismail の実験では砂投下量が極めて多く, 滞積, 砂漣形成, その移動があると云う底部の不安定状態のために, 流れの状態も又不安定であつたと考えられる。それによる測定値の変動, 及び上記計算に際しての誤差 (特に  $a$  と  $h$  において) がかなりのチラバリを作つたと思われる。

しかし,  $1/K$  が図の直線に沿つて上昇する傾向は明かに認められる。椿氏の図に比し, 求むる理論曲線に沿う傾向はより顕著である様に思われる。

図より  $\beta$  (即ち直線の勾配) を求めれば約 4.8 である。しかしこの値は今後の精密な実験によつて一層正確にする必要がある。

$\beta > 1$  なる故,  $1/K'$  も又濃度増加と共に増大することになる。しかし増加率は  $1/K$  より小さい。

6. 浮遊砂と乱れとの関係について

以上に見る如く, 浮遊砂拡散によるエネルギー消費は勿論, 見かけ応力による平均流から乱れへのエネルギー移行, 及び粘性によるエネルギー逸散も又濃度の増加と共に直線的に増大する。(上記実験の濃度程度の範囲では) 後二者の増加割合はエネルギー移行の方が大である。

所で, 見かけ応力, 平均速度分布には乱れの大きい渦が関係し, 粘性逸散には小さい渦が関係する。

浮遊砂により濃度勾配が形成されると, 浮遊砂拡散にエネルギーが消費されるので, 乱れのエネルギーが減衰することなく保存されるためには, 乱れの渦は縮小しなければならない。この渦の縮小は上述の結果を考慮すると, 大きい渦にも又小さい渦にも起り, 且, 大きい渦の方がその縮小が大きいと考えられる。

大きい渦の縮小は平均速度勾配を増大させ, 平均流から乱れへのエネルギー移行を増加させる様に結果し, 小さい渦の縮小は変動の速度勾配を増大させ, 粘性逸散を増加させる様に結果する。

しかし, これらと新たに加つた拡散によるエネルギー消費との三者は統計的に釣合つて, 乱れのエネルギーは増加も, 減衰もなく, 安定的に存在することができるのである。

図-1 カルマン常数  $K$  の減少 (I)

Fig. 1 Decrease of Kármán's const.  $K$  (I)

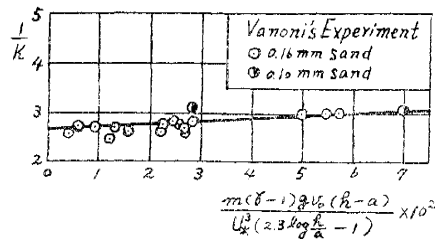
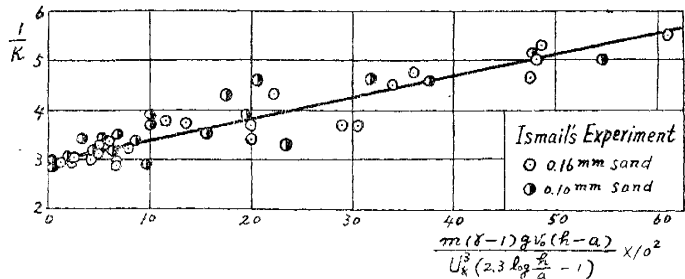


図-2 カルマン常数  $K$  の減少 (II)

Fig. 2 Decrease of Kármán's const.  $K$  (II)



浮遊砂存在と乱れとの関係は、以上の如く、模型的に説明されよう。(なお以上の説明の範囲内では乱れの緩和時間は密度勾配に無関係であるのではなく、影響され、減少すると考えられる。)

## 7. 結 び

以上、浮遊砂の存在を十分に考慮した基礎方程式から出発し、これまでの式の欠陥を指摘しつつ、新たに、実験事実を説明する諸式を誘導して、浮遊砂と流れとの関係を吟味して来た。

ここで誘導された浮遊砂のある場合の基礎方程式は、種々、役立つ様に思われる。

Kármán's const.  $K$  減少を示す式は実際的に有益であろう。対数法則速度分布成立の説明は混合長理論に基づいて行われたもので、一応の説明にはなつたが、本当のものではない。

浮遊砂と乱れとの関係について一応の模型的説明がなされたが、これはもつと本格的な理論によつて裏づけされねばならぬものである。それが上述速度分布式の本当の説明を用意するだろう。今後密度勾配と乱れの問題の深い究明が必要である。

## 参 考 文 献

- 1) V.A. Vanoni : Transportation of suspended sediment by water, Proc. A.S.C.E. vol. 70 (1944).
- 2) H.M. Ismail : Turbulent transfer mechanism and suspended sediment in closed channel, Proc. A.S.C.E. vol. 77 (1951).
- 3) 室田 明 : 浮砂濃度と流速分布の関連について, 土木学会誌 38 卷 11 号 (1953).
- 4) 椿 東一郎 : 浮流流砂が流れに及ぼす影響について, 土木学会誌 40 卷 9 号 (1955).
- 5) 栗原道徳 : 流体渦動状態の研究 (I), 九大流研究報告 1 卷 1 号 (1942).
- 6) J. Laufer : Investigation of turbulent flow in a two-dimentional channel, N.A.C.A. Rep. no. 1033 (1951).  
J. Laufer : The structure of turbulence in fully developed pipe flow, N.A.C.A. Rep. no. 1174 (1955).
- 7) S. Goldstein : Modern development in fluid dynamics, vol. I p. 221, vol. II p. 393~394 (1938).  
(昭. 31. 7. 11)