

円形立て坑の周囲における弾塑性応力状態*

正員 伊藤 富雄**

ELASTIC AND PLASTIC STATE OF STRESS AROUND
A DEEP CIRCULAR SHAFT

Tomio Ito, C.E. Member

Synopsis :

This paper deals with the elastic and plastic stress distribution in the ground around a deep circular shaft and with the ultimate depth at which the shaft can remain stable without a lining. Solvsng these problems, it is supposed for the vertical stress in the ground to be uniformly distributed at the same depth from a horizontal surface, and also assumed that the material around the shaft yields when the octahedral shearing stress in it reaches the critical value given by the known function of the mean normal stress.

要旨 鉛直な円形立て坑の周囲における弾塑性応力状態を解明し、さらにかかる立て坑が巻立てなしで安定を保ち得る極限の深さを求めたのが、本文の内容である。これらの問題を解くに当つては、水平な地表面からの深さが同一な点における鉛直応力は一樣に分布するものと仮定し、立て坑周囲の材料はその中の正 8 面体せん断応力が正 8 面体垂直応力の既知函数になつたときに降伏するものと考えた。

1. 総 説

水平な表面を有する地盤内に半径 R なる円形の立て坑を鉛直に掘つたものとし、図-1 のごとく立て坑の中心線と地表面との交点 O を原点に選び、それより鉛直下向きに z 軸をとつて円筒座標 (r, θ, z) を用いることにする。そうすれば地盤内の応力は z 軸に関して対称になるが、一般にかかる応力のうちせん断応力 τ_{rz} は微小であるから、これを無視し得るものとする。すなわち図-1 のように、任意の深さ z における水平な微小厚さの部分に主応力 σ_r , σ_θ 及び σ_z が作用するものとして計算を進めよう。なお垂直応力の正負は圧縮応力を正と定める。

2. 弾性領域内の応力

材料が弾性状態を示す領域内における応力は、厚肉円筒に関する Lamé の式¹⁾を適用することによつて、次の式で与えられると考えてよい²⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= kr^{-2} + q, \quad \sigma_\theta = -kr^{-2} + q, \quad \sigma_z = p = wz \\ \text{ここに } q &= p/(m-1), \quad k: \text{常数}, \quad m: \text{ポアソン数}, \\ w &: \text{土の単位重量} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

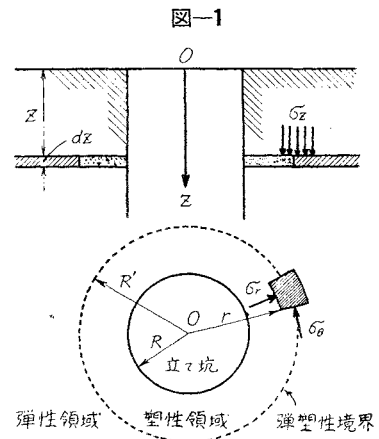
従つて立て坑周囲の材料がすべて弾性状態にあるならば、その周壁 $r=R$ には次の応力を生ずることがわかる。

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_\theta = 2q, \quad \sigma_z = p = wz \quad (2)$$

これらの周辺応力は、深さ z なる各点における応力の中で、材料を降伏させる可能性の最も大なる応力である。従つて深さ z が大になると、式 (2) の応力はついに材料の降伏条件式をみたすに至り、さらに z の大なる点では、ある境界円内の材料が塑性状態を呈するようになる。かかる境界が弾塑性境界といわれるものである。

3. 降伏条件式

本文と同様な問題を取扱つた H. M. Westergaard の論文³⁾では、降伏条件式として最大及び最小の主応力のみを考慮した式を用いているが、中間主応力の影響も当然考えに入れるべきであるから、次の降伏条件式を採用するのが適当と思われる⁴⁾。すなわち正 8 面体垂直応力とせん断応力をそれぞれ $\sigma_{oct.}$, $\sigma_{oct.}$ とすれば、



* 第 11 回年次学術講演会 (昭 30.5.29) にて一部発表

**大阪大学助教授, 工学部構築学教室

$$\left. \begin{aligned} 9\tau_{oct.}^2 &= (3a_0\sigma_{oct.} + b_0)^2 \\ \text{ここに } \tau_{oct.} &= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2} \\ \sigma_{oct.} &= (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z)/3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

また上式中の a_0 と b_0 は土の性質によつて定まる正の常数であり、土の3軸圧縮試験の結果、式 $\sigma_v = m\sigma_l + k$ 、ここに σ_v : 上下圧, σ_l :

側圧から求められる常数 m, k と上の a_0, b_0 との関係を示せば、次のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \sqrt{2}m/(m+3), \\ b_0 &= 3\sqrt{2}k/(m+3) \end{aligned} \right\}$$

なお式 (3) はまた次のように変形される。

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 = \{a_0(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z) + b_0\}^2 \dots\dots\dots (4)$$

これらの式 (3) または (4) の表わす曲面は、3主軸 σ_r, σ_θ 及び σ_z の正方向と等角をなす直線を軸とした円すい面であつて、その頂点と座標原点との間の距離は $b_0/\sqrt{3}a_0$ であり、またその頂角 2α は $\tan\alpha = a_0$ で与えられることが容易にわかる。なお式 (3) または (4) の右辺が左辺よりも大なるときには、材料は弾性状態にある。

4. 塑性領域内の応力

(1) 総説 立て坑の周囲に塑性領域を生じようとする最大の深さ z_1 を弾性限界深さと名付け、まずこれを求めよう。そのために式 (4) に (2) を代入しかつ p の代りに $p_1 = wz_1$ とおけば、次の式が得られる。

$$\{a_0^2(m+1)^2 - 2(m^2 - 4m + 7)\}p_1^2/(m-1)^2 + 2a_0b_0(m+1)p_1/(m-1) + b_0^2 = 0 \dots\dots\dots (5)$$

この式を解けば p_1 、従つて z_1 が求められるが、その詳細は後に説明する。なお式 (5) が常に実根を有することは明らかである。

次に塑性領域内においても、鉛直圧力 σ_z が $p = wz$ に等しく r には無関係であると考えれば、式 (4) から

$$(2 - a_0^2)\sigma_r^2 - (1 + a_0^2)\sigma_r\sigma_\theta + (2 - a_0^2)\sigma_\theta^2 - 2(p + a_0^2p + a_0b_0)(\sigma_r + \sigma_\theta) + 2p^2 - (a_0p + b_0)^2 = 0 \dots\dots (6)$$

この2次曲線の方程式は、式 (4) の円すい面と $\sigma_z = p$ なる平面との交線を表わすものであつて、 $1 - 2a_0^2 > 0, = 0, < 0$ となるに応じてそれぞれだ円、放物線、双曲線を与えることがわかる。

立て坑の周囲 $r = R$ における応力 σ_θ を求めるには、式 (6) においてさらに $\sigma_r = 0$ とおき、式

$$(2 - a_0^2)\sigma_\theta^2 - 2(p + a_0^2p + a_0b_0)\sigma_\theta + 2p^2 - (a_0p + b_0)^2 = 0 \dots\dots\dots (7)$$

から σ_θ を計算すればよい。しかしこの場合式 (7) が実根を有すべきことは当然であつて、そのためには p は次の条件式を満足せねばならぬ。

$$3(1 - 2a_0^2)p^2 - 6a_0b_0p - 2b_0^2 \leq 0 \dots\dots\dots (8)$$

(2) $1 - 2a_0^2 > 0$ なる場合 この場合の弾性限界深さ z_1 を求めると、式 (5) における p_1^2 の係数は常に負になるから、 z_1 の値として次のような正值が得られる。

$$z_1 = \frac{p_1}{w} = \frac{b_0(m-1)}{w\{1/2(m^2 - 4m + 7) - a_0(m+1)\}} \dots\dots\dots (9)$$

次に立て坑の周囲に塑性領域を生じても立て坑が巻立てなしで安定を保ち得る最大の深さ z_2 を塑性限界深さと名付け、その値を求めよう。それには式 (8) の p の代りに $p_2 = wz_2$ を代入すれば、式 (8) の p^2 の係数はいまの場合正であるから、 z_2 は次の式で与えられることがわかる。

$$z_2 = \frac{p_2}{w} = \frac{3a_0 + \sqrt{3(2 - a_0^2)}}{3(1 - 2a_0^2)w} b_0 \dots\dots\dots (10)$$

さて式 (6) で与えられる2次曲線はいまの場合だ円となるから、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= a + (\sigma - \sigma')/\sqrt{2}, \quad \sigma_\theta = a + (\sigma + \sigma')/\sqrt{2}, \\ \text{ここに } a &= (p + a_0^2p + a_0b_0)/(1 - 2a_0^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

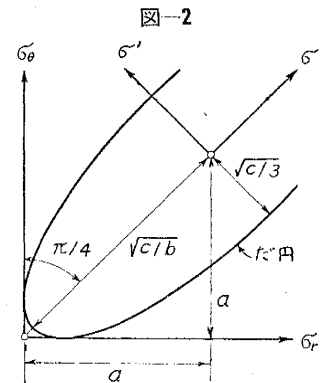
なる関係式によつて座標変換を行えば (図-2)、式 (6) は次のように簡単になる。

$$\left. \begin{aligned} b\sigma^2 + 3\sigma'^2 &= c \\ \text{ここに } b &= 1 - 2a_0^2, \quad c = (3a_0p + b_0^2)/(1 - 2a_0^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

従つてさらにパラメーター θ を用いて σ と σ' を表わすと、

$$\sigma = \sqrt{c/b} \sin \theta, \quad \sigma' = \sqrt{c/3} \cos \theta \dots\dots\dots (13)$$

ここに θ の値は図-2 及び後述の説明から明らかなように、 $0 \sim -\pi/2$ の範囲



内にある。

次に応力のつりあい方程式⁽⁷⁾は

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} = \sigma_\theta - \sigma_r \tag{14}$$

であるから、これを式(11)によつて変形すれば、

$$r \frac{d\sigma}{dr} = r \frac{d\sigma'}{dr} + 2\sigma' = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 \sigma') \tag{15}$$

従つて式(13)を(15)に代入して解き、 r と θ の関係の求めると、

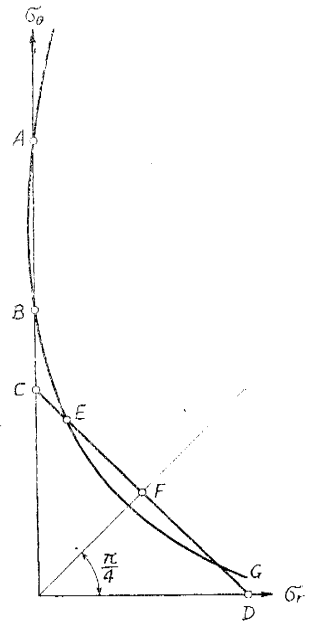
$$\frac{d^2}{r^2} = e^{-\sqrt{3}/b\theta} \cos \theta, \quad d: \text{積分常数} \tag{16}$$

この積分常数 d を決定するには、立て坑の周壁 $r=R$ において $\sigma_r=0$ になるという境界条件を用いばよく、式(11)及び(13)から次の条件式が得られる。ただし θ_R は $r=R$ における θ の値を表わすものである。

$$a\sqrt{6b} + \sqrt{c} (\sqrt{3} \sin \theta_R - \sqrt{b} \cos \theta_R) = 0 \tag{17}$$

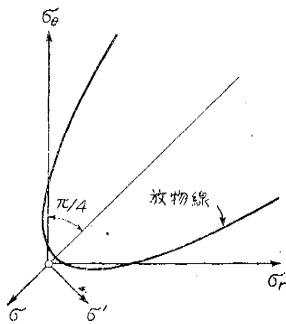
かようにして式(17)から θ_R を求め、式(16)に $\theta=\theta_R$ 及び $r=R$ を代入すれば常数 d が決定されるから、この式(16)によつて r と θ の関係が得られる。従つてその θ の値から式(13)により σ と σ' を求め、さらに式(11)を用いて σ_r 及び σ_θ を計算すれば、塑性領域内の応力が得られることになる。しかしながら式(8)が成立するときには、式(17)は1つまたは2つの実根を有することが証明されるから、後者の場合にはかかる2個の θ_R に応じて立て坑の周辺における σ_θ も2つ得られる。これらの値が式(7)から求められる σ_θ と同一であることはいうまでもないが、2つの σ_θ のうちいずれを採用すべきかという問題を生ずる。それには次のようにすべきである。すなわち式(1)から得られる弾性領域内の応力の関係式 $\sigma_r + \sigma_\theta = 2q$ と式(6)の与える2次曲線とを图示したとき、例えば図-3のように直線CDと曲線ABEGが得られたものとする。そうすれば立て坑から無限遠の点における応力は点F、立て坑周壁の応力は点AまたはBで示されるはずであるから、この場合における立て坑周壁の σ_θ はB点で与えられ、点Eが弾塑性境界上の応力に対応するものと考えられるのである。

図-3



(3) $1-2a_0^2=0$ なる場合 弾性限界深さ z_1 について考えると、式(5)の p_1^2 の係数は $m=3$ のときには0、その他の場合には一般に負となるから、後者の場合には z_1 の値として式(9)と同一の結果が得られる。一方 $m=3$ のときには、 $\sigma_r=0$ 及び $\sigma_\theta=\sigma_z=p_1$ を式(4)に代入することによつて、

図-4



$b_0=0$ ならばその式の両辺は p_1 のいかんにかかわらず相等しく、 $b_0>0$ ならば式(4)の右辺は左辺より大なることがわかる。従つて前者の場合には、立て坑の周辺にはごく薄い塑性領域を常に生ずるが、しかしいかに深い部分でも安定状態にあり、また $m=3$ にしてかつ $b_0>0$ であるならば、いかなる深さにおいても塑性領域を生じないものと考えられる。

次に塑性限界深さ z_2 を求めるために式(8)について調べると、その左辺は $b_0>0$

なる場合には負、 $b_0=0$ のときは0であつて、常に式(8)が成立する。換言すれば図-4に示すように、式(6)の与える放物線は、 p がいかにか大であつても軸 σ_r 及び σ_θ と2点で交わるか、または1点で切するわけである。このことは、式(4)の示す円すい面の軸の方向余弦が $1/\sqrt{3}$ であり、かつその頂角 2α はいまの場合 $\tan \alpha = a_0 = 1/\sqrt{2}$ で与えられることから考えても当然である。以上から明らかなように、立て坑が深くてその周囲に塑性領域を生じたとしても、この場合には、その周壁のひずみが破壊ひずみに達しない限り、立て坑は素掘のまま安定を保ち得ることがわかる。

さて $1-2a_0^2=0$ の場合には、関係式

$$\sigma_r = -\frac{\sigma - \sigma'}{\sqrt{2}}, \quad \sigma_\theta = -\frac{\sigma + \sigma'}{\sqrt{2}} \tag{18}$$

を用いて式 (6) を変形すれば、次のような放物線を表わす式が得られる (図-4)。

$$\left. \begin{aligned} 3\sigma'^2 + f\sigma + g = 0, \\ \text{ここに } f = 3\sqrt{2}p + 2b_0, \quad g = (3p^2 - 2\sqrt{2}b_0p - 2b_0^2)/\sqrt{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

しかるに応力の釣合方程式はいまの場合にも式 (15) と同一であることがわかるから、式 (19) を (15) に代入して解けば、

$$e^{-\frac{6}{j}\sigma'} = h^2 r^2 |\sigma'|, \quad h: \text{積分常数} \dots\dots\dots (20)$$

この積分常数 h を決定するには、前と同様に立て坑の周壁 $r=R$ にて $\sigma_r=0$ になるという境界条件を用いればよく、式 (18) から明らかなように $\sigma_r=0$ ならば $\sigma=\sigma'=\sigma_R'$ であるから、これを式 (19) に代入して σ_R' を求めると、

$$\sigma_R' = -(f \mp 2\sqrt{2}b_0f)/6 \dots\dots\dots (21)$$

従つて式 (20) に $\sigma'=\sigma_R'$, $r=R$ を代入すれば常数 h が求められる。なお式 (21) の与える 2 根のうちいずれを採用すべきかについては、前項の説明に従えばよい。

(4) $1-2a_0^2 < 0$ なる場合 まず弾性限界深さ z_1 について調べると、式 (5) の p_1^2 の係数は m 及び a_0 の値いかんによつて、(a) 正、(b) 0、(c) 負のいずれかになることがわかる。従つて (a) の場合及び (b) において $b_0 \neq 0$ のときには、 p_1 すなわち z_1 にかゝる正值を代入しても式 (5) の左辺は常に正になるから、立て坑がいかに深くともその周辺には塑性領域を生じないことになる。これに反して上記 (c) の場合には z_1 の値として式 (9) と同一の結果が得られ、また (b) の場合においてさらに $b_0=0$ のときには、深さ z のきわめて小なる点においても塑性領域を生ずるものと考えられる。

次に塑性限界深さ z_2 を求めるために式 (8) について考えると、この式はいまの場合 p がいかに大になつても常に成立することがわかる。従つて立て坑が深くてもその周囲に塑性領域を生ずる場合においても、立て坑の周壁に破壊ひずみを生じない限り、立て坑は素掘のまま安定を保ち得ると考えてよい。

さていまの場合には、式 (6) の与える 2 次曲線は双曲線となり、その方程式を簡単にすれば (12) 式とまったく同一の結果が得られる (図-5)。しかしながら式 (11) 及び (12) に含まれる常数 a, b, c の値が、ここではすべて負になることに注意すべきである。そこで前と同様にパラメーター θ を用いて σ と σ' をさらに次の式で表わすことにする。

$$\sigma = \sqrt{c/b} \sec \theta, \quad \sigma' = \sqrt{-c/3} \tan \theta \dots\dots\dots (22)$$

そうすれば式 (22) を (15) に代入して解くことによつて、 r と θ との関係を簡単に求めることができる。すなわち

$$j^2 r^2 \tan \theta = \left(\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right)^{\sqrt{3/4 - b}} \dots\dots\dots (23)$$

ここに j : 積分常数

この積分常数 j を求めるにも、 $r=R$ にて $\sigma_r=0$ なるという境界条件を用いればよく、次の式から求められる θ_R と $r=R$ を式 (23) に代入すれば、 j が決定される。

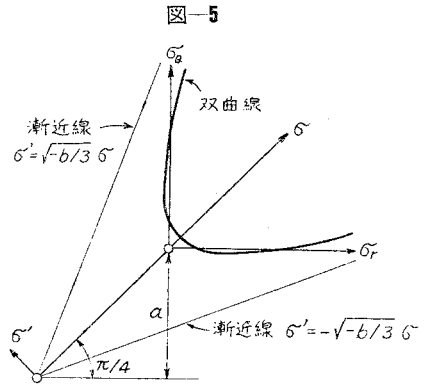
$$a\sqrt{-6b} \cos \theta_R + \sqrt{-c} (\sqrt{3} - \sqrt{-b} \sin \theta_R) = 0 \dots\dots\dots (24)$$

この式は式 (11) と (22) から誘導されたものであるが、いまの場合 2 つの実根を有することは明らかである。しかしかかる 2 根のうちいずれの θ_R を採用すべきかについては、前々項の説明に従えばよい。

なお上記 (2)~(4) のいずれの場合にも、土に関する常数 m, a_0, b_0 値いかんによつては、弾性領域内の応力の式 $\sigma_r + \sigma_\theta = 2q$ の与える直線と、式 (6) の 2 次曲線 (図-3) とが交わらぬおそれがあるとも一応は考えられる。しかしそれはあり得ないことである。なぜならばかかるときには、立て坑から無限に離れた点においても、土が安定を保ち得ないことになり、我々の経験に反するからである。

5. 弾塑性境界

(1) 総説 この節では弾塑性境界の半径 R' と式 (1) に含まれる常数 k とを求めよう。それには弾塑性境界 $r=R'$ では、弾性領域の側から計算した σ_r と σ_θ が、塑性領域より求めたそれらにそれぞれ等しくなるものとして条件式を立てればよいと考えられる。かようにして k の値がわかれば、式 (1) によつて弾性領域内の応力分布が計算できる。



(2) $1-2a_0^2 > 0$ なる場合 式(1),(11)及び(13)から次の2式が得られるから、これから R' と k を求めればよい。

$$a + \sqrt{c/6b}(\sqrt{3} \sin \theta_{R'} + \sqrt{b} \cos \theta_{R'}) = \pm k/R'^2 + q \dots\dots\dots (25)$$

ただし $\theta_{R'}$ は $r=R'$ における θ の値を表わす。

(3) $1-2a_0^2 = 0$ なる場合 $r=R'$ における $(\sigma_r + \sigma_\theta)$ の値を式(1)と(18)からそれぞれ求めておきそれらを等しいとおけば、さらに式(19)を用いることによつて次の式が得られる。

$$\sqrt{2}fq = 3\sigma'^2_{R'} + q \dots\dots\dots (26)$$

従つてこれから求められる $\sigma'_{R'}$ と $r=R'$ を式(20)に代入すれば、 R' を計算することができる。次に式(1)と(18)から今度は $(\sigma_r - \sigma_\theta)$ の値を求め、それらが $r=R'$ において等しいとおけば、

$$k = \sigma'_{R'} R'^2 / \sqrt{2} \dots\dots\dots (27)$$

従つて上式から k の値が計算される。

(4) $1-2a_0^2 < 0$ なる場合 式(1),(11)及び(22)から得られる次の2式によつて、 R' と k を計算すればよい。

$$a + \sqrt{c/6b}(\sqrt{3} \sec \theta_{R'} + \sqrt{-b} \tan \theta_{R'}) = \pm k/R'^2 + q \dots\dots\dots (28)$$

6. 数値計算例

大阪市内の地下鉄工事現場から採取した青粘土を例にとり、それについて3軸圧縮試験その他を行つた結果、必要な常数として次のような値が得られた。

$$a_0 = 0.268, \quad b_0 = 0.435 \text{ kg/cm}^2,$$

$$w = 2.15 \text{ t/m}^3, \quad m = 2.4$$

従つていまの場合には $1-2a_0^2 > 0$ であるから、式(9)と(10)によつて計算すれば、次のようになる。

弾性限界深さ $z_1 = 1.8\text{m}$, 塑性限界深さ $z_2 = 2.5\text{m}$

次にこれらの z_1 と z_2 の中間の深さ $z = 2.3\text{m}$ における弾塑性境界の半径 R' を求めれば、立て坑の半径 R を 2.0m と仮定することによつて、式(1),(11),(12),(16),(12)及び(25)から $R' = 2.2\text{m}$ となることがわかる。またその深さにおける地盤内の応力分布を求めると、図-6に示すごとくなる。

7. 結 語

1~5 節においては、立て坑の安定性がその周囲の土の性質、とくに a_0 常数の値いかんによつて大なる影響を受けることを明らかにし、ついでそれぞれの場合に関して、弾塑性境界の半径と地盤内の応力分布とを求める計算式を誘導してきた。さらに6節には、青粘土に関する数値計算例が示してあるが、その結果から明らかのように、最大圧縮応力を生ずるのは、立て坑の周壁ではなくて弾塑性境界であり、いわば立て坑は自衛作用をなすように考えられるのである。

終りにこの研究に対して文部省科学研究費の補助を受けたことを附記して、感謝の意を表わすことにしたい。

参考文献その他

- 1) 例えば S. Timoshenko : Theory of Elasticity, p.55~58.
- 2) 杉原武徳氏はその論文：坑内地圧の解説，東大工学部紀要，第22冊第1号，昭.15.12，6~12頁において、鉛直な円形立て坑の周囲における応力を3次元軸対称の問題として弾性論的に解いているが、その結果は Lamé の式による計算値と実用上大差がない。
- 3) H.M. Westergaard : Plastic State of Stress Around A Deep Well, Journal of Boston Soc. of Civil Eng., Vol.27, No.1, Jan. 1940, p.1~5.
- 4) A. Nadai : Theory of Flow and Fracture of Solids, 1950, p.99~105, p.225~228 及び、星 塾 和：土の力学における塑性基本理論と三軸試験への適用，土木学会論文集，第21号，昭.29.12.
- 5) 例えば S. Timoshenko : 前出，p.309.

(昭 31.7.15)

図 6

