

離散化波数法と薄層要素法を組み合わせた 成層弾性体の面外波動場での衝撃応答解析手法

東平光生*

離散化波数法と薄層要素法を組み合わせた、成層弾性体の面外波動場での衝撃応答解析手法を展開している。薄層要素法と離散化波数法は、それぞれ波動方程式の解の空間変動を離散化するために用いられる。時間領域の波動方程式は、この離散化の結果、時間に関する常微分方程式に変換され、ここではこの方程式をモーダル解析法を用いて解いている。そして、この解を離散化波数に関するFourier係数とすることで、時間領域のGreen関数を得る。このGreen関数により、地盤の衝撃応答解析が可能となる。

Keywords : discrete wave number method, thin-layered element method, Green's function, impulsive response

1. はじめに

近年、弹性波動方程式を周波数領域でなく、時間領域で直接解く研究が増えてきている。この背景として、過渡応答解析や非線形解析を精度良く実行するためには、周波数領域解析よりも時間領域解析が有効である¹⁾ことが挙げられる。また、周波数領域で弹性波動方程式を解くことが、かなり一般的に行われるようになったことも、時間領域解析が注目されるようになった背景であろう。

しかし、時間領域で弹性波動方程式を解く場合、周波数領域解析と比べ格段に難しくなる問題も存在する。たとえば、無限領域の波動場を扱う場合の波動の放射条件の設定の問題もその一つである。この問題に対する解答として近年注目されているのは、時間領域BEMを適用する試み^{1)~5)}である。しかし、現状では時間領域BEMで用いることのできるGreen関数は限られており、この手法で常に容易に波動の放射条件を設定できるとは言い難い。たとえば、成層構造を有する地盤への時間領域BEMの適用は難しい。Wolfらは時間領域でFEMとBEMを結合する先駆的な研究を行っているが、成層構造の定式化では、結局周波数領域のGreen関数をFourier逆変換することで時間領域のGreen関数を得ている^{4), 5)}。しかし、解析アルゴリズムの効率性や定式化の簡便さを考えれば、時間ステップ解析でのGreen関数は時間領域で直接計算できることが望ましい。こうした意味で、時間領域BEMがより一般的な地震応答解析手法であるためには、成層地盤における時間領域Green関数の計算手法を開発してゆくことが一つの課題であると言える。

本論文ではこうした背景を基に、成層弾性体における時間領域Green関数の計算手法を展開する。さらに、

このGreen関数を用いて地盤の衝撃応答を計算し、展開手法の妥当性を検証する。扱う方程式は簡便さを考慮し二次元の面外波動場の方程式とする。二次元の面内波動場や三次元の弹性波動場での理論展開は二次元面外波動場に比べ、難しい問題も現れると思われるが、波動方程式を扱う意味では、共通点も多いものと考えられる。ここでは、こうした意味で、二次元面外波動場についての基本的な問題を明かにすることが課題である。

成層弾性体に対する解析手法には、薄層要素法と呼ばれる手法が周波数領域で定式化されている⁶⁾。この手法は、成層弾性体を薄層要素と呼ばれる有限要素で層分割する手法である。本論文では、この薄層要素法を時間領域の方程式に適用することで、成層弾性体のGreen関数の計算手法を展開する。ところで、時間領域の波動方程式に薄層要素法を適用すると、鉛直方向の空間微分が有限要素法の離散化手法でマトリックス形式の方程式に変換される。したがって、波動方程式の微分演算のうち、時間微分と水平方向の空間微分が残される。時間領域で薄層要素法を定式化する場合、この微分方程式をどう解くかが問題となる。前述のように薄層要素法による方程式はマトリックスを用いて記述されるから、Fourier積分変換などで一貫して解析的に方程式を取り扱うことは難しい。従って、ここでは方程式の水平方向の空間変動を複素Fourier級数で表現し、数値的に方程式を扱うことを考える。これは、水平方向の空間変動を複素Fourier級数で扱う手法が、離散化波数法⁷⁾として既に提示され、成功を収めてきたためである。また、方程式の水平方向の空間変動をFourier級数展開すると、方程式は時間に関する常微分方程式となり、モーダル解析法などが有効に活用できることが期待できる。こうした手法は、周波数領域から時間領域へのFourier逆変換が必要ないだけ、より簡便な手法となろう。

本論文では、こうした観点から時間領域の面外波動場

* 正会員 工博 東京理科大学理工学部土木工学科講師
(〒278 千葉県野田市山崎 2641)

の方程式に薄層要素法を適用し、さらに離散化波数法を導入することで、時間領域 Green 関数を求める手法を展開する。

時間領域の面外波動場の方程式に薄層要素法を直接適用すると、後述の Klein-Gordon 方程式をマトリックスとベクトルを用いて拡張した形式の方程式が得られる。したがって、解析解が得られる Klein-Gordon 方程式を用いて、ここでの離散化波数法の妥当性を検討することから議論を始める。

2. Klein-Gordon 方程式の Green 関数の離散化波数表現に関する考察

Klein-Gordon 方程式とは次の形式の方程式を言う。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta^2 u = 0 \quad (1)$$

この方程式に現れる変数の物理的な意味を、本論文で展開する手法との関連で与えておく。まず、 u は変位である。また、 x は水平方向の空間座標、 t は時間、 C は波動の伝播速度である。さらに、 β は波動方程式の解の鉛直方向の空間変動を規定したときに得られる定数である。たとえば、解の鉛直方向の空間変動を補間関数で展開したり、あるいは、Fourier 級数で展開する場合などに、この定数は現れる。後述のように、波動方程式に薄層要素法を通用することは、方程式の解の鉛直方向の空間変動を補間関数で展開することに相当し、マトリックスとベクトルを用いた形で式 (1) のタイプの方程式が得されることになる。また、本論文の付録では、定数 β は表面波のモード次数に関連して現れてくる。これは鉛直方向の空間変動を Love 波モードで展開するためである。

Klein-Gordon 方程式の Green 関数は次式で定義できる。

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \beta^2 \right] G(x, t) = -\delta(x)\delta(t) \quad (2)$$

ここに δ は Dirac のデルタ関数、 G は Green 関数である。この方程式の解は次式で表される⁸⁾。

$$G(x, t) = \frac{C}{2} J_0 \left(\beta \sqrt{C^2 t^2 - x^2} \right) H[Ct - x] \quad (3)$$

ここに、 J_0 は 0 次の第 1 種 Bessel 関数、 H は単位階段関数である。この解は $Ct > x$ の時に値を持ち、いわゆる遅延条件を満足している。

次に、式 (3) の離散化波数表示を求めてみる。よく知られているようにデルタ関数は次の Fourier 積分表示を持っている。

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i\xi x] d\xi \quad (4)$$

このデルタ関数は、 $-\infty < x < +\infty$ で定義された関数

で、連続的な波数 ξ の波動関数の重ね合わせで表現されている。離散化波数法では、連続的な波数 ξ の波数関数の重ね合わせでデルタ関数を表現する代わりに、離散的な波数の波動関数の重ね合わせで次のように表す。

$$\delta_c(x) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp[-i\xi_n x] \quad (5)$$

ここに、 $\delta_c(x)$ は、 $-L/2 < x < L/2$ の有限区間で定義されたデルダ関数⁹⁾であり、 ξ_n は次式で示される。

$$\xi_n = \frac{2\pi}{L} n \quad (7)$$

式 (5) のように有限区間で定義されたデルタ関数は、定義域の外側では、周期 L の関数となり、デルタ関数の特異点も周期 L ごとに現れるようになる。したがって、離散化波数法で時刻歴応答を求める場合には、 $x=0$ 以外のデルタ関数の特異点からの波動の影響が現れないよう L の大きさを設定しなければならない。ここでは、 $x=0$ 以外のデルタ関数の特異点を鏡像ソース点と呼ぶことにする。

式 (5) に従い、式 (3) の $G(x, t)$ を次のように Fourier 級数表示する。

$$G(x, t) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{G}_n(t) \exp[-i\xi_n x] \quad (7)$$

式 (2) の $\delta(x)$ を式 (5) の $\delta_c(x)$ で置き換え、さらに式 (7) を式 (2) に代入することで、 $G_n(t)$ に関する方程式が次のように得られる。

$$\left[\frac{1}{C^2} \frac{d^2}{dt^2} + (\beta^2 + \xi_n^2) \right] \hat{G}_n(t) = \delta(t) \quad (8)$$

式 (8) を解くと、次式が得られる。

$$\hat{G}_n(t) = \frac{C^2 H(t)}{\lambda_n} \sin \lambda_n t \quad (9)$$

ここに、

$$\lambda_n = C \sqrt{\beta^2 + \xi_n^2} \quad (10)$$

である。式 (9) の解は $t=0$ で値がゼロとなるように選択している。これは Green 関数の因果性からの要求である⁸⁾。

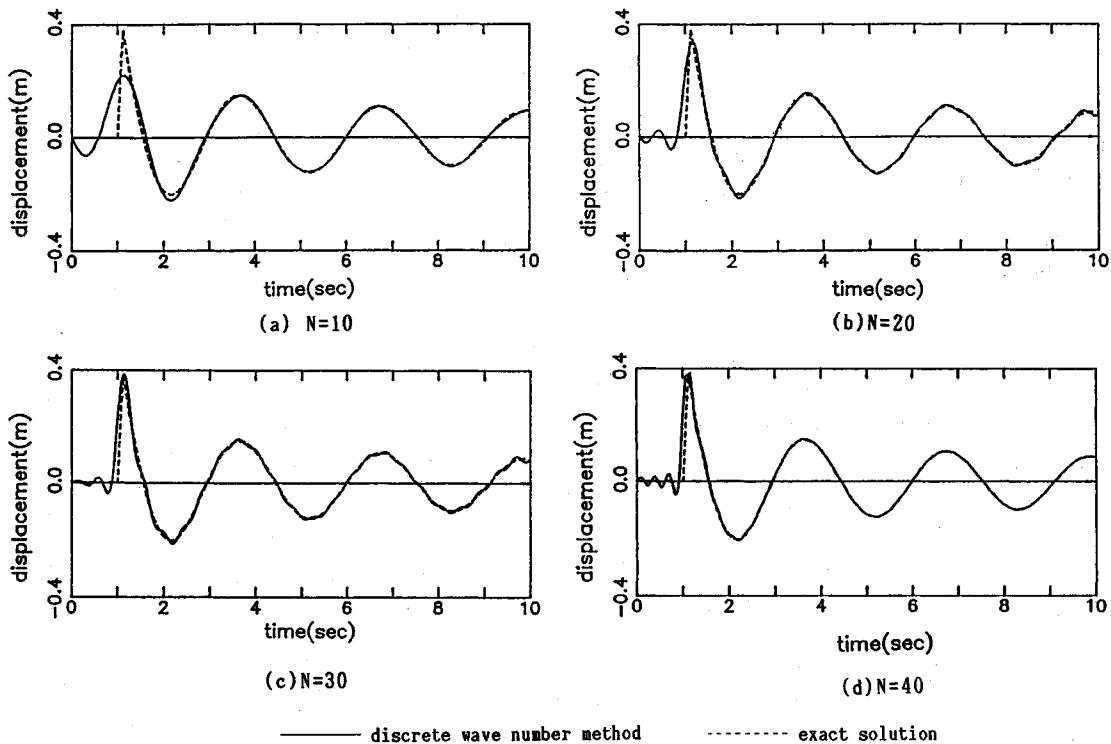
式 (9) を式 (7) に代入することで、Klein-Gordon 方程式の Green 関数の離散化波数表示が得られる。若干の式の変形を行い、複素関数が現れないように式を整理すると、Green 関数の離散化波数表示式として次式が得られる。

$$G(x, t) = \frac{H(t)}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \frac{C^2}{\lambda_n} \sin \lambda_n t \cos \xi_n x \quad (11)$$

ここに、 ϵ_n は Neumann 因子で、次のように与えられる。

$$\epsilon_0 = 1 \\ \epsilon_n = 2 \quad (n \neq 0) \quad (12)$$

以上が本論文で展開される離散化波数法である。ここ

Fig.1 Effects of truncation at the N -th term for the infinite discrete wave number series

で展開された離散化波数法は、時間と空間微分を有する微分方程式に適用される。そして、方程式の微分演算のうち空間微分を消去し、微分方程式を時間に関する常微分方程式に変換する。さらに因果性を満足するように微分方程式を解き、最終的に離散化波数に関する Fourier 級数として時間領域の解を得る。

Bouchon らによって提案された離散化波数法⁷⁾との違いをみるために、ここで、Bouchon らの手法の概略を示す。Bouchon は、周波数領域の波動方程式の解が、次の波数に関する Fourier 積分で表されることから出発する。

$$\bar{u}(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega, \xi, z) \exp(i\xi x) d\xi \cdots \cdots (13)$$

ここに、 $\bar{u}(x, z)$ は、周波数領域の波動方程式の解であり、 z は鉛直方向の空間座標を示す。また、 $F(\omega, \xi, z)$ の具体的な形については、Bouchon の論文で与えられている。

Bouchon は、Green 関数の定義式に現れる $\delta(x)$ を式 (5) の $\delta_c(x)$ で置き換えることで、式 (13) を次の複素 Fourier 級数、すなわち離散化波数の級数で置き換えることができる事を示している。

$$\bar{u}(x, z) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega, \xi_n, z) \exp(T\xi_n x) \cdots \cdots (14)$$

さらに、 $F(\omega, \xi_n, z)$ の特異点をさけて級数を計算す

る方法も示すことで、繁雑な取扱いが必要な式 (13) の代わりに、式 (14) を用いて波動方程式の解が得られることを示している。

しかしながら、式 (14) で計算できる解は周波数領域のものであり、ここから時間領域の解を計算するためには、Fourier 逆変換が必要である。本論文で展開する手法では、式 (11) に示すように時間領域の解を直接求めており、こうした点に Bouchon らの手法との違いがある。

次に、式 (11) で与えられた Klein-Gordon 方程式の Green 関数の離散化波数表現の有効性について検討する。式 (11) は無限級数であるが、実際の数値計算では有限項で打ち切らねばならない。したがって、どの程度の項数で打ち切れば実用的な解が得られるかが式 (11) の適用に当たっての問題である。もうひとつの問題は L の大きさの選択である。デルタ関数の鏡像ソース点からの波動の影響を受けないように L の大きさを選択しなければならないことはもちろんである。一方、式 (6) より L を大きく設定することは、離散化波数の間隔を細かくとることに他ならない。このような離散化波数の間隔によって、応答時刻歴が影響をうけるかどうかの検討をしておく必要があろう。

まず、第一の問題である、式 (11) の級数の打ち切りについて考える。式 (10) や式 (11) において、 β

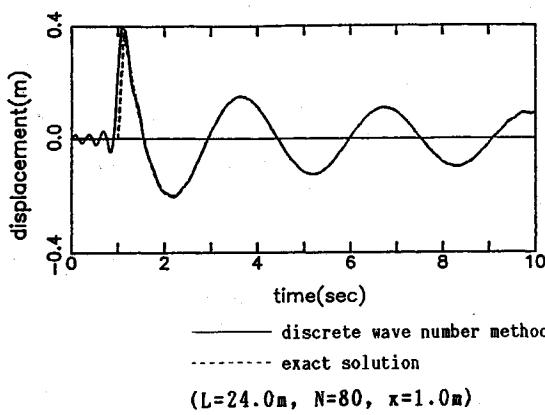


Fig.2 Comparison of displacement

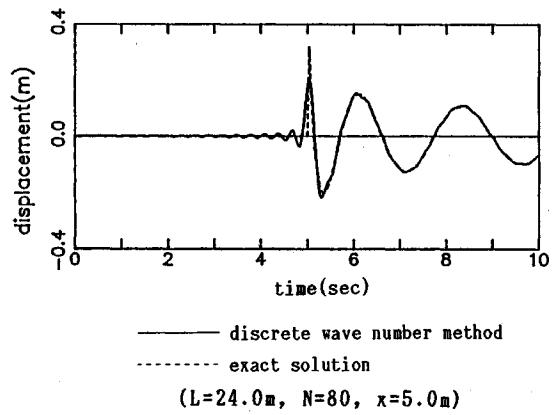


Fig.3 Comparison of displacement

$=2.0/\text{m}$, $C=1.0 \text{ m/s}$, $L=12.0 \text{ m}$ としてこの問題を検討する。また、ソース点から観測点までの距離を $x=1.0 \text{ m}$ とする。打ち切りの項数を 10~40 まで変えて計算し、式 (3) による解析解との比較を行った結果を Fig.1 に示す。これらの図では破線が解析解、実線が離散化波数法の結果である。解析解は時刻が 1.0 sec のところで急速に立ち上がっている。これは $C=1.0 \text{ m/s}$, $x=1.0 \text{ m}$ としたため、波動が伝わるのに要する時間が 1.0 sec であることを示している。それと同時に、時刻が 1.0 sec のところではウェーブフロントの不連続性が現れていることも示している。Fig.1 (a) の結果は級数の打ち切り項数が 10 度程であっても、ウェーブフロントの不連続性が現れる時刻を除いて良好に収束することを示している。また、Fig.1 (a)~(d) の結果は打ち切り項数を増やしていくに従いウェーブフロントの不連続性が形成されてゆく様子が示される。ただし、打ち切り項数が 40 の場合と 30 の場合とを比べると、打ち切り項数が 40 の場合では、離散化波数法による結果の波形は滑らかになっているものの、ウェーブフロントの不連続性に関しては、大幅な精度の向上は見られない。したがって、打ち切り項数を 30~40 よりも多くすることは、この場合それほど得策ではないと思われる。今回の数値計算では、級数の打ち切り項数が 30 の場合、離散化波数の大きさはおよそ 15 であり、打ち切り項数が 40 の場合、離散化波数はおよそ 20 である。したがって、15 から 20 ぐらいの大きさの波数を持つ波動関数の重ね合わせで Green 関数を表現することが、この場合望ましいと思われる。

次に、式 (11) に与える L の影響について考察する。先ほどの計算では $L=12.0 \text{ m}$ としたので、ここでは $L=24.0 \text{ m}$ とし、打ち切り項数を 80 とする。この条件で式 (11) を計算した結果を Fig.2 に示す。この結果と Fig.1 (d) の結果とを比べると、離散化波数法の結果はほとんど変わっていないことが分かる。前述のように、

L を大きくとった場合、式 (6) より、離散化波数の間隔が細かくなるが、このために計算結果の曲線が滑らかになるということもない。したがって、 L の大きさの選択に関しては、デルタ関数の鏡像ソース点からの波動が結果を乱さないことを考えれば良いことになる。

これまでの検討では、 $x=1.0 \text{ m}$ としたが他の x の値でも良好な収束結果がでているかを調べてみる。Fig.3 に $x=5.0 \text{ m}$ としたときの結果を示す。ここでは、 $L=24.0 \text{ m}$ 、級数を 80 項で打ち切っている。 $L=24.0 \text{ m}$ とした理由は解析時間間に鏡像ソースからの波動が到着しないようにするためである。Fig.3 の結果は離散化波数法と解析解がよく一致していることを示し、級数の収束性は x に依存しないことを示している。また、離散化波数法の結果は波動が到着するまでの時間の約 5 sec の間、ほとんどゼロであり、遅延時間の評価でもすぐれていることが注目される。

3. 時間領域の薄層要素方程式に対する離散化波数法

(1) 時間領域の波動方程式に対する薄層要素法

前のように薄層要素法は成層弾性体を薄層要素に有限要素分割して波動方程式を記述する手法である。通常は周波数領域の方程式が薄層要素法で用いられているが、本論文では時間領域の方程式を直接薄層要素法で離散化する。そして、この方程式に対して、前節で述べた離散化波数法を適用する。

ここでは、こうした観点から薄層要素法の定式化の概略から議論を始めることにする。出発点は面外波動場における次の Green 関数の定義式である。

$$\left[\mu \nabla^2 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] G(x, z, t) = -\delta(x)\delta(z-d)\delta(t) \quad \dots \quad (15)$$

ここに、 μ はせん断弾性係数、 ρ は質量密度、 d はインパルスが作用する z 座標である。また、 ∇^2 は Lapla-

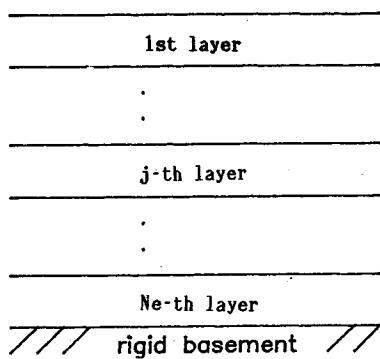


Fig.4 Thin-layered element model of an elastic layered medium

cian で、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \dots \dots \dots (16)$$

と表される。

式(15)の方程式を、Fig.4に示すような薄層要素で分割された剛基盤上の地盤で考えることにする。そして、 j 番目の薄層要素について、重み付き残差法を適用すると次式となる。

$$\int_{z_{-j}}^{z_{+j}} \delta G(x, z, t) \left[\mu \nabla^2 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] G(x, z, t) dz \\ = -\delta(x) \delta(t) \int_{z_{-j}}^{z_{+j}} \delta G(x, z, t) \delta(z-d) dz \quad \dots \dots \dots (17)$$

ここに、 $\delta G(x, z, t)$ は $G(x, z, t)$ に対する仮想増分、 z_{+j} および z_{-j} は j 番目の薄層要素の上下の境界の z 座標を示す。薄層要素法では、離散化手法の適用が鉛直方向の空間成分だけであるから、重み付き残差方程式での積分は z 成分だけであることに注意する。以降の議論では下付きの添字の j は j 番目の薄層要素を、下付の添字 + と - は薄層要素の上下の境界を表すこととする。

式(17)に部分積分を施すと次式を得る。

$$\int_{z_{-j}}^{z_{+j}} \delta G(x, z, t) \left[\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] G(x, z, t) dz \\ + \int_{z_{-j}}^{z_{+j}} \frac{\partial}{\partial z} \delta G(x, z, t) \mu \frac{\partial}{\partial z} G(x, z, t) dz \\ = \int_{z_{-j}}^{z_{+j}} \delta(x) \delta(t) \delta(z-d) \cdot \delta G(x, z, t) dz \\ + \left[\delta G(x, z, t) \mu \frac{\partial}{\partial z} G(x, z, t) \right]_{z_{-j}}^{z_{+j}} \quad \dots \dots \dots (18)$$

ここで、 $G(x, z, t)$ を補間関数を用いて次のように表す。
 $G(x, z, t) = [N(z)]_j \{G(x, t)\}_j \quad \dots \dots \dots (19)$

ここに、 $[N(z)]_j$ は、補間関数で z の関数である。また、 $\{G(x, z, t)\}_j$ は j 番目の薄層要素の上下の境界位置での Green 関数をベクトル化したもので、その成分は次のように表される。

$$\{G(x, t)\}_j = \{G_{j+}(x, t) \ G_{j-}(x, t)\}^T \quad \dots \dots \dots (20)$$

ここに、ベクトルの肩の添字 T はそのベクトルの転置をとることを意味する。以降の議論では、添字 T はマトリックスに用いられることがある。

Green 関数の仮想増分 $\delta G(x, z, t)$ にも、式(19)と同じ補間関数で離散化を施し、式(18)の積分を実行することで次式を得る。

$$\left[[M]_j^e \frac{\partial^2}{\partial t^2} - [A]_j^e \frac{\partial^2}{\partial z^2} + [K]_j^e \right] \{G(x, t)\}_j \\ = -\delta(t) \delta(x) \{F\}_j + \{P\}_j \quad \dots \dots \dots (21)$$

ここに、 $[M]_j^e$ 、 $[A]_j^e$ 、 $[K]_j^e$ は、薄層要素マトリックスである。式(19)の補間関数を線形とした場合、薄層要素マトリックスの成分は次のようになる。

$$\begin{aligned} [M]_j^e &= \frac{\rho_j h_j}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ [A]_j^e &= \frac{h_j \mu_j}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ [K]_j^e &= \frac{\mu_j}{h_j} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (22)$$

また、 $\{F\}_j$ は、式(18)の右辺の第1項に関連して現れるベクトルで、次の演算によって得られる。

$$\{F\}_j = \int_{z_{-j}}^{z_{+j}} [N(z)]_j^e \delta(z-d) dz \quad \dots \dots \dots (23)$$

さらに $\{P\}_j$ は、式(18)の右辺第2項に関連して現れるベクトルで、薄層要素の上下の境界での境界条件を表す。ここでは、この成分を次のように表す。

$$\{P\}_j = \{\sigma_{+j(zy)} - \sigma_{-j(zy)}\}^T \quad \dots \dots \dots (24)$$

ここに、 σ は応力を表し、括弧の中の添字の y および z はその座標成分である。ただし、 y は面外方向を表す。

式(21)の方程式を各薄層要素で作成し、重ね合わせることで全体の方程式を得る。このときベクトル $\{P\}_j$ に関しては、各薄層要素の境界で隣接する薄層要素の応力が釣り合っていること、自由表面での応力がゼロであることを用い、次式を得る。

$$\sum_{j=1}^{N_e} \{P\}_j = \{0\} \quad \dots \dots \dots (25)$$

ここで、 N_e は薄層要素の要素数を表す。

したがって、全体の方程式は、次のように表される。

$$\left[[M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} - [A] \frac{\partial^2}{\partial z^2} + [K] \right] \{G(x, t)\} \\ = -\delta(t) \delta(x) \{F\} \quad \dots \dots \dots (26)$$

ここに、 $[M]$ 、 $[A]$ 、 $[K]$ は全体マトリックスであり、たとえば、 $[M]$ は次のような重ね合わせの結果である。

$$[M] = \sum_{j=1}^{N_e} [M]_j^e \quad \dots \dots \dots (27)$$

マトリックス $[A]$ 、 $[K]$ 、およびベクトル $\{F\}$ も同様な重ね合わせで求めることができ、式(25)を含め、

これらは有限要素解析で行われるマトリックスやベクトルの重ね合わせの方法に従う。また、式(26)の $\{G(x, t)\}$ は各薄層要素の境界位置でのGreen関数をベクトル化したものであり、剛基盤上では、Green関数の値が常にゼロとなる条件を導入する。

(2) 薄層要素方程式に対する離散化波数法

式(26)は、式(1)で示したKlein-Gordon方程式の係数をマトリックスで、未知関数をベクトルで表した方程式である。したがって、式(26)に離散化波数法を適用する場合には、Klein-Gordon方程式の離散化波数法の議論が適用できるものと期待できる。

式(26)に離散化波数法を適用するため、 $\delta(x)$ を式(5)の $\delta_c(x)$ で置き換え、それと同時に $\{G(x, t)\}$ を次のように複素Fourier級数で表示する。

$$\{G(x, t)\} = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{\hat{G}_n(t)\} \exp(-i\xi_n x) \quad (28)$$

式(28)を式(26)に代入することで次式を得る。

$$\left[[M] \frac{d^2}{dt^2} + \xi_n^2 [A] + [K] \right] \{\hat{G}_n(t)\} = \{F\} \delta(t) \quad (29)$$

式(29)を解くためにモーダル解析法を適用する。まず、次の固有値問題を考える。

$$\lambda^2 [M] \{v\} = [\xi_n^2 [A] + [K]] \{v\} \quad (30)$$

ここに、 λ は固有値、 $\{v\}$ は固有ベクトルを示す。この固有値问题是、式(22)で示したマトリックスの性質から実対称マトリックスの固有値問題である。

この固有値解析からモーダルマトリックスを作成し、式(29)の解を次のように表示する。

$$\{\hat{G}_n(t)\} = [V]_n \{\alpha(t)\}_n \quad (31)$$

ここに、 $[V]_n$ はモーダルマトリックス、 $\{\alpha(t)\}_n$ は未定係数である。モーダルマトリックスおよび未定係数の下付の添字 n は左辺の n に対応している。そして、この n は離散化波数に関連したパラメータでもある。

固有ベクトルの直交性からモーダルマトリックスは、以下の性質がある。

$$[V]_n^T [M] [V]_n = [E]$$

$$[V]_n^T [\xi_n^2 [A] + [K]] [V]_n$$

$$= \text{diag.} [\lambda_{1(n)}^2 \ \lambda_{2(n)}^2 \ \dots \ \lambda_{M(n)}^2] \quad (32)$$

ここに、 $[E]$ は単位マトリックス、 diag. は対角行列であることを示し、括弧の中はその成分を表す。また、 λ の下付きの添字 (n) は離散化波数のパラメータ n に対応していることを示し、もう一つの下付きの添字は固有値の次数を示している。

式(29)の両辺の左から $[V]^T$ を乗じ、式(31)および式(32)を用いることで $\{\alpha(t)\}_n$ に関する方程式が次のように得られる。

$$\text{diag.} \left[\frac{d^2}{dt^2} + \lambda_{1(n)}^2 \ \dots \ \frac{d^2}{dt^2} + \lambda_{M(n)}^2 \right] \{\alpha(t)\}_n$$

$$= [V]_n^T \{F\} \delta(t) \quad (33)$$

この方程式は $\{\alpha(t)\}_n$ の各成分に関して、非連成化されているから、 $\{\alpha(t)\}_n$ の各成分に関する方程式は、次のように表される。

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \lambda_{j(n)}^2 \right] \alpha_{j(n)}(t) = \sum_{k=1}^M v_{kj(n)} F_k \delta(t) \quad (34)$$

この方程式は $\{\alpha(t)\}_n$ の j 番目の成分に関する方程式である。また、 $v_{kj(n)}$ 、 F_k は $[V]_n^T$ および $\{F\}$ の成分である。 $t=0$ において値がゼロとなるように式(34)の解を定めれば次式を得る。

$$\alpha_{j(n)}(t) = \frac{\sum_{k=1}^M v_{kj(n)} F_k H(t)}{\lambda_{j(n)}} \sin \lambda_{j(n)} t \quad (35)$$

再び、 $\alpha_{j(n)}(t)$ をベクトルとしてまとめることで次式を得る。

$$\{\alpha(t)\}_n = [\Phi(t)]_n [V]_n^T \{F\} H(t) \quad (36)$$

ここに、

$$[\Phi(t)]_n = \text{diag.} \left[\frac{\sin \lambda_{1(n)} t}{\lambda_{1(n)}} \dots \frac{\sin \lambda_{M(n)} t}{\lambda_{M(n)}} \right] \quad (37)$$

である。

式(31)と式(36)を用いることで、 $\{\hat{G}_n(t)\}$ を次のように表すことができる。

$$\{\hat{G}_n(t)\} = [V]_n [\Phi(t)]_n [V]_n^T \{F\} H(t) \quad (38)$$

さらに、式(28)を用いることにより、Green関数の離散化波数表示式が次のように得られる。

$$\{G(x, t)\}$$

$$= \frac{H(t)}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [V]_n [\Phi(t)]_n [V]_n^T \{F\} \exp(-i\xi_n x) \quad (39)$$

複素関数の計算をさけるように、式(39)を整理すると、次式を得る。

$$\{G(x, t)\}$$

$$= \frac{H(t)}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n [V]_n [\Phi(t)]_n [V]_n^T \cos \xi_n x \{F\} \quad (40)$$

式(40)は、モーダルマトリックスを含むために、Klein-Gordon方程式のGreen関数の離散化波数表現の式(11)と異なっている。しかし、この点を除けば両者はきわめて良く似ている。このような意味で、式(40)は、Klein-Gordon方程式のGreen関数の離散化波数表現の拡張であると理解できる。なお、モーダルマトリックスが式(40)に現れていることは、式(40)がLove波のモードの重ね合わせでGreen関数を表現していることを示している。

ここでの一連の展開を振り返ると、薄層要素方程式の

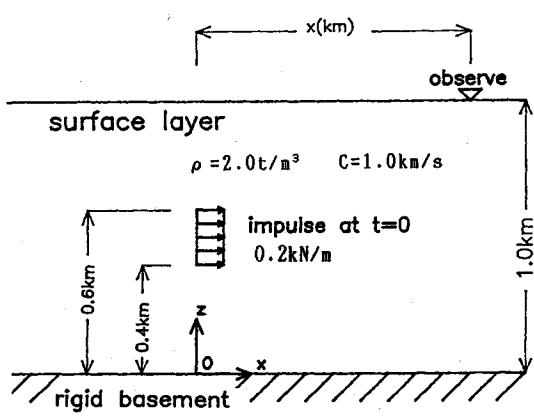


Fig.5 Analyzed model

解き方として、与えられた波数に対する表面波の振動数を求め、因果性を満足するように表面波モードを重ね合わせていることが理解できる。従来より用いられてきた薄層要素方程式の解き方は、振動数をあらかじめ与え、それに対する表面波の波数を求める方法である⁶⁾。したがって、こうした点に従来の薄層要素法との相違点があるものと理解できる。

4. 数値計算例

式(40)を用いて、面外波動場の衝撃応答を計算することで、手法の妥当性を検証してゆく。前述のように、式(40)はKlein-Gordon方程式のGreen関数の離散化波数表現の拡張であると考えられるから、Klein-Gordon方程式のGreen関数の検討で得られた知見が応用できるものと期待できる。

Fig.5に示すような剛基盤上に、水平に堆積している均質な表層地盤の衝撃応答を求めてみる。この問題に対する解析解は付録で求めている。付録でも述べたように、Fig.5の表層地盤の一点にデルタ関数で表される衝撃力を加えて生じる波動のウェーブフロントは、ある一点で無限大の大きさの変位を生じ、これがS波の伝播速度で水平方向に伝播してゆく。さらに、ウェーブフロントの通過後、基盤と地表面を往復する波動が残り、これが時間と共に減衰してゆく。

数値計算で、無限大の変位を含む波動を追跡してゆくことは困難が大きいので、ここでは、衝撃応答が有限な大きさの変位にとどまるように工夫を施す。すなわち、ここでは衝撃力を空間的な広がりを持たせて作用させることにする。衝撃力の分布は、どのようなものであっても、式(40)の重ね合わせで計算が可能である。たとえば、衝撃力は線的な分布でも、面的な分布でも良い。また、線的な分布の場合にも、その分布の方向は任意で良い。しかし、解析解を求めるこことを容易にするため、ここではFig.5に示すように衝撃力を鉛直方向に分布させ

ることにする。このような荷重条件を含め、解析条件をFig.5に示している。Fig.5に示すように、堆積層の厚さは1.0 km、堆積層の波動の伝播速度を1.0 km/s、密度を $2.0 \text{t}/\text{m}^3$ としている。また、衝撃力が作用するx座標は $x=0$ であり、時刻は $t=0$ である。衝撃力が作用するz座標の区間は、Fig.5に示すように $z=0.4 \text{ km}$ から $z=0.6 \text{ km}$ までの領域であり、衝撃力の大きさは $0.2 \text{kN}/\text{m}$ である。

式(40)を用いた衝撃応答の計算では、前述のKlein-Gordon方程式の離散化波数法の検討結果を参考に $L=15.0 \text{ km}$ とし、級数は $n=40$ で打ち切る。また、固有値解析にはJacobi法を用いる。

Fig.6は、薄層要素の大きさによる衝撃応答波形の相違を見たものである。Fig.6(a)は表層地盤を10層に分割し、Love波のモードを10次まで採用したものである。また、Fig.6(b)は表層地盤を20層に分割し、Love波のモードを10次まで採用したものである。Fig.6(a), (b)とも、実線はこうした計算による解である。また、破線は付録で示した解析解である。解析解について、Love波のモードを10次まで採用することで、解が収束することが分かったので、Fig.6の(a)および(b)の解析解はいずれもLove波のモードを10次まで採用している。また、ここでは衝撃力を与えた点と観測点の水平距離を1.0 kmとしている。

以降では、簡単のために式(40)に基づく解を数値解と呼ぶことにする。数値解について、Fig.6(a)と(b)を比較すると、ほぼ同様な結果が得られていることが分かる。しかし、これらの数値解を比べると、微妙な差異はあるが、やはり(b)の方が数値解の精度は良い。これは、表層地盤を細分割したことによって、Love波のモードが高次まで精度良く求められたためであると思われる。なお、遅延時間の評価については、(a)と(b)を比較すると、それほど精度には変化が見られない。このことは、薄層要素の分割を細かくしても、遅延時間の評価に関する精度はそれほど変わらないことを示すと考えられる。

前述したように、式(40)の計算では、Klein-Gordon方程式に対する離散化波数法の検討結果を参考に、 L の大きさと、級数の打ち切り項数を定めた。Fig.6によれば、このようなパラメータの設定でも式(40)の級数は十分収束していることを示している。したがって、式(40)の級数の収束に関しても、Klein-Gordon方程式での検討結果が適用できるものと言える。

次に、表層を20層に分割し、Love波のモードを10次まで採用するという計算条件で、震源からの水平距離が3.0 kmと5.0 kmの地点での地表面の変位応答を観測する。この結果をFig.7の(a)と(b)に示す。この図

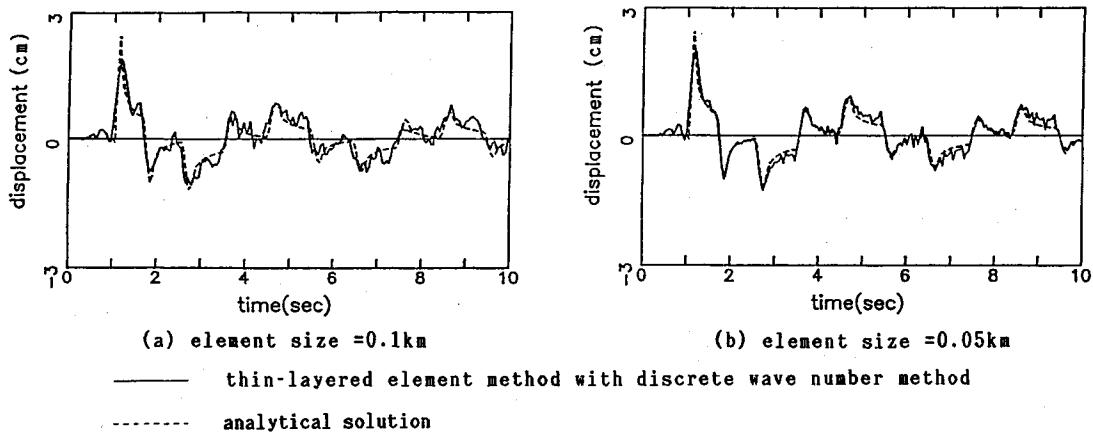


Fig.6 Effects of thin-layered element sizes on numerical solutions

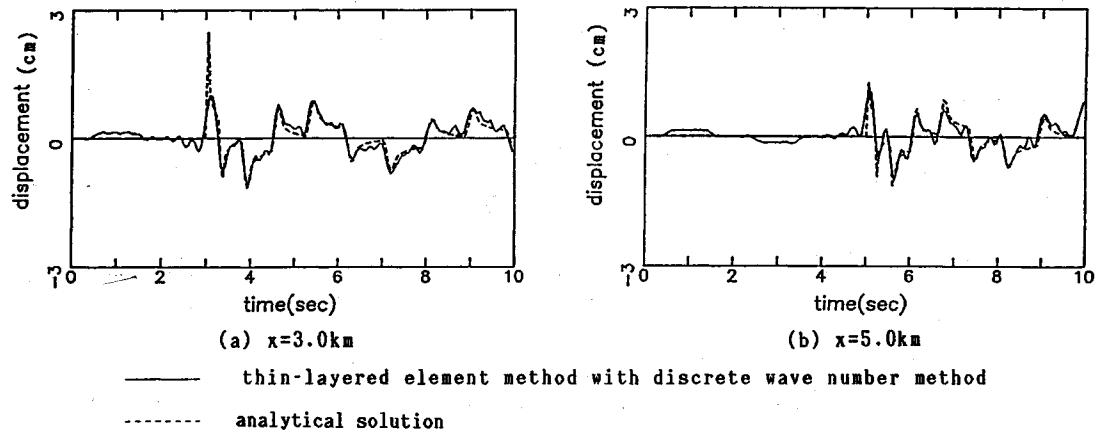


Fig.7 Comparison of displacement

でも実線は数値解、破線は解析解である。これらの図でも、数値解と解析解は良い一致をみており、式(40)を用いた計算手法が妥当であることを示している。なお、Fig.7 (a)では、解析解の時刻歴の鋭いピークを有する波形を数値解は捕らえ切れていない。この鋭いピークを再現するために、式(40)の級数の打ち切りを $n=80$ として再計算したところ、数値解の精度はほとんど改善されなかった。したがって、式(40)は特異性の強い波形の再現に関して限界があるものと思われる。

5. 結 論

本論文では、離散化波数法と薄層要素法を組み合わせた、面外波動場における成層弾性体の時間領域 Green 関数の算定手法を展開し、算定手法の妥当性を衝撃応答解析を通して検証した。

ここで用いた離散化波数法と薄層要素法は、時間領域の波動方程式に直接適用された点で、これまでの手法と異なっている。また、解の因果性を考慮して表面波モードを重ね合わせた点でも特色がある。

この手法の妥当性は、剛基盤上に水平に堆積する均質な地盤の衝撃応答を計算し、解析解と比較することで行った。この結果、本手法による解と解析解はよく一致することが分かった。

なお、本論文では、扱った方程式が二次元の面外波動場に関するものであった。この方法を二次元の面内波動場や三次元の弾性波動場に拡張してゆく場合には、手法の展開の流れは本質的には、変わらないものと考えられる。しかしながら、表面波のモードを求めるための固有值解析は、もはや実対称なマトリックスに関するものでなくなる場合もあり、こうした点で工夫が要求されるものと思われる。

付録 剛基盤上に均質な水平層が堆積の媒質での時間領域面外波動場の Green 関数

ここでは、剛基盤上に均質な水平層が堆積する場合の、時間領域面外波動場の Green 関数を誘導しておく。解析モデルを Fig.A.1 に示す。Green 関数の定義は次のようにになる。

$$z=h \quad \text{surface layer} \quad \frac{\partial u}{\partial z}=0$$

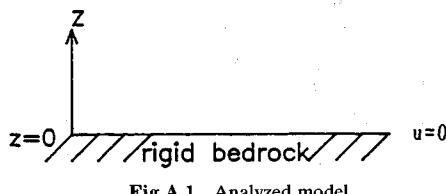


Fig.A.1 Analyzed model

$$\left[\mu \nabla^2 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] u(x, z, t) = -\delta(x) \delta(z - \zeta) \delta(t) \quad (\text{A.1})$$

ここに, ζ は衝撃力が作用する z 座標である。Fig.A.1 を参照すれば境界条件は次式で表される。

$$\begin{aligned} u(x, 0, t) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} u(x, h, t) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

この境界条件に基づく Fourier 級数展開は次のように定義される。

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= \frac{2}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{u}_n(x, t) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2h} z \\ \hat{u}_n(x, t) &= \int_0^h u(x, z, t) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2h} zdz \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

この Fourier 級数展開は, Love 波のモードに関する展開であることに注意する。式 (A.3) の Fourier 級数展開を式 (A.1) に施すことで次式を得る。

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \beta_n^2 \right] \hat{u}_n(x, t) \\ = \frac{1}{\mu} \delta(t) \delta(x) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2h} \zeta \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

ここに,

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{\mu/\rho} \\ \beta_n^2 &= \frac{1}{\mu} \left[\frac{(2n+1)\pi}{2h} \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

式 (A.4) は Klein-Gordon 方程式であるから, Klein-Gordon 方程式の Green 関数を用いて, 式 (A.4) の解を表現すれば次式となる。

$$\begin{aligned} \hat{u}_n(x, t) &= \frac{C}{2\mu} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2h} \zeta \cdot H[Ct-x] \\ &\quad \times J_0(\beta_n \sqrt{C^2 t^2 - x^2}) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

式 (A.6) 並びに式 (A.3) を用いることで式 (A.1) の解は次のようになる。

$$u(x, z, t) = \frac{C}{\mu h} H[Ct-x] \sum_{n=0}^{\infty} \sin \nu_n \zeta \sin \nu_n z$$

$$\times J_0(\beta_n \sqrt{C^2 t^2 - x^2}) \quad (\text{A.7})$$

ここに,

$$\nu_n = \frac{(2n+1)\pi}{2h} \quad (\text{A.8})$$

式 (A.7) で示すように Green 関数が得られたが, この級数の性質については注意を払わなければならない。たとえば, $Ct=x$ のとき, すなわちウェーブフロントでは Green 関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= \frac{C}{\mu h} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \nu_n \zeta \sin \nu_n z \\ &= \frac{C}{2\mu} \delta(z - \zeta) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

すなわち, ウェーブフロントでは, Green 関数はデルタ関数によって表される特異性を持つ。すなわち, $z=\zeta$ の位置では変位は無限大であり, その他の z 座標では変位はゼロである。そして, ウェーブフロントはこの波形を保ちながら, 水平方向に速度 C で伝播してゆく。さらに, 式 (A.7) を用いて, ウェーブフロントが通り過ぎた場所での波動の様子を調べたところ, 基盤と地表面の間を往復する波動が残り, これが時間の経過とともに減衰してゆくことが分かった。

このような無限大の大きさの変位を扱うことは, 数値計算の上では非常に困難である。この困難を避けるためにここでは, 衝撃力を z 方向に有限区間内で有限の大きさに分布させることにする。このときの解は式 (A.7) を z 方向に積分すれば良く, 簡単に求めることができる。いま, 衝撃力が z_1 から z_2 の区間で大きさ p で分布するときの解を $u^*(x, z, t)$ で表すと, 次の積分によって表される。

$$u^*(x, z, t) = \int_{z_1}^{z_2} p \cdot u(x, z, t) dz \quad (\text{A.10})$$

式 (A.10) の被積分関数は, 式 (A.7) で示されたものであり, この関数は, 加振点の z 座標 ζ の関数であることに注意する。式 (A.10) の積分の結果は次のようにになる。

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= \frac{Cp}{\mu h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \nu_n z_1 - \cos \nu_n z_2}{\nu_n} \sin \nu_n z \\ &\quad \times J_0(\beta_n \sqrt{C^2 t^2 - x^2}) H[Ct-x] \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

参考文献

- 1) 近江正徳・佐々木定雄・登坂宣好: 時間領域境界要素法による 3 次元埋め込み剛基盤の動的応答解析, 構造工学論文集, Vol. 33B, pp. 93~101, 1987.
- 2) Cole, D.M., Kosloff, D.D. and Minister, J. B.: Numerical boundary integral equation method for elastodynamics I, Bull., Seis., Soc., Am., Vol.68, No.5, pp.1415~1437,

1978.

- 3) 東平光生・吉田望：時間領域の有限要素法と境界要素法の結合解法による地盤振動解析、土木学会論文集、No. 410/I-12, pp. 395~404, 1989.
- 4) Wolf, J.P. and Dabre, G.R.: Non-linear soil-structure interaction analysis based on the boundary element method in time domain with application to embedded foundation, Earth., Eng., Str., Dyn., Vol.14, pp.83~101, 1984.
- 5) Wolf, J.P. and Obernhuber, P.: Non-linear soil-structure interaction analysis using Green's function of soil in the time domain, Earth., Eng., Str., Dyn., Vol.13, pp.213~223, 1985.
- 6) Lysmer, J. and Darke, J.A.: A finite element method for seismology method in seismological physics, Academic Press, 1973.
- 7) Bouchon, M. and Aki, K.: Discrete wave number representation of seismic source wave fields, Bull., Seis., Soc., Am., pp.259~277, 1977.
- 8) 今村勤：物理とGreen関数、岩波全書。
- 9) 並木美喜雄：デルタ関数と微分方程式、岩波書店。
- 10) 戸川隼人：有限要素法による振動解析、サイエンス社。
(1992.4.25 受付)

IMPULSIVE RESPONSE OF AN ELASTIC LAYERED MEDIUM IN THE ANTI-PLANE WAVE FIELD BASED ON A THIN-LAYERED ELEMENT AND DISCRETE WAVE NUMBER METHOD

Terumi TOUHEI

A procedure for calculating impulsive response of an elastic layered medium in the anti-plane wave field is presented. This procedure is based on a thin-layered element and discrete wave number method. By the thin-layered element and discrete wave number method, wave equation in the anti-plane field is transformed into ordinary differential equations with respect to time. Green's function for the wave equation is represented by the superposition of the eigen solutions of the ordinary differential equations. It is found that impulsive responses calculated by the Green function show good agreement with analytical solutions.