

# Mindlin節点帯板要素による厚板と薄板の曲げ解析

林 正\*・坂口隆紀\*\*

節点帯板法に改良した Mindlin 要素を用いて、任意形状の厚板と薄板の曲げ解析を行う。この要素の節点と節線自由度の変位関数では、それぞれたわみと回転角の 3 成分を独立に補間するので、要素境界での適合条件を容易に満たす。また、中間節点と中間節線を用いて応力の精度を改善している。さらに、薄板解析では級数項を含む場合の次数低減積分法を研究して、簡便で精度のよい数値積分法を提案する。

**Keywords :** finite node-strip method, Mindlin element, reduced integration, thick and thin plate bending

## 1. まえがき

節点自由度と節線自由度を有する節点帯板法 (NSM) は、橋梁構造物のような長大薄肉構造を効率よく計算するために開発した解析法であり、有限要素法 (FEM) に比べて少ない自由度で全体解析を行うことができる<sup>1)~3)</sup>。しかし、これらの文献で開発した要素の形状は規則的なものであって、任意形状の板に適用することができない。そこで、本研究では、任意形状の厚板と薄板の節点帯板要素を開発する。

長方形の Mindlin 帯板要素を任意形状の要素に写像することは容易で、FEM と同じ手法を用いることができる<sup>4),5)</sup>。この厚板要素を薄板解析に適用するためには、FEM で一般的に使用されている次数低減積分法が考えられる。しかし、節点帯板要素では変位の一部の項（節線自由度）を級数展開するために、級数項ごとにその次数に応じた低減積分を行なう必要があり、さらに節点自由度と節線自由度の連成項を考慮すれば数値積分は一層繁雑になる。また、正弦関数などの固有関数は最適積分点数が不明確であるので、低減積分を行う場合には固有関数を級数項に用いることができない。

周知のように、有限帶板法 (FSM) は要素の長手方向に変位を級数展開した解析法で、Mindlin 帯板要素<sup>6)</sup>に低減積分法を用いて精度のよい薄板の曲げ解析が行われている<sup>7),8)</sup>。しかし、これらの研究では要素座標系に直交座標系を用いているので、長手方向と幅方向の積分を分離して、幅方向にのみ低減積分を行い、長手方向には級数項を解析的に積分する手法を用いることができるが、写像された曲線座標系では積分を分離することができない。このために、離散 Kirchhoff の手法を用いて任意形状の

帯板要素を定式化したが<sup>9),10)</sup>、次数低減積分法に比べれば数値計算の効率性は劣る。

変分原理に基づいて定式化される変位法では、解の精度や数値計算の効率にとって、変位場を規定する変位関数の選定が最も重要であることは言うまでもないことがある。そこで、過去に開発した FSM や NSM で用いた変位関数の力学的性状や精度を検討し、前述の問題点を解決するために、次のような改良した節点帯板要素を開発する。

- 1) 定式化の容易な Mindlin 要素を用いる。
- 2) 節線自由度の回転成分には、 $\theta_x$  の他に  $\theta_y$  を加える。
- 3) 要素の幅方向に、中間節点と中間節線を使用する。
- 4) 級数項には、次数の低い  $C^0$  級の多項式を用いる。
- 5) 薄板解析のための次数低減積分法を検討する。

FEM で用いられている Mindlin 要素<sup>5)</sup>は、たわみ  $w$  と回転角  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  を独立に補間するので定式化が容易であるとともに、要素境界での適合条件を容易に満たす長所がある。そこで、通常の FSM 解析では用いない節線自由度  $\theta_y$  を、本文では写像された節線上での適合条件を完全に満足させるために自由度に加える。また、 $\theta_y$  を用いることによって、曲線座標系におけるひずみの変換式が文献 9) で用いた式より簡単になる。なお、文献 6)~8) の Mindlin 帯板要素でも  $\theta_y$  が用いられているが、写像は行われていない。

FSM では長大要素を使用することができるが、幅方向には FEM と同等の要素分割が必要である。そこで、本研究では幅方向の応力分布、特に  $\sigma_y$  の精度を改善して要素分割を少なくするために、中間節点と中間節線を用いる。これによって、要素内の任意点の応力を、ガウス積分点での値から補間することなく直接精度の良い値を求めることができる。なお、中間節線を用いると全体剛性行列のバンド幅が広くなるが、縮約の手法によって事前にこれを消去することができる。また、節点の配置については過去の研究<sup>1)~3)</sup>で用いた 4 節点の節点帯板要素の

\*正会員 工博 長岡技術科学大学教授 工学部建設系

(〒940-21 長岡市上富岡町 1603-1)

\*\*正会員 工修 首都高速道路公団(研究当時・長岡技術科学大学大学院 建設工学専攻)



## (4) ひずみ成分

要素内の任意点の座標軸  $(x, y, z)$  方向の並進変位は Mindlin の仮定から次式で与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} u(x, y, z) = z\theta_y(\xi, \eta) \\ v(x, y, z) = -z\theta_x(\xi, \eta) \\ w(x, y, z) = w(\xi, \eta) \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (16)$$

したがって、ひずみ成分は次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x = z\frac{\partial\theta_y}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = -z\frac{\partial\theta_x}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = 0 \\ \gamma_{xy} = z\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y} - \frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right) \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (17)$$

ここで、非零のひずみ成分をベクトル  $\varepsilon$  で表わす。

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T \dots \dots \dots \quad (18)$$

上式の第  $i$  成分を  $e_i$  とすると、次式が得られる。

$$\left. \begin{array}{l} e_i = z\mathbf{b}_{0i}^T \mathbf{d}_0 + z \sum_m \mathbf{b}_{mi}^T \mathbf{d}_m \quad (i=1, 2, 3) \\ e_i = \mathbf{b}_{0i}^T \mathbf{d}_0 + \sum_m \mathbf{b}_{mi}^T \mathbf{d}_m \quad (i=4, 5) \end{array} \right\} \quad (19)$$

ここに、各ひずみベクトルは次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{b}_{01} = \mathbf{f}'_{03}, \quad \mathbf{b}_{02} = -\mathbf{g}_{02} \\ \mathbf{b}_{03} = \mathbf{g}_{03} - \mathbf{f}'_{02} \\ \mathbf{b}_{04} = \mathbf{g}_{01} - \mathbf{f}_{02} \\ \mathbf{b}_{05} = \mathbf{f}'_{01} + \mathbf{f}_{03} \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (20)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{b}_{m1} = X'_m \mathbf{f}_{13}, \quad \mathbf{b}_{m2} = -X_m \mathbf{g}_{12} \\ \mathbf{b}_{m3} = X_m \mathbf{g}_{13} - X'_m \mathbf{f}_{12} \\ \mathbf{b}_{m4} = X_m (\mathbf{g}_{11} - \mathbf{f}_{12}) \\ \mathbf{b}_{m5} = X'_m \mathbf{f}_{11} + X_m \mathbf{f}_{13} \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (21)$$

$$\mathbf{g}_{0i} = \frac{\partial \mathbf{f}_{0i}}{\partial y}, \quad \mathbf{g}_{1i} = \frac{\partial \mathbf{f}_{1i}}{\partial y} \dots \dots \dots \quad (22)$$

なお、プライムは  $x$  に関する微分を表わす。

## (5) 平衡方程式

式(19)を仮想仕事の原理に用いて、次の要素の平衡方程式が得られる。

$$\left. \begin{array}{l} [\mathbf{k}_{00}] \mathbf{d}_0 + \sum_n [\mathbf{k}_{0n}] \mathbf{d}_n = \mathbf{q}_0 + \mathbf{p}_0 \\ [\mathbf{k}_{m0}] \mathbf{d}_0 + \sum_n [\mathbf{k}_{mn}] \mathbf{d}_n = \mathbf{q}_m + \mathbf{p}_m \quad (m=1, 2, \dots) \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (23)$$

ここに、 $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_m$  は一般化変位に対する一般化力、 $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_m$  は等価節点および節線力であり、 $\mathbf{k}_{00}$ , etc. の剛性行列は次式のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{k}_{00} = \int \int [D_b \mathbf{B}_{00} + D_s \mathbf{S}_{00}] dx dy \\ \mathbf{k}_{0n} = \int \int [D_b \mathbf{B}_{0n} + D_s \mathbf{S}_{0n}] dx dy = \mathbf{k}_{n0}^T \\ \mathbf{k}_{mn} = \int \int [D_b \mathbf{B}_{mn} + D_s \mathbf{S}_{mn}] dx dy \end{array} \right\} \quad (24)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{B}_{k\ell} = \mathbf{b}_{k1} \mathbf{b}_{\ell 1}^T + \mathbf{b}_{k2} \mathbf{b}_{\ell 2}^T \\ \quad + \nu (\mathbf{b}_{k1} \mathbf{b}_{\ell 2}^T + \mathbf{b}_{k2} \mathbf{b}_{\ell 1}^T) + \lambda \mathbf{b}_{k3} \mathbf{b}_{\ell 3}^T \\ \mathbf{S}_{k\ell} = \mathbf{b}_{k4} \mathbf{b}_{\ell 4}^T + \mathbf{b}_{k5} \mathbf{b}_{\ell 5}^T \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (25)$$

$(k, \ell = 0, m, n)$

$$D_b = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_s = \frac{5}{6}Gt, \quad \lambda = \frac{1-\nu}{2} \dots \dots \dots \quad (26)$$

ここに、 $E$  はヤング係数、 $G$  はせん断弾性係数、 $\nu$  はボアソン比である。

$\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_m$  は、要素中央面上の領域  $A$  に作用する分布荷重  $q$  と、点  $(\xi_c, \eta_c)$  に作用する集中荷重  $P$  を考えると次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{p}_0 = \int_A q \mathbf{f}_{01} dA + P \mathbf{f}_{01}(\xi_c, \eta_c) \\ \mathbf{p}_m = \int_A q X_m \mathbf{f}_{11} dA + P X_m(\xi_c) \mathbf{f}_{11}(\eta_c) \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (27)$$

## 3. サブパラメトリック要素

パラメータ写像の手法を用いて任意形状の平板要素を求める。なお、この要素では、要素の形状を定める関数の次数より変位関数の次数の方が高いので、サブパラメトリック要素に属する。

サブパラメトリック要素では、 $(\xi, \eta)$  を要素内で正規化された曲線座標系とする。また、 $(x, y, z)$  を全体デカルト座標系とする。これらの座標間の写像関係式は、FEM で用いられる手法により次式で与えられる<sup>4)</sup>。

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i^*(\xi, \eta) x_i, \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i^*(\xi, \eta) y_i \dots \dots \dots \quad (28)$$

ここに、 $(x_i, y_i)$  は要素の位置を定めるための節点  $i$  の  $(x, y)$  座標値であり、写像関数  $N_i^*$  には 4 節点または 8 節点の Serendipity 要素の形状関数を用いる。

$x, y$  に関する微分は、式(28)より求められる 2 次元の Jacobi 行列  $J$  の逆行列を用いて次式で与えられる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \partial/\partial \xi \\ \partial/\partial \eta \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (29)$$

ここに、 $I_{ij}$  は  $J^{-1}$  の要素である。

式(29)を式(17)に用いると、サブパラメトリック要素における式(19)のひずみベクトルは次式のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{b}_{01} = I_{11} \mathbf{f}'_{03} + I_{12} \mathbf{g}_{03} \\ \mathbf{b}_{02} = -I_{21} \mathbf{f}'_{02} - I_{22} \mathbf{g}_{02} \\ \mathbf{b}_{03} = I_{21} \mathbf{f}'_{03} + I_{22} \mathbf{g}_{03} \\ \quad - I_{11} \mathbf{f}'_{02} - I_{12} \mathbf{g}_{02} \\ \mathbf{b}_{04} = I_{21} \mathbf{f}'_{01} + I_{22} \mathbf{g}_{01} - \mathbf{f}_{02} \\ \mathbf{b}_{05} = I_{11} \mathbf{f}'_{01} + I_{12} \mathbf{g}_{01} + \mathbf{f}_{03} \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (30)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{b}_{m1} = I_{11} X'_m \mathbf{f}_{13} + I_{12} X_m \mathbf{g}_{13} \\ \mathbf{b}_{m2} = -I_{21} X'_m \mathbf{f}_{12} - I_{22} X_m \mathbf{g}_{12} \\ \mathbf{b}_{m3} = X'_m (I_{21} \mathbf{f}_{13} - I_{11} \mathbf{f}_{12}) \\ \quad + X_m (I_{22} \mathbf{g}_{13} - I_{12} \mathbf{g}_{12}) \\ \mathbf{b}_{m4} = I_{21} X'_m \mathbf{f}_{11} + X_m (I_{22} \mathbf{g}_{11} - \mathbf{f}_{12}) \\ \mathbf{b}_{m5} = I_{11} X'_m \mathbf{f}_{11} + X_m (I_{12} \mathbf{g}_{11} + \mathbf{f}_{13}) \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (31)$$

プライムは  $\xi$  に関する微分を表わし、 $\mathbf{g}_{0i}, \mathbf{g}_{1i}$  は式(22)において  $y$  の代わりに  $\eta$  による微分を表わすものとする。

任意形状の厚板要素の剛性行列は、式(30), (31)を式(25)に用いて求められる。

表-1  $\eta$  に関する積分点数

Element	Exact	Reduced
6 Nodes	3	2
10 Nodes	5	4

表-2 積分方法と 3 項用いた 10 節点要素の例

No.	Integral Method	Bending		Shearing		Note
		$\xi$	$\eta$	$\xi$	$\eta$	
1	B00-S00	5	5	5	5	Exact
2	B00-S11	5	5	4	4	Selective
3	B00-S21	5	5	3	4	Selective
4	B01-S01	5	4	5	4	Reduced
5	B01-S11	5	4	4	4	Reduced
6	B01-S21	5	4	3	4	Reduced
7	B11-S11	4	4	4	4	Reduced
8	B11-S21	4	4	3	4	Reduced

#### 4. 次数低減積分法

本節では、薄板の曲げ解析を行うための次数低減積分法を検討する。

図-1 の 6 節点と 10 節点要素では、変位関数の  $\eta$  の次数は異なるが、式(24)の 3 つの剛性行列の  $\eta$  の次数はそれぞれの要素で同じである。また、変位関数の  $\xi$  の次数は両要素で同じであるが、3 つの剛性行列では異なる。これらのこと考慮して以下の低減積分法を考える。

まず、 $\eta$  に関して  $k_{00}$ ,  $k_{0n}$ ,  $k_{mn}$  は同じ多項式を用いているので、ガウス数値積分法による厳密積分に対して、積分点数を 1 つ少なくした表-1 の低減積分法を用いる。

次に、 $\xi$  に関して厳密積分を行うためには、それぞれの剛性行列に対して以下の積分点数が必要である。

$$k_{00}: \text{2 点}$$

$$k_{0n}: \begin{cases} (n+3)/2 \text{ 点} & (n=1, 3, 5, \dots) \\ (n+4)/2 \text{ 点} & (n=2, 4, 6, \dots) \end{cases}$$

$$k_{mn}: \begin{cases} (m+n+3)/2 \text{ 点} & (m+n=3, 5, \dots) \\ (m+n+4)/2 \text{ 点} & (m+n=2, 4, \dots) \end{cases}$$

これから、級数項を含む  $k_{0n}$ ,  $k_{mn}$  において、項数に応じた低減積分法を用いることは計算のアルゴリズムを複雑にし、数値計算の効率を悪化させる。そこで、剛性行列中の最高次数、すなわち  $m$  項まで採用する場合には、 $k_{mn}$  の次数に対する低減積分を用いることにする。

この方法では、各剛性行列において、項数(被積分関数の  $\xi$  の次数)に関係なく同じ積分点数を用いるので、低次の項では厳密積分になるためにせん断剛性を過大に評価する恐れがある。このために、低減次数を変化させた場合を検討する。また、せん断成分のみに低減積分を行う選択的積分法についても検討する。

以上のことから、本文では表-2 の 8 通りの積分手法を用いて、最適な方法を調べる。

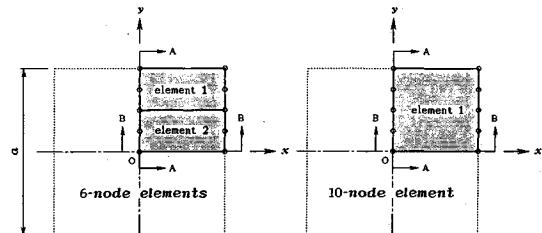


図-2 正方形板の要素分割

表-2 の積分方法の記号 B, S はそれぞれ式(24)の曲げとせん断に関する成分を表わし、2 桁の数字は  $\xi$  と  $\eta$  に関する低減積分を示す。すなわち、0 は厳密積分、1, 2 は最高次数の被積分関数の厳密積分に必要な積分点数から、1, 2 点少ない積分点数を用いたことを意味する。

表の中ほどの数字は、一例として 3 項( $m=3$ )用いた 10 節点要素の場合に、これらの積分方法による積分点の数を示したものである。6 節点要素の場合には、表-1 に示したように、 $\eta$  についての積分点数を 2 点少なくする。なお、表-2 の積分方法以外に、せん断の項について  $\xi$  のみ 3 点少ない方法(S31)についても計算したが、他の方法に比べて精度がかなり悪化したので省略する。

#### 5. 数値計算例

##### (1) 厚板解析

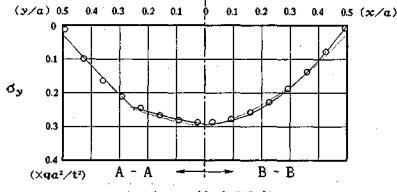
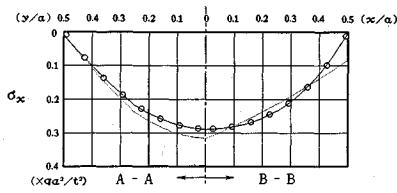
4 辺単純支持と固定支持の正方形厚板に満載等分布荷重  $q$  が作用する場合について計算する。

計算では対称性を考慮して  $1/4$  領域を解析するものとし、これを図-2 に示すように 6 節点要素では 2 要素、10 節点要素では 1 要素を用いて厳密積分を使用する。また、 $t/a = 0.2$  ( $a$  は辺長),  $\nu = 0.3$  とする。

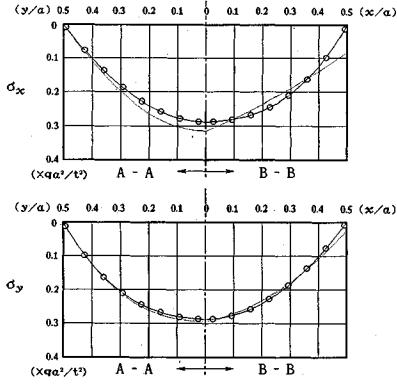
中心線 A-A, B-B 上の下面(引張)側の応力を FEM による値(8×8 分割の 8 節点 Serendipity 要素)と比較する。NSM では級数を 1 項と 3 項用いて、これらを以下の図では点線と実線で示す。また、○印は FEM 解である。なお、5 項用いた場合も計算したが、図上では 3 項の実線に一致したので省略する。

図-3 に単純支持板の応力を、図-4 に固定支持板の応力を示す。横軸は要素の中心点を原点とし、辺長  $a$  で無次元化した座標値である。これらの図から、6 節点要素の図(a)の A-A 線上の  $\sigma_y$  を除けば、3 項用いた NSM の値は FEM 解とよく一致していることが分る。また、たわみの精度は応力よりも良いので省略した。

ここで、図-2 の 2 つの要素分割では、計算に用いる全自由度数は同じであることから、6 節点要素より 10 節点要素の方が優れているといえる。上述の  $\sigma_y$  の精度が悪いのは、式(13), (15), (17) より要素の両端では  $\varepsilon_y$  に節線自由度が寄与しないことによる。以後の計算例では、精度のよい 10 節点要素のみを示す。

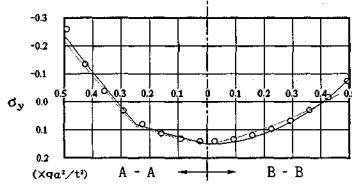
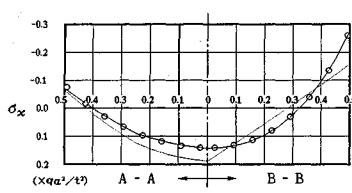


(a) 6 節点要素

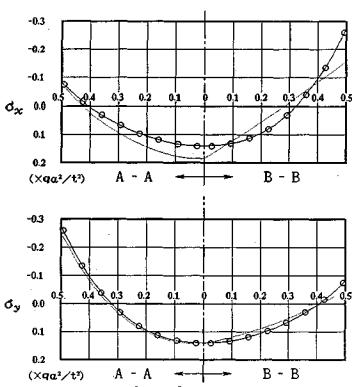


(b) 10 節点要素

図-3 単純支持板の応力

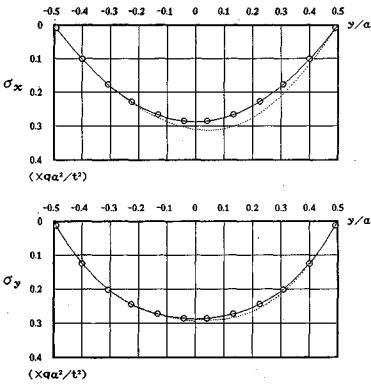
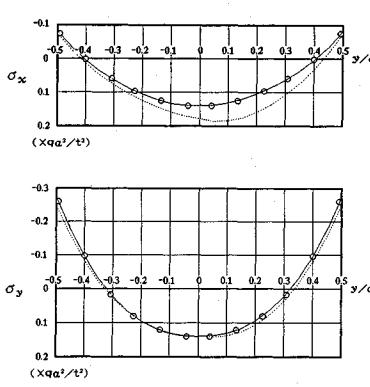


(a) 6 節点要素



(b) 10 節点要素

図-4 固定支持板の応力

図-6 単純支持板の応力 ( $\alpha = 15^\circ$ )図-7 固定支持板の応力 ( $\alpha = 15^\circ$ )

先の計算例において、正方形板の $1/2$ 領域を図-5のように角度 $\alpha$ で斜めに分割して計算する。 $\alpha = 15^\circ$ の場合の $y$ 軸上の応力を図-6, 7に示す。この場合でも3項用いた実線の計算値は○印のFEM解と良く一致している。

分割角度 $\alpha$ を $0, 5, 15, 30, 45$ 度とした場合の板の中心点Oにおけるたわみ $w$ と応力 $\sigma_x, \sigma_y$ のFEM解に対する誤差(%)を図-8に示す。計算値はすべて3項用いた値である。

単純支持板では、すべての値について誤差は1%以下

であり、固定支持板では応力の誤差が2~3%である。ここで $\alpha = 45^\circ$ の場合には、図-5の上側の要素は三角形になるので、この要素の片側の5個の節点は一点に重なり、5本の節線はこの点で交わったいびつな要素である。

次に、集中荷重 $P$ が図-5の中心点Oに作用する固定支持板について計算する。 $\alpha = 15^\circ$ の場合について、級数項を1, 3, 5項用いた値を図-9に示す。横軸は図-7と同じであり、5項の値を一点鎖線で表わす。 $\sigma_x$ は3項で収束していないが、 $\sigma_y$ は3項でほぼ収束している。

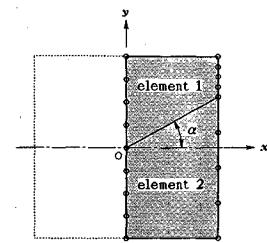
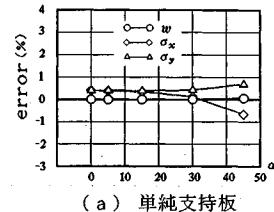
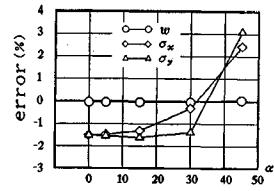


図-5 台形要素による分割



(a) 単純支持板



(b) 固定支持板

図-8 分割角度による誤差

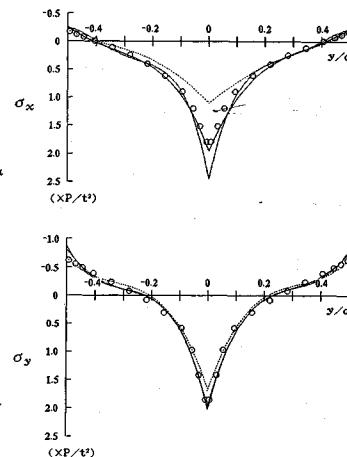


図-9 集中荷重による固定支持板の応力

表-3 単純支持板における積分手法の誤差 (%)

Meth.	$\sigma_x$			$\sigma_y$		
	S00	S11	S21	S00	S11	S21
B00	-4.08	0.757	0.294	-4.08	0.757	1.901
B01	—	0.787	0.242	—	0.784	1.881
B11	—	0.838	0.130	—	0.838	1.778

表-4 固定支持板における積分手法の誤差 (%)

Meth.	$\sigma_x$			$\sigma_y$		
	S00	S11	S21	S00	S11	S21
B00	-19.1	2.750	1.337	-19.1	2.750	8.374
B01	—	2.684	-0.522	—	2.690	7.937
B11	—	2.615	-1.333	—	2.615	7.352

表-7 単純支持板の誤差 ( $\alpha = 15^\circ$ )

Elem.	Meth.	$\sigma_x$			$\sigma_y$		
		S00	S11	S21	S00	S11	S21
1	B00	-2.586	-0.047	-0.572	-3.847	-0.385	0.438
	B01	—	-0.014	-0.615	—	-0.369	0.563
	B11	—	-0.012	-0.723	—	-0.353	1.108
2	B00	-2.114	0.041	-0.675	-2.276	-0.090	0.097
	B01	—	0.091	-0.803	—	-0.021	-0.062
	B11	—	0.101	1.198	—	0.022	-0.474

## (2) 薄板解析

薄板の曲げ解析に用いる次数低減積分法の精度を調べる。

まず、図-2の計算例において、 $t/a = 0.01$ ,  $\nu = 0.3$ とした場合の薄板を10節点要素を用いて計算する。計算結果は、解析解<sup>11)</sup>に対する相対誤差(%)で示す。

満載等分布荷重が作用する場合に、3項用いて求めた要素中央点の応力の誤差を表-3, 4に示す。負の誤差は、解析解よりも計算値の方が小さいことを意味する。

表より、曲げひずみエネルギーの積分手法(B00~B11)の違いによる差は少なく、せん断成分に対する積分手法による影響の大きいことが分る。表には示していない図-2の中心線A-AとB-B上の応力の誤差を調べると、S11の積分手法を用いた場合には単純支持板で最大3%, 固定支持板では応力の小さい点での5%の誤差を除けば3%以下である。一方、S21では単純支持板で最大5%, 固定支持板では表-4のような大きな誤差が生じていることから、せん断ひずみの項を $\xi$ ,  $\eta$ 方向とも1点ずつ低減した積分手法(S11)の方がよいといえる。

なお、厳密積分(B00-S00)を用いた場合には、同上の線上において単純支持板では最大-5.5%と比較的精度がよいが、固定支持板では-30%以上の誤差が生じる。

表-2に示したもう一つの積分手法(B01-S01)による誤差を表-5, 6に示す。また、高次項( $m = 5$ )を用いた場合の低減積分法の誤差も併せて示す。

B01-S01は級数展開した $\xi$ 方向には厳密積分を行い、幅方向にのみ低減積分を用いた手法で、Mindlin帶板要素の計算<sup>7)</sup>に用いられている。単純支持板では、3項用いた場合に表以外の応力で最大-4.5%，同じく固定支持板

表-5 単純支持板における積分手法の誤差 (%)

Terms	B00-S00		B01-S01		B00-S11		B11-S11	
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_x$	$\sigma_y$
1	-16.5	-13.8	-15.1	-9.27	17.01	6.249	17.40	6.307
3	-4.08	-4.08	-3.02	-0.39	0.757	0.757	0.838	0.838
5	-0.95	-3.22	0.150	0.504	0.146	0.521	0.147	0.519

表-6 固定支持板における積分手法の誤差 (%)

Terms	B00-S00		B01-S01		B00-S11		B11-S11	
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_x$	$\sigma_y$
1	-100.	-105.	-96.4	-93.8	71.68	30.70	73.02	21.78
3	-19.1	-19.1	-14.2	-1.66	2.750	2.750	2.615	2.615
5	-4.62	-14.9	1.167	3.095	0.234	2.647	0.324	2.687

表-7 固定支持板の誤差 ( $\alpha = 15^\circ$ )

Elem.	Meth.	$\sigma_x$			$\sigma_y$		
		S00	S11	S21	S00	S11	S21
1	B00	-11.40	-0.373	-2.664	-18.04	-1.160	0.188
	B01	—	-0.314	-4.228	—	-0.960	-0.138
	B11	—	-0.479	-4.618	—	-1.102	-0.069
2	B00	-8.817	-0.701	-2.668	-9.434	-2.254	0.177
	B01	—	-0.787	-4.474	—	-2.535	-0.958
	B11	—	-0.927	-5.427	—	-2.596	-2.767

では-20%以上の誤差が生じていることから、低減積分の効果があまりなく厳密積分に近い値が得られている。したがって、有限帶板法では有効な積分法も、自由度の異なる本解析法では用いることができず、 $\xi$ 方向にも低減積分を行う必要があることが分る。

次に、本解析法では級数項の最高次数のみに着目した低減積分法を用いているので、高次項を用いた場合の積分手法の妥当性を調べる。表-5, 6から、 $\sigma_x$ の収束性は良好であるが、 $\sigma_y$ にはそのような収束性が見られない。この理由として、厚板解析で述べたように、要素の端部では $\sigma_y$ に節線自由度が直接的に寄与しないことが考えられる。また、この性状は厳密積分を用いた $\sigma_y$ にも認められることから、積分手法による影響は少ないといえる。一方、せん断成分に低減積分を用いたS11の精度は全般的によいことから、本積分法は妥当な手法であるといえる。なお、 $\sigma_y$ の誤差を小さくするためには、幅方向に要素を分割すればよい。

サブパラメトリック要素における積分手法による誤差を調べるために、図-5の台形要素に等分布荷重が作用する場合について計算する。ここでも、 $t/a = 0.01$ ,  $\nu = 0.3$ とし、 $\alpha = 15^\circ$ の場合に3項用いたときの中心点Oの応力の誤差を表-7, 8に示す。この要素分割では要素境界上で応力は連続ないので、2つの要素から求められる点Oの応力の誤差を平均せずにそのまま示した。

台形要素を用いたことにより誤差は変化するが、積分手法による誤差について同じことがいえる。すなわち、曲げ成分に対する低減積分の影響は少なく、せん断成分に対してS11が全般的に精度がよい。また、y軸上と斜め分割線上の応力の誤差は、S11の手法を用いれば単純

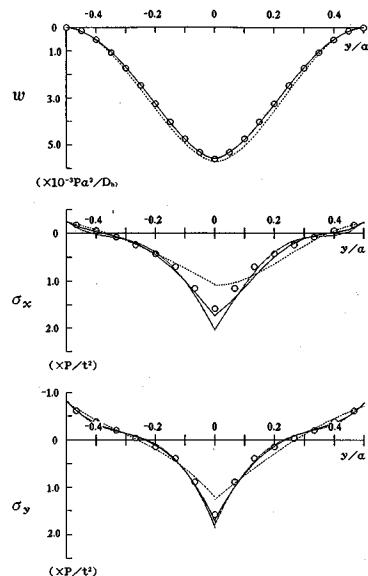


図-10 集中荷重が作用する周辺固定の正方形薄板の値

支持板で最大2.5%，固定支持板では固定端で-5.5%， $a/4$ 点近傍で-7%であった。固定支持板では正方形要素に比べてほぼ2倍の誤差が生じているので、応力の精度を改善するためには要素数を増やす必要がある。

同じサブパラメトリック要素に積分手法B00-S11を用いて、固定支持板の中心点Oに集中荷重Pが作用する場合のy軸上のたわみwと応力 $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ を図-10に示す。点線、実線、破線はそれぞれ1, 3, 5項用いた値であり、たわみの○印は解析解<sup>11)</sup>、応力の○印はFEM解である。たわみは3項で一致しているが、応力は5項用いても多少の誤差が認められる。

### (3) 低減積分法の適用範囲

板厚比の変化に応じた次数低減積分法の適用範囲を調べるために、満載等分布荷重が作用する図-2の厚板解析に低減積分法を用いる。

積分手法には薄板解析で精度のよいS11の方法を使用し、3項用いた6節点要素(△印)と10節点要素(○印)による中心点Oの応力 $\sigma_x$ の誤差を、厳密積分による誤差と比較して図-11に示す。

単純支持板では、低減積分法による精度は厳密積分に比べて若干悪いが、その誤差は0.5%程度増加するだけである。固定支持板では積分手法によって差があり、6節点要素ではB11-S11, 10節点要素ではB00-S11の精度が最もよくて、厳密積分よりも誤差の小さいことが分かる。最も精度のよい10節点要素のB00-S11に着目すると、要素内の他の点での応力の誤差は厳密積分による誤差と大差なく、また $\sigma_y$ の誤差についても同様のことがいえる。

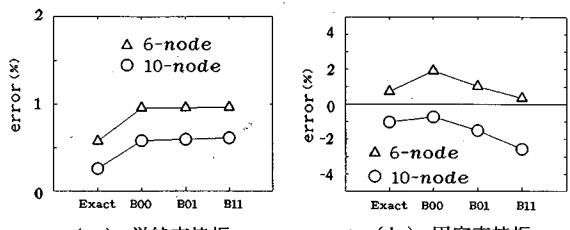
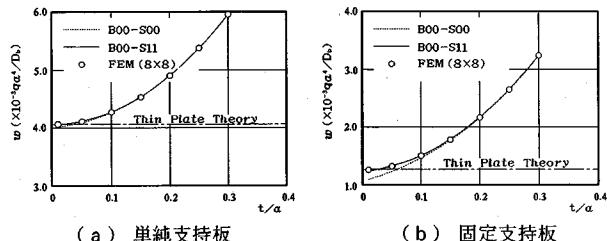
図-11 低減積分による厚板応力 $\sigma_x$ の誤差

図-12 選択的積分法による平板の最大たわみ

さらに、数値計算の効率を考慮すると、厚板解析においても低減積分は有効であり、特に10節点要素においては、選択的積分法B00-S11は厚板と薄板解析に共通して適用できる汎用的な積分法であるといえる。なお、薄板解析のみに限定すれば、さらに積分点数を少なくしたB11-S11の方法が計算効率の点で優れている。

次に、積分法B00-S11の汎用性を確認するために、板厚比を0.01~0.3まで変化させたときのたわみの誤差を調べる。たわみの誤差は応力の誤差の1/10以下であるので、図-11で最も精度が悪い6節点要素にB00-S11を用い、かつ、図-5の台形要素( $\alpha = 15^\circ$ )に分割した場合の中心点Oのたわみの値を図-12に示す。

図中の点線は厳密積分による値で、薄板領域では解析解<sup>11)</sup>よりも計算値は小さいが、選択的積分を用いた値は、すべての板厚比について○印のFEM解とよく一致していることが分かる。

ここで、本解析法の効率を検討する。まず、厚板解析でNSMによる計算結果の検証のために用いたFEM解析では、十分な精度が得られるように8×8要素分割(全自由度数は576)を用いているので、等分布荷重による単純支持板( $t/a = 0.1$ )の中心点のたわみと応力はMindlin理論による厳密解と有効数字の範囲内で一致している。

3項用いた10節点のNSM要素(48DOF)による図-2の正方形板の最大たわみの誤差は、 $t/a = 0.01 \sim 0.3$ の単純支持板について0.02%以下である。FEMでも同じ計算例について0.5%の誤差で最大たわみが求められているか<sup>12)</sup>、1節点5自由度の要素を用いて6×6要素分割(204DOF)を行っているので、本解析法の方が全自由度数が少ない。

また、Mindlin帶板要素では $t/a = 0.01$ と0.1の単純

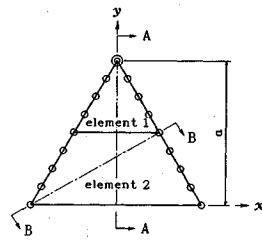


図-13 三角形板

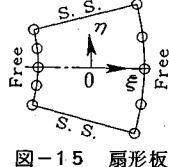


図-15 扇形板

支持板の計算で、最大たわみの誤差が0.2%以下の値を求めるのに、9項(非零項は5項)までフーリエ展開して3要素を用いている<sup>7)</sup>。この文献では、中間節線の数により3種類の帶板要素が用いられているので、それらの全自由度数はそれぞれ45, 90, 135になる。ただし、数値計算では三角関数の直交性を用いている。

以上のように、精度と全自由度数の比較から、本解析法は計算効率のよいことが分る。次に、解法の汎用性を調べるために計算例を示す。

#### (4) 三角形板

満載等分布荷重  $q$  が作用する周辺単純支持の正三角形薄板について計算する。10節点要素を2要素用いて図-13のように分割し、級数は3項、積分にはB00-S11を用いて、 $\nu = 0.3$ とする。図の三角形要素では節線が1本退化して、三角形の頂点は特異点になる。

断面A-AとB-B上のたわみ  $w$  と応力  $\sigma_x$  の計算値を図-14に示す。横軸は断面A-A上の  $y$  座標値であり、断面B-Bでは頂点の座標値を  $y/a = 1$  として示した。上述の特異点近傍の応力を除けば、たわみと応力は実線の解析解<sup>13)</sup>とよく一致している。

#### (5) 扇形板

相対する2辺が自由で他の2辺で単純支持された図-15の扇形板<sup>14)</sup>に満載等分布荷重が作用する場合を計算する。薄板の形状は中心角が30度で、中央円弧長( $\eta$ 軸上)と幅が同一寸法である。板のポアソン比は0とする。

ここでは、1要素の10節点要素で計算することにし、積分にはB00-S11を用いる。級数に1項と3項用いた場合の  $\xi$  軸上のたわみと  $\eta$  軸方向の応力  $\sigma_\theta$  の解析解<sup>14)</sup>に対する相対誤差を表-9に示す。1行目の数値はその座標値である。本計算例では、1項でよい値が得られている。半径方向の応力  $\sigma_r$  は  $\sigma_\theta$  の  $1/10$  以下と小さいので<sup>14)</sup>、 $\sigma_r$  の相対誤差は  $\sigma_\theta$  の10倍以上になる。 $\sigma_r$  の精度を上げるために、高次の級数項を用いるよりも、要素を分割する方が効果がある。

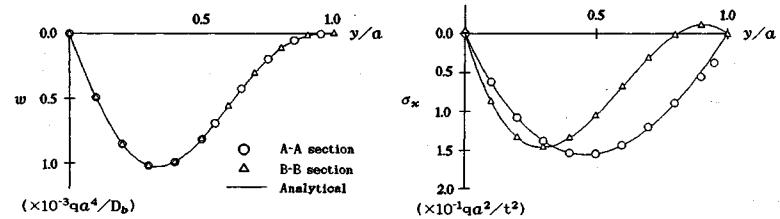


図-14 三角形板のたわみと応力

表-9 扇形板の中心線上のたわみと応力の誤差(%)

	Terms	-1.0	-0.75	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	0.75	1.0
$w$	1	-0.031	0.589	1.462	1.168	0.376	-0.421	-0.785	-0.628	0.464
	3	0.025	0.198	0.394	0.251	-0.014	-0.216	-0.163	0.079	-0.088
$\sigma_\theta$	1	-1.702	-0.072	1.545	0.919	0.153	-0.781	-1.571	-2.448	-2.280
	3	0.120	0.088	0.904	0.080	-0.499	-1.026	-1.324	-1.734	-1.213

## 6. 結論

Mindlin要素を用いた節点帯板法について以下のこと がいえる。

(1) 変位関数を改良して、精度のよいMindlin節点帯板要素を開発した。

(2) 特に10節点要素では、1要素で3項用いれば厚板要素内の応力を精度よく求めることができる。

(3) 級数項を含む剛性行列の次数低減積分法を研究し、薄板から厚板まで適用できる積分法(B00-S11)を提案した。

(4) 種々の形状の薄板解析によって、本解析法の汎用性を示した。

節点帯板法は大型構造物の全体解析を効率よく行うための実用的解法であり、要素内の応力を数パーセントの誤差で求めることを目標として、できるだけ要素分割数の少ない解析法を研究した。本解析法は長大構造物に適用してその効率性が活かされるものであり、プログラムを拡張して確認したい。

本研究で用いたプログラムの開発において、当時大学院生であった小林亨市君(現・(株)CRC総合研究所)に負うところが大きい。記して謝意を表する。また、文部省科学研究費の援助を受けたことを付記する。

## 参考文献

- 1) 笹戸松二・林 正・中嶋学夫・中島一朗：節点帯板法による薄肉構造物の解析、JSSC 第9回構造工学における数値解析法シンポジウム論文集、pp.103~108、1985.
- 2) 笹戸松二・林 正：節点帯板法による補剛円筒殻の解析、同上、pp.109~114、1985.
- 3) 渡辺 力・林 正・平 正和：節点帯板法によるプレートガーダー橋の立体解析、第44回年次学術講演会講演概要集、I-107、1989.
- 4) Zienkiewicz, O. C. (吉謙雅夫・山田嘉昭監訳)：マトリックス有限要素法、三訂版、培風館、1984.

- 5) Hinton, E. and D. R. J. Owen (川井忠彦監訳) : 有限要素法プログラミング, 丸善, pp.127~146, 1979.
- 6) Benson, P. R. and E. Hinton : A thick finite strip solution for static, free vibration and stability problems, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.10. pp.665~678, 1976.
- 7) Oñate, E. and B. Suarez : A comparision of the linear, quadratic and cubic Mindlin strip elements for the analysis of thick and thin plates, Computers & Structures, Vol.17. No.3, pp.427~439, 1983.
- 8) Oñate, E. and B. Suarez : A unified approach for the analysis of bridges, plate and axisymmetric shells using the linear Mindlin strip elements, Computers & Structures, Vol.17. No.3, pp.407~426, 1983.
- 9) 林 正・坂田 敦・西谷雅弘 : サブパラメトリック帯板要素による薄板の曲げ解析, 土木学会論文集, No.398, pp.217~225, 1988.
- 10) 林 正・藤井政美 : 縮約変位関数による離散 Kirchhoff 帯板要素の一般的定式化, 土木学会論文集, No.410, pp.257~265, 1989.
- 11) Timoshenko, S. P. and S. Woinowski-Krieger : Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill, pp.105~228, 1959.
- 12) Pryor, C. W., R. M. Barker and D. Frederick : Finite element bending analysis of Reissner plates, Proc. of ASCE, Vol.96, No. EM6, pp.967~983, 1970.
- 13) 前出 11), pp.313~314.
- 14) 芳村 仁 : 曲線直交異方性扇形平板の曲げについて, 土木学会論文集, No.82, pp.1~10, 1962.

(1992. 3. 31 受付)

## MINDLIN NODE-STRIP ELEMENTS FOR THE BENDING ANALYSIS OF THICK AND THIN PLATES

Masa HAYASHI and Takaki SAKAGUCHI

In this paper, two new thick node-strip elements based on Mindlin's plate theory are presented for the bending analysis of thick and thin plates with arbitrary shape, which involve 6 or 10 nodal points and 3 or 5 nodal lines, respectively. The displacement functions of the nodal points are written as ordinary two-dimensional finite elements with interpolation functions of polynomials and the functions of the nodal lines are expressed by products of interpolation functions and a polynomial series. In Mindlin's theory deflection and rotations are independent variables, and therefore, these polynomials satisfy  $C_0$  continuity. Furthermore, reduced integration techniques are investigated for thin plate bending, and a simple and efficient intergration scheme for plates of a wide range of thickness/span ratios is proposed by the numerical results.