

**投稿論文(和文)
PAPERS**

多相系材料の一平均化手法

小畠 誠*・後藤芳顯**・松浦 聖***

非一様な材料の機械的な性質を知るための方法はいくつかの方法が考えられる。そこで重要となるのは非一様材料のモデル化の方法である。ここで提案するのはいくつかの相からなる材料についての場合で、自己無撞着法的な考え方と2相系に対する周期構造モデルを用いた考え方とを組み合わせたものである。またこれは2相系に対する周期構造のモデルの一つの一般化を示したものもある。簡単な数値計算例を用いて自己無撞着法との予測の比較を行った。

Keywords : self-consistent method, periodic structure model, averaging method

1. はじめに

土木材料を含めた多くの材料が不均一な微細構造を持つものであることは周知である。ここで不均一とは単に異なる材料の混合と云う意味だけではなく、亀裂や空隙なども含めて指す。比較的大きな尺度で捉えれば鉄筋コンクリートは最も多く用いられているものであり、やや小さな尺度では土やコンクリートそのものもそうである。さらに小さな尺度を用いれば、均一に見える鋼材さえも様々な介在物や結晶粒の集合体である。良く知られているように材料としての限界状態（破壊状態）は微視構造に敏感に支配されるために、それを論じるときには、微視的な尺度でこのような不均一性を直接的に取り扱うことが不可避となる。その一方、通常に行われている破壊にまではいたらない範囲での構造解析には、不均一性が問題とならない尺度（巨視的尺度）で考えるのが普通である。したがってこの尺度で材料を捉えた場合の、不均一材料の挙動、言い替えれば平均的な挙動を知ることも工学上は重要な問題である。

巨視的尺度から見た不均一材料の性質を記述することは単に土木工学においても深く関心を持たれてきたことである。また他の工学の分野でも、これに関しては様々な試みがなされてきている。（例えば文献1）の詳細なレビュー）そしてこれらは材料の力学の分野に限って見ても多数みることができるが、特に本論文に関連するものとして既に敷衍されてきた方法である自己無撞着法^{3)~4)}やあるいは周期構造法^{5),6)}などがある。

自己無撞着法は無限に広がる均質な母材（マトリクス）中の精円体介在物中の場がある場合に非常に単純な形で

与えられることにもとづいたユニークで興味深い方法である。2相系の材料で考えた場合は介在物の体積比率がそれほど高くない場合に想定する力学モデルに近くなると考えられる。一方周期構造法では母材中に介在物が周期的に配置しているとき、場の解が級数解として与えられることを用いた方法である。自己無撞着法と異なり介在物の配置にある程度の規則性が認められる場合には有効な方法と考えられる。そして介在物の幾何学的要素の選択に自由度があるため材料のより現実的なモデル化が可能である。人工的に設計された複合材料を解析するような場合には有利な方法であるとも言えよう。今、多相系の材料を考えたときに、上の二つの方法のうち自己無撞着法はそのまま適用可能であるのに対し、周期構造モデルの適用にはいくつかの可能性がある。もちろん基本となる考え方自体は直接的に多相系の材料に単純に拡張することも可能であるが、それが効率的な方法か否かは未だに考察を要する問題であると考える。そこで本論文では、多相系の材料に周期構造法を適用するひとつ的方法を提案する。

2. 多相系での平均化の考え方

以下ベクトルやテンソルは表記法による無用の混乱を避けるために適宜、シンボリックな表現とデカルト座標系での成分を添字を付けて表現とを使いわけている。また特にことわらないかぎり総和規約を用いている。また応力、ひずみなどの尺度は変形の前後を区別しない微小変位・変形の範囲で記述している。

(1) 平均化の考え方

考へている多相系材料がそれぞれ体積比率 f_m ($m=1, n$) を持つ n 相から構成されているものとし、第 n 相では応力とひずみの関係が次のように表されているものとする。

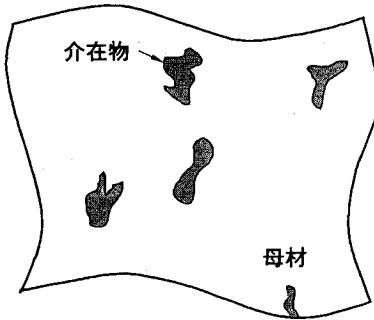
$$\sigma_{ij} = f_m^m \epsilon_{ijkl} \epsilon_{kl} \dots \quad (1)$$

* 正会員 Ph.D. 名古屋工業大学助教授

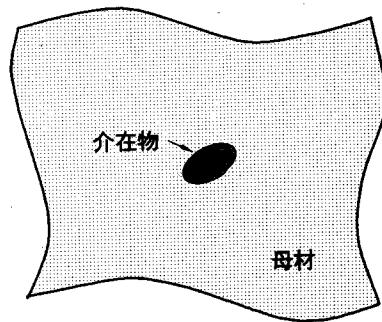
(〒466) 名古屋市昭和区御器所町

** 正会員 工博 名古屋工業大学教授

*** 正会員 工博 名古屋工業大学教授



図一1 2相系材料



図一2 自己無着法のモデル

目的は対象とする代表長が材料の不均一さに比べて十分大きいとしてこの材料全体の平均応力と平均ひずみの関係

$$\sigma_{ij}^0 = \mathcal{F}_{ijkl} \varepsilon_{kl}^0 \dots \quad (2)$$

を求ることである。ここで平均応力、ひずみあるいはその増分などの量は次のように体積平均として定義される。

$$\sigma_{ij}^0 = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(\vec{x}) d\vec{x}, \quad \varepsilon_{ij}^0 = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(\vec{x}) d\vec{x} \dots \quad (3a, b)$$

通常の意味では、平均応力と平均ひずみは観測する尺度での応力あるいはひずみと考えて良い。この式を変形し各相ごとの平均量で表すと

$$\sigma_{ij}^0 = \sum_m \frac{V_m}{V} \frac{1}{V_m} \int \sigma_{ij} d\vec{x} = \sum_m f_m \langle \sigma_{ij} \rangle_m \dots \quad (4)$$

となる。ここに $\langle \cdot \rangle_m$ は第 m 相での体積平均を示すものとする。式(4)にさらに式(1)を用いることにより

$$\mathcal{F}_{ijkl} \varepsilon_{kl}^0 = \sum_m f_m \mathcal{F}_{ijkl}^m \langle \varepsilon_{kl} \rangle_m \dots \quad (5)$$

が得られる。したがってここでもし何らかの方法で全体としてのひずみの平均 ε_{ij}^0 と各相単位でのひずみの平均と $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_m$ との関係を例えれば

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_m = A_{ijkl}^m \varepsilon_{kl}^0 \dots \quad (6)$$

のようく表すことができれば目的である \mathcal{F}_{ijkl} は次のように求めることができることになる。

$$\mathcal{F}_{ijkl} = \sum_m f_m \mathcal{F}_{ijpq}^m A_{pqkl}^m \dots \quad (7)$$

ただし式(3)により

$$\sum_m f_m A_{ijkl}^m = I_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} \dots \quad (8)$$

δ_{ij} はクロネッカのデルタである。ここで式(7)は近似を含まない厳密な表現である。つまり、ひとつの基本的な流れとして多相系材料の全体的な挙動を求める問題は式(6)をどのような手法で求めるかと云うことに帰着させて考えることができることになる。そして以下の議論はこの考えにしたがって進めていく。

(2) 多相系での方法

式(6)の具体的な表現を求めるためにここでは、自己無着法と周期構造のモデルを出発点として考えることにする。そこでまず基本となる2相系の場合について述べる。2相系の材料の場合の周期構造のモデルの適用と、その定式化については数値計算も含めて非常に詳細にわたって示されている文献5)のものに準ずることにする。ここで2相系としては図一1のようなものを想定し、図にあるようにそれぞれの相を母材と介在物と呼ぶこととする。

変形が生じたとき、介在物と母材との剛性あるいはコンプライアンスの違いにより応力、またはひずみの擾乱が生じるわけであるが、それを均一な剛性を持つ材料中に仮想的に分布させたひずみ $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ によって生じるものとみなす。すなわち介在物の中では次の偏微分方程式が成立する。

$$\mathcal{F}_{ijkl}^I (\varepsilon_{kl}^0 + \tilde{\varepsilon}_{kl}) = \mathcal{F}_{ijkl}^M (\varepsilon_{kl}^0 + \tilde{\varepsilon}_{kl} - \varepsilon_{kl}^*) \dots \quad (9)$$

添字 I, M はそれぞれ介在物、母材に関する量を示すものであり、 $\bar{(\cdot)}$ は平均値からのずれである。式(4)の表現を考えると剛性の異なる介在物がなければ場は一様であるから $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ は ε_{kl}^* によって惹起されたものとみなすことができる。したがって介在物と母材に関して通常の境界値問題を設定しそれを解けば与えられた ε_{kl}^* に対して $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ を得ることが可能である。このための具体的な境界値問題を設定するために様々な数学モデルを用いることになる。例えば自己無着法では、無数にある介在物の代表として一様無限体のなかに埋め込まれた一個の楕円体を想定する(図一2)。そして一様無限体は2相系材料の全体としての平均的な剛性(これを求めるのが目的)を有するものとする。電磁気学では言うにおよばず弾性論においてもこのモデルに対しては厳密解が比較的単純な形で求めることができるためである⁷⁾。また図一1に対して図一3のようなモデルを考える周期構造法では結果が級数解で与えられると云う幾分の煩雑さとひきかえに介在物の形状などには大きな自由度が与えられることになる。そして同時に介在物間の相互作用も直接的に考

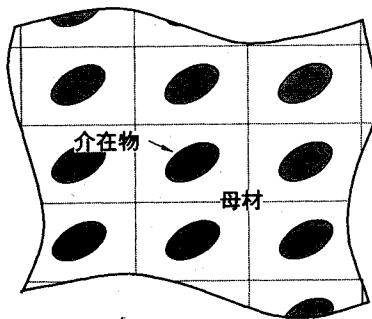


図-3 周期構造法のモデル

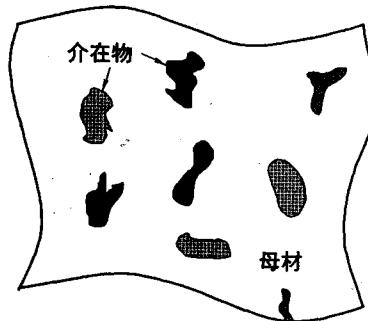


図-4 多相系材料その 1

慮することができる。しかも数値計算の道具が発達した現在では計算の少しばかりの繁雑さは大きな障害とはならない。

$$A_{ijkl} = [I_{ijkl} - J_{ijmn}(\mathcal{F}_{mnkl}^M - \mathcal{F}_{mnkl}^I)]^{-1} \dots \dots \dots \quad (12)$$

が得られる。そして介在物の体積含有率を f とすると式(7)から、2相系材料の全体としての剛性が次のように得されることになる。

ただし自己無撞着法ではモデル化した図-2での母材は求めるべき2相系全体としての平均化された剛性を持つものとしておりかつ介在物一個に対してはその体積比率は0なので式(13)自体はトリビアルな表現であり、それぞれの相を介在物とみなして得られる A_{ijkl} に対して式(7)を用いることになる。

このように一様化された母材と一個の介在物と言う数学モデルの設定により自己無撞着法では介在物間の相互作用を陰な形で処理しているのに対して、周期構造法ではそれを陽な形で考慮しているとも考えられる。そのため自己無撞着法では介在物の体積比率が大きく介在物間の相互作用が大きいと思われる場合には図-2のようなモデル化自体の正当性に疑問が生ずることになる。事実2相系材料に対する文献5)の結果もそれを示唆している。そこで本研究では周期構造のモデルを用いて介在物間の相互作用をなるべく陽な形で取り扱うことを念頭におく。2相系周期構造のモデルを用いる方法は基本的には図-4のように複数の相からなる介在物を含むモデルに対しても適用可能であり、そのことは文献5)にも簡単に触れられているが、ひとつの場合として例え図-5のようなものを考えたときには効率の良い方法となり得るかについては必ずしも明らかではない。そこで、

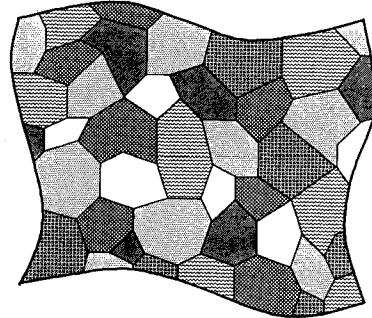


図-5 多相系材料その 2

ここでは自己無撞着法的な仮定を導入することによって多相系の場合に拡張することを提案する。

まず体積比率 f_m の第 m 相に関する J_{ijkl}^m を求めるためには図-3のような一様な母材と介在物からなる2相系の周期構造モデルを用いる。ただし2相系の場合は母材の剛性は既知であり、自己無撞着法では母材は求めるべき平均化された剛性を持つものであったのに対し、ここでは介在物である第 m 相以外の材料の平均化された剛性 \bar{J}_{ijkl}^m を持つものとする。 \bar{J}_{ijkl}^m は式(7)と式(8)あるいは式(13)より

$$\bar{\mathcal{F}}_{iikl} = (\mathcal{F}_{iiba} - f_m \mathcal{F}_{iirs} A_{rsb}^m) (I_{bakl} - f_m A_{bakl}^m)^{-1} \dots (14)$$

で与えられる。もちろん \mathcal{F}_{ijk} や A_{ijkl}^m は最初から与えられるわけではないので自己無撞着法の定式化と同じように式(14)以下はすべて陰な表現である。図-3の単位要素については周期境界条件を満たしていると言う以外には介在物の形状や単位要素内の位置などには制約はない。このモデルに対する式(9)の解のひとつの表現としてはフーリエ級数を用いた解法により

$$\langle u_{i,j} \rangle_i = \mathcal{F}_{lkmn}^{\overline{m}} f \sum \frac{\xi_j \xi_i N_{ik}}{D} \\ \times \frac{1}{V_i} \int_V e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{x} \frac{1}{V_l} \int_V \varepsilon_{mne}^* e^{-i\vec{\ell} \cdot \vec{x}} d\vec{x} \dots \dots \quad (15)$$

と表すことができる⁸⁾。上式で自然対数の底 e の指数部にある i は虚数単位であって添字ではない。また

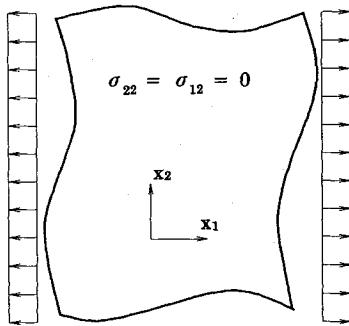


図-6 一軸引張り

であり、式(16)では i について総和規約による和はとらない。 l_i は x_i 方向に関する周期である。 N_{ij} , D はそれぞれ行列

の η 余因子と行列式である。式(15)の積分を評価するためには ε_{ijkl} の介在物内の分布を知る必要があるが一般にはこれは未知である。文献5)には球状の介在物の場合について様々な ε_{ijkl} の分布による検討を行っており、 ε_{ijkl} を一定と見なすことによる全体の平均的挙動にあらわれる差は非常に少なく、このような仮定が著しく精度を損ねるものではないことを明らかにしている。介在物の形状や材料定数の影響も無論あると考えられるが、ここでは簡単のために単純に ε_{ijkl} を一定と見なすことにする。すると結局 J_{ijkl} は次のような級数として与えられることになる。

$$J_{ijkl}^m = f \sum \frac{(\xi_j \xi_l N_{ik} + \xi_i \xi_l N_{jk})}{2D} B^+ B^- \quad \dots \dots \dots (18a-c)$$

$$B^+ = \frac{1}{V} \int, e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{x}, B^- = \frac{1}{V} \int, e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{x}$$

この級数には介在物の剛性は含まれていないので、この収束性は母材の剛性 \mathcal{F}_{rig} と介在物の形状のみに依存する。介在物の形状に関して言えば、極端に特異なものでなければ収束性は悪くない。

このようにして仮定した全体の \mathcal{F}_{ijkl} に対し各相について A_{ijkl}^n を式 (12, 14, 18) より求める。ただしこのようにして得られた A_{ijkl}^n は、一般には式 (8) を満たさない。これは自己無撞着法で基本となる橢円体介在物が相似形でないと仮定した場合にも生じる問題である。そこで文献 4) を参考に次のようにして正規化することにして、それを改めて A_{ijkl}^n と表すこととする。

式(7, 8, 14, 19)すべてに矛盾のない \mathcal{F}_{ijkl} が求めるものである。もちろんこの正規化の方法は唯一では無く、その物理的な意味は不明確である。ただし正規化しない

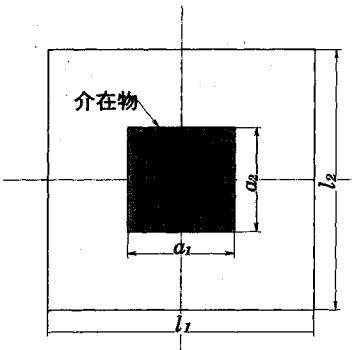


図-7 周期構造の基本要素

A_{ijkl} が式 (8) を大きくはずれるもので無ければ、得られた結果に対する式 (19) による正規化そのものの影響は小さいはずである。

本論文で提案する方法は、本来不均一と見なされる母材を均一なものと見なすと云う点では自己無撞着法的である。しかしながら周期構造モデルを導入することにより、自己無撞着法が陰な形でしか考慮していると思われる介在物間の相互作用をいくらか陽な形で算定することができる。この意味では本方法は自己無撞着法の拡張とも考えることができる。また、周期構造法を導入したことにより自己無撞着法とは異なり、仮定の上では単位構成要素の幾何学的形状は橿円体である必要はなくなり、かつ、図-5のような多相系材料に周期構造法を適用した場合の複雑さからも逃れることができる。すなわち周期構造法にその基本をおきながら自己無撞着法と類似した方法と捉えることができる。以下、ここに提案する方法を GP(Generalized Periodic) 法と略記することにする。

3. 数値計算例

(1) 解の収束性など

多相系の全体挙動を扱わなければならない場合は実際の材料では多岐にわたるものと思われ、それぞれにおいて工学的意義の深い例もあると考えられる。本論文では、本研究で提案する GP 法の特徴を端的に捉えることを目的とし、ひとつの典型的な場合として疑似多結晶モデルの一軸引張り下での弾塑性変形を例に取って考える。

(図-6). そしてここでは簡単のために2つの独立したすべり面を持つ平面モデル^⑨を取りあげ数値計算例を示すことにする。このような疑似多結晶体では一つ一つの構成要素である単結晶の性質は同一であるが、強い塑性異方性を持っているので多結晶体としての塑性挙動を考えることは多相系の材料の全体挙動を考えることと等価になる。しかも全体のひずみあるいは応力の変化により刻々と各相の剛性が変化すると言う興味深い例である。

表-1 J の収束性

(a) $F_{12z}/F_{111}=0.5 \quad F_{21z}/F_{111}=0.25$			(b) $F_{12z}/F_{111}=0.71 \quad F_{21z}/F_{111}=0.20$			(c) $F_{12z}/F_{111}=0.935 \quad F_{21z}/F_{111}=0.0968$					
f	0.050	0.150	0.250	f	0.050	0.150	0.250	f	0.050	0.150	0.250
$\epsilon_{40,30}$	0.007405	0.005184	0.004782	$\epsilon_{40,30}$	0.007552	0.005309	0.004893	$\epsilon_{40,30}$	0.008595	0.005929	0.005335
$\epsilon_{50,40}$	0.004880	0.003071	0.002861	$\epsilon_{50,40}$	0.004982	0.003146	0.002928	$\epsilon_{50,40}$	0.005681	0.003517	0.003198
$\epsilon_{60,50}$	0.003696	0.002064	0.001905	$\epsilon_{60,50}$	0.003776	0.002116	0.001952	$\epsilon_{60,50}$	0.004315	0.002365	0.002132
$\epsilon_{70,60}$	0.002531	0.001514	0.001362	$\epsilon_{70,60}$	0.002586	0.001550	0.001393	$\epsilon_{70,60}$	0.002957	0.001737	0.001523
$\epsilon_{80,70}$	0.001647	0.001172	0.001020	$\epsilon_{80,70}$	0.001686	0.001204	0.001043	$\epsilon_{80,70}$	0.001928	0.001349	0.001141
$\epsilon_{90,80}$	0.001309	0.000936	0.000793	$\epsilon_{90,80}$	0.001338	0.000959	0.000814	$\epsilon_{90,80}$	0.001532	0.001075	0.000888
$\epsilon_{100,90}$	0.001206	0.000751	0.000633	$\epsilon_{100,90}$	0.001235	0.000769	0.000633	$\epsilon_{100,90}$	0.001415	0.000862	0.000710

2. で示した方法は弾性体を基本として展開しているが、構成方程式(2)を応力増分とひずみ増分の関係に読み替えることにより多相系材料の塑性挙動に適用することができる。次に基本的な構成要素の幾何学的な設定については図-7のようなものにする。これについては数値計算上の多少の有利不利を別にすれば設定はまったく自由であり、またそれぞれの相での形状を相似にとる必要もない。そして自己無撞着法と異なり基本形状をなめらかな精円体にする必然性もなく、むしろ現実に近く計算の容易な矩形(直方体)のものを用いることとする。すると式(18b,c)の積分の具体的な表現は次のようになる。

$$B^+ = B^- = \frac{4}{(\xi_1 a_1)(\xi_2 a_2)} \sin \frac{\xi_1 a_1}{2} \sin \frac{\xi_2 a_2}{2} \dots \dots \dots (20)$$

具体的な数値計算例にはいる前に、まず図-7に示す基本となる2相系での式(18a)の収束性をいくつかの種類の弾性率を持つ母材について確認する。ただし周期性平面問題であるので級数は p_1, p_2 に関しての2重級数として考えることになり $-M \leq p_1, p_2 \leq M$ の範囲で考えた。範囲を p_1 と p_2 で等しくとったのは単位要素と介在物とともに正方形としているからである。正方形の単位要素に縦横比の大きいスリット状介在物がある場合では J_{ijkl} の収束性に対する p_1 と p_2 の範囲の影響は当然異なる。母材の弾性率については本研究で用いた疑似多結晶体の平面モデルの解析中に現れる接線剛性程度と思われるものを参考に決めた。結果は表-1にまとめて示す。 x_1 方向に一軸引張りを想定したとき(a), (b), (c)の順に剛性が下がっていることに相当する。表中の収束を表す指標は次式で定義している。

$$\epsilon_{m,n} = \sqrt{\frac{(J_{pqrs}^{(m)} - J_{pqrs}^{(n)}) (J_{pqrs}^{(m)} - J_{pqrs}^{(n)})}{J_{ijkl}^{(m)} J_{ijkl}^{(n)}}} \dots \dots \dots (21)$$

ただしこの式で $J_{ijkl}^{(m)}$ は $M=m$ としたときの値を表すものとする。介在物の体積比率がこの程度であれば、およそ $M=70\sim80$ まで級数をとれば0.1%前後まで収束させることができることがわかる。なお級数の収束性については単純に和を取っていく他にも加速法を用いて効率を上げることも可能である。

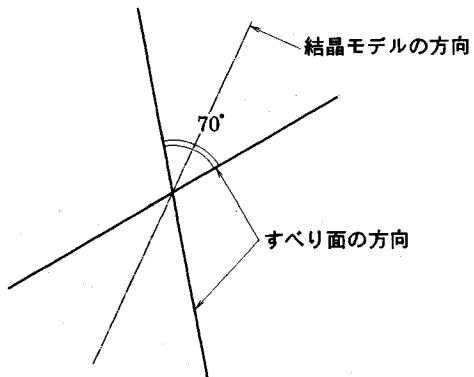


図-8 結晶モデル

また表からわかるように介在物の形状と体積比率が同じであれば、ここに示している意味で母材の剛性が下がるほど J_{ijkl} の収束性は悪くなる。一方、母材の剛性を固定すれば介在物の体積比率が小さい方が収束性が悪い。体積比率が非常に小さくなると、その解は無限体中に埋め込まれた一個の介在物に対するものに漸近していくので、考え方自体として周期構造モデルを適用するより、自己無撞着法を用いる方が有利になることは容易に予想される。また表の範囲には入っていないが収束性は体積比率が極端に大きくなってしまっても、容易に予想できるよう再び悪化する。もっとも2相系でそう云った場合は2相のうちどちらを母材として取るかという選択の問題でもある。

2.の定式化でも明らかなように A_{ijkl} を求める上で J_{ijkl} を得ることが多相系の材料の全体的な挙動を知る上での鍵となり、そして応用の立場からは J_{ijkl} の求めやすさが重要である。各種の J_{ijkl} の求め方は対象とする多相系材料の性質にも依存していることに注意しなければならないことになる。

(2) 単位構成要素の構成方程式

ここで用いた2個の独立したすべり系を持つ結晶塑性モデル(図-8)の構成方程式は次のとおりである。詳細については例えば文献4,9などに見られるので結果のみを示した。これらは基本的には通常の流れ則弾塑性構成方程式と同じ考え方で導くことができる。

$$\mathcal{F}_{ijkl} = \mathcal{L}_{ijkl} - \sum_{\alpha, \beta} M^{\alpha\beta} \mathcal{L}_{ijmn} p_m^\alpha p_n^\beta \mathcal{L}_{pqkl} \dots \quad (23)$$

ここで α, β はすべり面方向のせん断応力 τ が次の条件を満たすもののみを表す。

\mathcal{L}_{ijkl} は等方弾性テンソルでありヤング率 (E) とポアソン比 (ν) を用いると

$$\mathcal{L}_{ijkl} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij}\delta_{kl}$$

$$+ \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \dots \dots \dots \quad (25)$$

となる。また $M^{\alpha\beta}$ は次の逆行列である。

$$N^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} + p_{ij}^\alpha \mathcal{L}_{ijkl} p_{kl}^\beta \dots \quad (26)$$

$h^{\alpha\beta}$ は加工硬化を表すもので次の二つの場合を考えた.

$$h^{\alpha\beta} = h, \quad h^{\alpha\beta} = h \operatorname{sech}^2 \left(\frac{h\gamma}{\tau_V^S - \tau_V^0} \right) \dots \quad (27a, b)$$

式 (27a, b) でそれぞれを線形硬化則、非線形硬化則と呼ぶこととする。線形硬化則では剛性の変化は区分線形的であり、全体挙動の変化も区分線形的となるが、非線形硬化則では硬化が変形にも影響するために全体挙動への影響は複雑になる。 τ_y^0 , τ_y^p はそれぞれすべり面上での初期および飽和せん断力を示しており γ はすべりの総量を表している。テンソル p_y^0 は単結晶モデルの幾何学的な量のみによって決まるものである。

以下の計算に用いた材料定数については次のとおりである。

$$\text{非線形硬化: } h/\tau_Y^0 = 4, \tau_Y^s/\tau_Y^0 = 1.5 \dots \dots \dots \quad (29b)$$

なお、式(7, 8, 14, 19)を満たす \mathcal{F}_{ijkl} は逐次代入によって求めた。そして式(18)の級数計算においては項数は収束させた状態で $M=80$ とした。

(3) 各相の体積比率が小さい場合

まず不均一材料が同定度の体積比率を持ち多くの相か
らなる場合について考える。先にも述べたように疑似多
結晶モデルでは、一つ一つの構成要素自体の性質は同一
であるが、強い塑性異方性のために弾塑性挙動を考える
ときには多相系材料の全体挙動を扱うことになる。した
がって同じ方向を持つ結晶を一つの相としてみなすこと
ができる。そこでまず体積比率が同じで 12 個の別々の
方向を持つ多相系材料について考える。方向については
図-8 に示す結晶の方向と引張り軸である x_2 軸となす
角度を ϕ として $\phi = 5, 20, 35, 50, 65, 80, 100, 115, 130,$
 $145, 160, 175$ (deg.) とした。図-8 のモデルは 180° 回
転対称であるので、この設定であっても軸 x_1 方向の引
張りに対しては x_1 軸に関する対称性は保たれる。

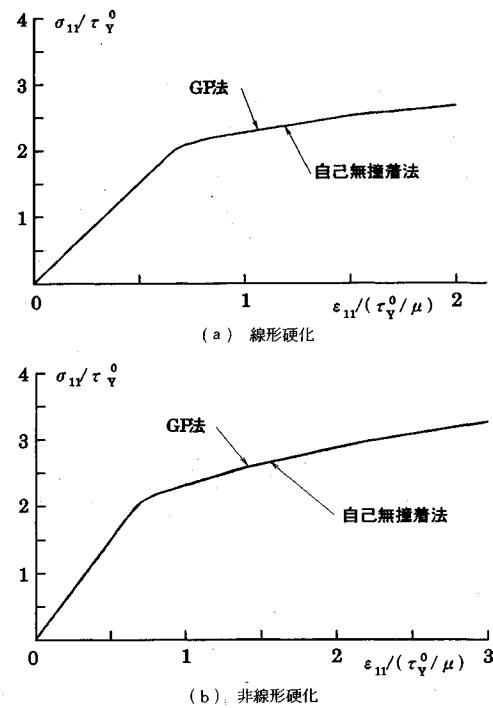
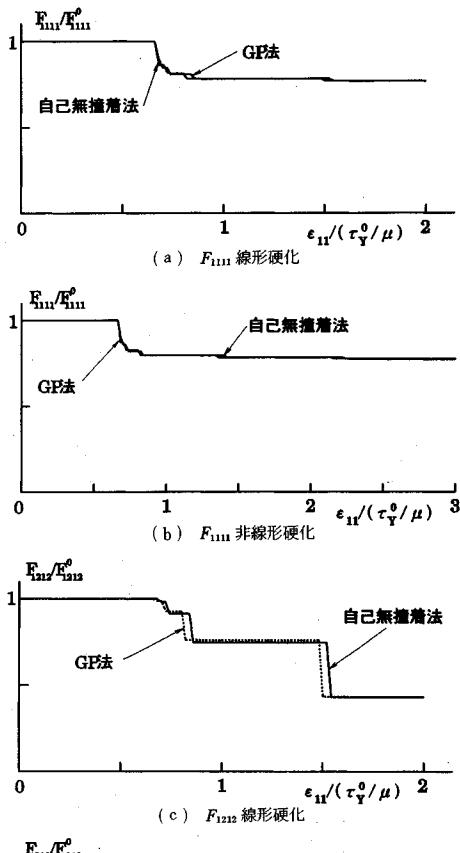


図-9 応力ひずみ関係(12方向モデル)

図-9は応力ひずみ曲線をそれぞれの加工硬化則について自己無撞着法との結果と比較して表したものである。以下では応力は初期せん断降伏応力 (τ_0^s) で無次元化、ひずみは τ_0^s/μ で正規化して表している。ただし μ はせん断弾性係数 ($\mu = E/2(1+\nu)$) である。図で明らかなように硬化則にかかわらずほとんど自己無撞着法と一致することを示している。図では識別しにくいが、わずかではあるが GP 法の方が剛な挙動を示している。一つの相の体積比率は $1/12$ であるがこのように比較的小さい場合には同じ相との間に生じる相互作用も小さくなるので設定された数学モデルそのものも、相互作用をそれほど重視してないと思われる自己無撞着法との解に当然接近することが予想される。果たして実際に自己無撞着法の解への接近の度合いは非常に早く一つの相の体積比率が $1/12$ 程度で図-9に見えるほど小さくなることになる。これは単に体積比率が小さい場合、種々の平均化の方法が一致した予測をすることに対応していると思われる¹⁰⁾。またここで用いた形状や ε_{ijkl} の分布などの仮定の下での GP 法の妥当性を示すものである。また一相あたりの体積密度のより低い本来の多結晶に対する自己無撞着法は非常に合理的で十分な精度の解を与えていることを予想させるものである。図-10(a)～(e)には \mathcal{F}_{ijkl} の成分の初期値からの変化について自己無撞着法との比較を示している。これを取ってみてもそれぞれの相で塑性すべりが生じ始め剛性が変化する点そのも

図-10 F の成分の変化 (12方向モデル)

のには多少の差はあるものの、剛性そのものの値では自己無撓着法との差は全般に非常に少ない。前章でも述べたように GP 法では式 (12) で定義される A_{ijkl}^n が自己無撓着法のように式 (8) を自動的には満たさない。そのため式 (19) で定義される正規化を行っているわけであるが、図-11 にどの程度式 (8) からずれるのかをプロットした。縦軸は次式で定義した量である。

$$\varepsilon = \sqrt{(C_{ijklm} - I_{ijkl})(C_{ijkl} - I_{ijkl})}$$

図からわかるように式 (8) から大きくずれることはなかった。したがってこの場合では正規化するための式 (19) の影響はそれほど大きくなかったことになる。

(4) 各相の体積比率が小さくない場合

次に相の数が少なく、一相あたりの体積比率がやや大きい場合を考えてみる。この場合は各相の体積比率が大

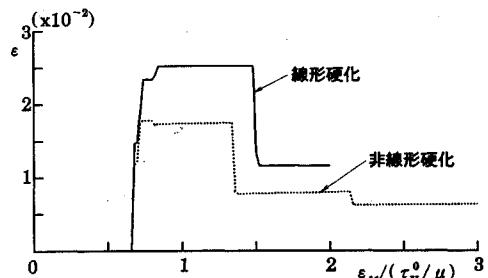
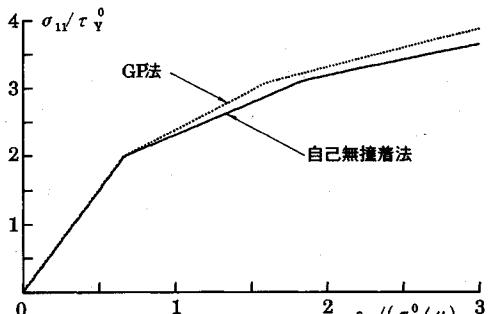
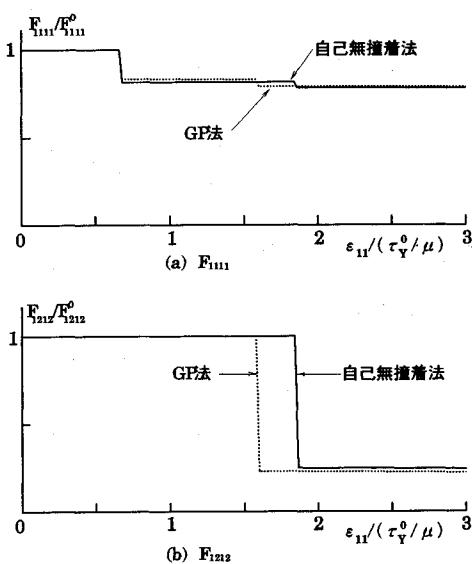
図-11 A の正規性 (12 方向モデル)

図-12 応力ひずみ曲線 (4 方向モデル)

図-13 F の成分の変化 (4 方向モデル)

きいので GP 法が用いる図-3 のような数学モデルの設定が説得性をもち、相互作用の影響が顕在化するものと考えられ、GP 法の特徴を捉えやすい場合である。例としては $\phi = 40, 80, 100, 140$ (deg.) の 4 個の別々の方向を向いた多相系材料に対し同じく一軸引張りをとりあげた。ひずみ硬化の係数や数値計算の条件などはすべて先ほどの例と同じにとってある。非線形硬化の場合について結果を図-12, 13, 14 に示した。

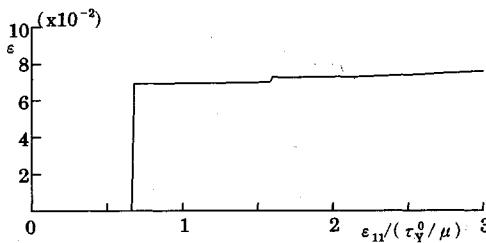


図-14 Aの正規性(4方向モデル)

応力ひずみ曲線図-12では自己無撞着法との相違は明確にあらわれている。この場合でも12方向の例と同様に一軸引張りに対し自己無撞着法よりも全体に大きな剛性を予測している。一軸引張りでひずみを増加させていくと、まずある特定の方向を持った結晶で塑性すべりが生じその部分の剛性が低下する。結果として大きな剛性を持つ母材のなかに剛性の非常に小さい介在物が含まれる状態になる。2相系の場合ではあるが類似の剛性的設定で周期構造モデルによる方法が自己無撞着法よりも大きな継剛性(\mathcal{F}_{1111})を予測することは文献5)でも見られており、周期構造モデルに基づく本研究の方法も同様の傾向を示したものと考えられる。この例では12方向の場合と異なり \mathcal{F}_{ijkl} の成分の比較でも \mathcal{F}_{ijkl} の値が変化するひずみの大きさだけではなく \mathcal{F}_{ijkl} そのものの値でも大きな差が出ている(図-13)。なお、ここに現れた差はモデル化によるものであり、その優劣は直接的な数値解法など他の方法で論ずるべき問題であろう。

(文献11)。そして図-14に表した A_{ijkl} の正規性であるが先ほどの体積比率の小さい場合よりは大きくずれている。しかしそれでも絶対的な値そのものはまだ依然として小さいレベルにあり、最終的な解にそれほど重大な影響はないものと推定できる。なお、級数の項数を増やしてもこのずれは0でない値に収束する傾向を見せるので、それは打ち切り誤差によるものではない。この点については今後より合理的な取り扱いが必要であると思われる。

4. おわりに

本論文では、多相系材料の平均化された性質を推定するひとつの方法として、周期構造モデルを用いた方法に自己無撞着法的な考え方を導入するGP法を提案した。この方法では自己無撞着法がそのモデル化において母材を一様とみなすことによって放棄した同相の介在物間の相互作用の直接的な考慮を周期構造モデルの考えによって取り入れることにある程度成功している。したがつて、相の数が少なく1相あたりの体積比率の比較的大きい場合には、本論文の方法と自己無撞着法による結果とははっきりとした相違が見られた。そして、相の数が多く

一相あたりの体積比率が小さいような場合には結果は自己無撞着法のそれに漸近する。事実、簡単な数値計算例でも、1相あたりの体積比率が比較的小さい場合には自己無撞着法による結果と非常に近い結果を予想した。これは他の平均化の手法にもあてはまる結果にも対応するものである。

最後に弾塑性変形問題をあつかう場合に重要な有限変形問題について触れておくと、GP法の有限変形問題への拡張は直接的である。通常の幾何学的変化を考慮することに加えて基本的には構成方程式として第1種ビオラ＝キルヒホフ応力の増分(\dot{N}_{ij})と速度勾配(L_{ij})との関係を考え、2.で示した定式化において応力とひずみを N_{ij} と L_{ij} に置き換えて考えればよい。

不均一材料の平均的な性質を予想する問題ははじめにも述べたように興味深い問題であり、すでに多くの結果が得られている。本論文による結果は特に1相あたりの体積比率が大きい多相系材料の問題に対して有効な手段を提供する可能性もあるものと考えられる。

参考文献

- 1) Hashin, Z. : Analysis of composite materials, J. Applied Mechanics, Vol.50, pp.481~505, 1983.
- 2) Hill, R. : Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals, Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol.11, pp.89~101, 1965.
- 3) Hutchinson, J.W. : Elastic-plastic behavior of polycrystalline metals and composites, Proc. Roy. Soc. Lond. A319, pp.247~272, 1970.
- 4) Iwakuma, T. and Nemat-Nasser, S. : Finite elastic-plastic deformation of polycrystalline metals, Proc. Roy. Soc. Lond. A394, 87~119 1984.
- 5) Nemat-Nasser, S., Iwakuma, T. and Hejazi, M. : On composites with periodic structure, Mechanics of Materials, Vol.1, pp.239~267 1982.
- 6) 堀宗郎, 三浦尚: 周期構造モデルの基本的性質, 構造工学論文集, 36A, pp.353~362, 1990.
- 7) Eshelby, J.D. : The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems, Proc. Roy. Soc. Lond., A241, pp.376~396, 1957.
- 8) Mura, T. : Micromechanics of defects in solids, Martinus Nijhoff, The Hague, 1982.
- 9) 小畑誠, 奥田純三, 後藤芳顯, 松浦聖, 結晶塑性モデルによるき裂先端近傍の弾塑性解析, 土木学会論文報告集, No.422 I-14, pp.235~243, 1990.
- 10) Christensen, J. : A critical evaluation for a class of micromechanics models, Journal of Mechanics and Physics of Solids, 38, 379~404, 1990.
- 11) 小畑誠, 奥田純三, 後藤芳顯, 松浦聖, 直接法による自己無撞着法の精度の推定, 土木学会論文報告集, No.450 I-20, pp.103~112, 1992.

(1991.11.15受付)

AN ADVANCED AVERAGING TECHNIQUE FOR MULTI-PHASE MATERIALS

Makoto OBATA, Yoshiaki GOTO and Sei MATSUURA

It is an important and interesting problem to obtain averaged mechanical behaviors of multi phase composite materials. We propose an advanced averaging technique for three or more phase materials. The new technique, which we call Generalized Periodic (GP) method, borrows basic idea from two different existing schemes, a periodic structure and a self consistent method. The GP accounts for the interaction among the same phase inclusions by the model of periodic distributions, while the homogeneity of surrounding inhomogeneous matrix is assumed. Simple numerical examples show the character of GP method. GP's character is appreciable when the number of phase is relatively small and each volume fraction is large. On the other hand, when the number of phases increases, the GP's estimation of averaged behavior rapidly gets close to that of the self consistent method.