

トンネルのA計測変位を用いた覆工応力推定法

久武勝保*・村上敏夫**

トンネル覆工の安全性を評価するために、建設現場で日常的に行われるA計測変位から、覆工の応力、ひずみ、変位、外力をパソコンレベルの計算で推定する新しい逆解析手法を提案した。また解析精度に及ぼす外力のモード、変位計測点数、計測位置などの種々の影響について検討し、提案手法の妥当性を示した。本手法では、未知外力のモードを仮定する必要はなく、また相対変位が利用できる。計測変位の数が未知外力数に比べてはるかに少ない場合においても、工学上十分な精度が確保される点に特徴があり、現場適用に特にふさわしい手法であるといえる。

Keywords : back analysis, tunnel, lining stresses, convergence, field measurements

1. 緒 論

近年、地盤工事に際しては、施工中の構造物及び地盤挙動を計測し、それを逆解析することより、施工の妥当性をチェックしたり、得られた結果を以後の設計・施工にフィードバックする手法が採用されるようになって来た。特に、山岳トンネルにおいては、施工前の地質調査には限界があるため、このような逆解析手法は非常に有効な手段であると認識されている。

トンネル建設では、地山の支持能力を有効に発揮させると共に、トンネルを安全に建設する必要がある。そのためNATMでは、地山荷重はできるだけ地山自身で持たせるが、しかし地山に発生するひずみは最大強度発揮時のひずみ以下にとどめる必要があり、またその確認を現場計測により行う事が期待される。このような上記の考えで覆工建設を終了した後においても、当然の事ながらトンネルの安全を確保する必要があるが、この場合、高価なボーリングを行って地山のひずみを計測し、地山の安定性を評価したとしても必ずしも十分ではなく、覆工自身の安定性の評価が不可欠である。なぜなら、仮にトンネル建設後に地山が限界状態に達していたとしても、覆工に十分な余力があれば、トンネルは安定を保つと考えられるし、逆に、地山が限界状態に至っていないとしても、覆工の耐荷力不足により過度の応力やひずみが覆工に生じておれば、トンネルは安定とは考えられないからである。即ち、トンネルの安全性の確認において、覆工の安定性評価は不可欠であるといえる。

一方、多くのトンネル工事現場では日常的にA計測が行われるが、しかしその結果から覆工の応力やひずみが推定されるのはまれであり、計測に要する時間・費用

が有効に活かされているとは言い難い実状にある。その原因は、A計測のような少ない変位数から覆工の応力、ひずみ状態を精度よく推定する逆解析手法が開発されていないことに起因している。このような逆解析手法の開発は、現在、A計測が工事現場に十分浸透している実状や、その計測頻度・時間・費用の多さから考えると、急務の研究課題であると言える。

本研究は、上記の認識から、通常行われるトンネルA計測程度の変位を用い、覆工の応力、ひずみ、変位、外力を逆解析してトンネルの安定性を評価する新しい逆解析手法を提示し、その妥当性を検討したものである。

従来、トンネル覆工の力学量の逆解析手法については逆定式化法が採用されており、例えばKovari¹⁾らのアーチ状支保工の外荷重算定手法、及びスプライン関数を用いたHisatake・Ito²⁾の2次元及び3次元の覆工応力推定法がある。しかし、覆工外面に作用する未知外力の数は通常、トンネル内壁での計測変位数に比べてはるかに多いため、必要な逆解析精度を確保するには計測変位数を多くせざるを得なく、従って時間的・経済的理由から、これら手法が日常的な計測ルーチンに採用されないのが普通である。一方、従来の直接定式化法を用いた逆解析手法の開発も容易でない。それは分離した岩盤が偏圧として覆工に作用したり、あるいは覆工と地山との間に間隙が存在する場合でも、覆工外面に作用する地圧分布の形状をあらかじめ仮定する必要があるけれども、しかしこれを精度良く仮定するのは困難であるためである。

本研究では、A計測程度の少ない数の変位を生じさせる覆工外力の組み合わせは無数にあるが、その中から、(A)覆工外面に作用する外力の自乗和が最小である解、及び(B)外力により覆工に与えられるエネルギーが最小である解、を理論的に見つけ出して、覆工の応力、ひずみ、変位、外力を推定する新しい逆解析手法を示す。また覆工に種々の外力が作用する場合について、2次元有限要素

* 正会員 工博 近畿大学助教授 理工学部土木工学科
(〒577 東大阪市小若江 3-4-1)

** 正会員 (株)地崎工業 技術開発室

素法 (FEM) による数値シミュレーションを行い、両手法の精度について考察を加える。これら手法では、覆工外力のモードを仮定する必要はなく、また計測変位数に制限はない。極言すれば2点の変位からでも覆工応力の推定は可能であり、また相対変位が利用できるという利点がある。A計測程度の入力変位数でも工學上十分な精度が確保されるため、現場適用³⁾に特にふさわしい手法であると言える。

2. 逆解析手法のFEM定式化

(1) 概 説

覆工内面節点での測定変位成分数 N_u と覆工に作用する外力の成分数 N_f が、 $N_u \geq N_f$ という条件下では、外力及び未知節点変位の解を一意的に求めることができる²⁾が、しかしこの条件を満足させるのは現実的でない。また、精度向上のために要素分割を細かくすればする程、この条件は満足されにくくなる。そこで、たとえこの条件を満足しなくても、工學的に十分満足ゆく精度の近似解が得られる方法が見つかれば好都合である。以下ではそのような方法⁴⁾の定式化を提案する。

(2) 外力自乗和最小化法

トンネルA計測では N_u は、 N_f よりもはるかに小であるが、このような場合でも、理論的な拘束条件を与えることにより唯一解を得ることができる。

今、 u 、 f 、 K を FEM の節点変位、節点力、剛性マトリックスとして、覆工の剛性方程式を以下のように表しておく。

$$\begin{Bmatrix} f^* \\ f_i \\ f_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^* \\ u_i \\ u_0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、添え字 $*$ 、 i 、 0 は以下の通りである、
 $*$: 覆工内面節点の内、計測される節点
 (u^* =既知、 $f^*=0$)、
 i : 外力の作用しない節点 (ただし上記節点を含まない)
 (u_i =未知、 $f_i=0$)、
 0 : 外力の作用する節点 (u_0 =未知、 f_0 =未知)、
 式(1)において、 u_i を消去し、また $f^*=0$ 、 $f_i=0$ を考慮すれば、

$$0 = H_{13}u_0 + F_1^* \dots\dots\dots (2)$$

$$f_0 = H_{33}u_0 + F_3^* \dots\dots\dots (3)$$

ここで

$$H_{13} = [K_{13} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{23}], F_1^* = [K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21}]u^*$$

$$H_{33} = [K_{33} - K_{32}K_{22}^{-1}K_{23}], F_3^* = [K_{31} - K_{32}K_{22}^{-1}K_{21}]u^*$$

式(2)を満足させる u_0 の組み合わせの内、外力の自乗和が最小になる組み合わせを求めるには、変数 u_0 、 λ (未定係数) に関する次式の F^2 を最小にすればよい。

$$F^2 = f_0^T f_0 - \lambda^T (H_{13}u_0 + F_1^*) \dots\dots\dots (4)$$

すなわち、式(3)の f_0 を上式に代入した後、これを u_0 、 λ でそれぞれ偏微分して0と置くと、

$$2A_{33}u_0 + 2b_3 - H_{13}^T \lambda = 0 \dots\dots\dots (5)$$

$$H_{13}u_0 + F_1^* = 0 \dots\dots\dots (6)$$

ここで、

$$A_{33} = H_{33}^T H_{33}$$

$$b_3 = H_{33}^T F_3^*$$

式(5)、(6)を解けば

$$u_0 = -A_{33}^{-1}b_3 + A_{33}^{-1}H_{13}^T [H_{13}A_{33}^{-1}H_{13}^T]^{-1} \cdot (H_{13}A_{33}^{-1}b_3 - F_1^*) \dots\dots\dots (7)$$

$$\lambda = 2[H_{13}A_{33}^{-1}H_{13}^T]^{-1} (H_{13}A_{33}^{-1}b_3 - F_1^*) \dots\dots\dots (8)$$

式(7)を式(3)に代入することより覆工に作用する節点外力が求められる。また、式(1)の第2式を変形して得られる次式

$$u_i = -K_{22}^{-1} [K_{21}u^* + K_{23}u_0] \dots\dots\dots (9)$$

に式(7)を代入して u_i が得られる。以上より、全ての変位が既知となったので、ひずみ-変位関係式、応力-ひずみ関係式から、覆工のひずみ、応力が算出される。

(3) エネルギー最小化法

覆工に与えられるエネルギーEGは次式で表され、

$$EG = f_0^T u_0 - \lambda^T (H_{13}u_0 + F_1^*) \dots\dots\dots (10)$$

この場合も上記と同様にして、全ての力学量が求められる。

以下では、偏圧荷重を含む種々の荷重パターンのもとで、計測変位数、計測位置等と逆解析覆工応力の精度の関係について、種々考察することとする。

3. 提案逆解析法の検証及び考察

切羽に近接した位置での覆工応力は、3次元的に分布するが、しかし、切羽から十分離れた位置でのトンネル横断面内の覆工応力、地圧は、その横断面を平面歪状態とした2次元状態で近似できる。また、現場でのA計測では、トンネル横断面内でのコンバージェンスが測定されるので、以下では2次元平面歪状態の弾性覆工を対象とする。

まず、覆工モデルと覆工外面に作用する荷重モデルを仮定し、順解析により変位および最大せん断応力をあらかじめ計算しておき、それを真値とみなす。次に、上記で得られた覆工内面変位のうち幾つかをトンネル計測値とし、これを本逆解析法に入力して変位と応力を求め、これと先程の真値とを比較・検討することとする。荷重条件を **Fig.1** に、覆工モデルを **Fig.2** に示す。また、トンネル内面での変位計測は、**Fig.3** に示す様に計測点(図中●で示す)数の異なる9種類のタイプで実施されるものとし、1計測点につき鉛直、水平の2変位成分が得られるものとする。なお、本手法の適用において、覆工の

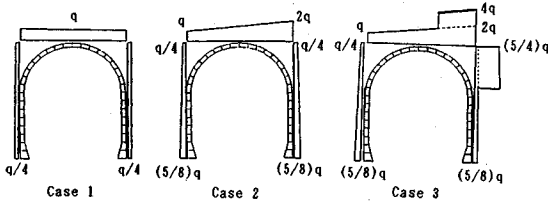


Fig.1 Loading conditions ($q=2 \text{ tf/m}^2$)

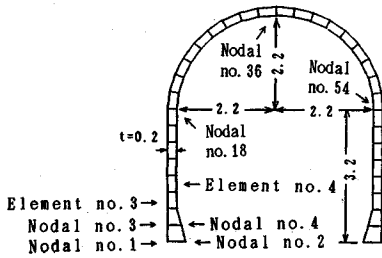


Fig.2 Lining model (unit : m)

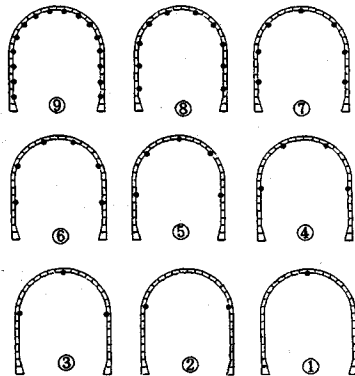


Fig.3 Types of displacement measurement

材料定数の値に制約はないので、以下では弾性係数は $1.0 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$ 、ポアソン比は 0.15 とした。

(1) 変位の検討

Fig.4 は、荷重ケース 2, 3 の場合において、変位計測点数が 3 点のときの逆解析変位と真値を比較して示したものである。ただし、これらは図に示す解析結果のうち、絶対値の最大値で無次元化しており、その最大値は図中に示している（以下の図においても同様）。また、図中の F^2_{min} 、 EG_{min} はそれぞれ、外力自乗和最小化法、エネルギー最小化法の結果である。これより、入力変位点数が 3 点の場合でも、十分な精度で変位を推定できる事が理解できる。また、入力変位点を 3 点以上に増やすと、当然の事ながら Fig.4 以上の良好な精度が得られた。これより、外力がどの様であっても変位計測点数が 3 点あれば、いずれの逆解析法においても、変位を十分な精度で推定できる事がわかる。

(2) 応力の検討

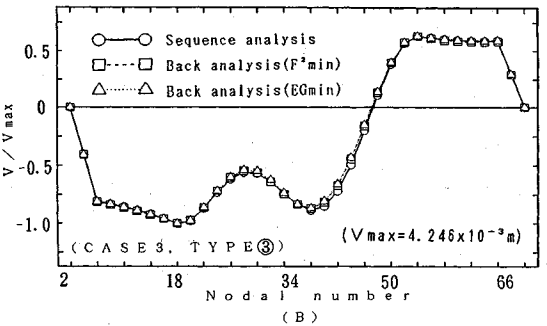
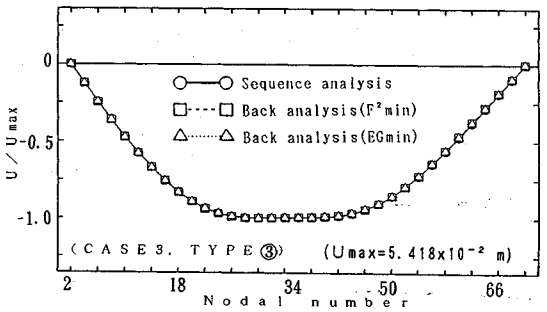
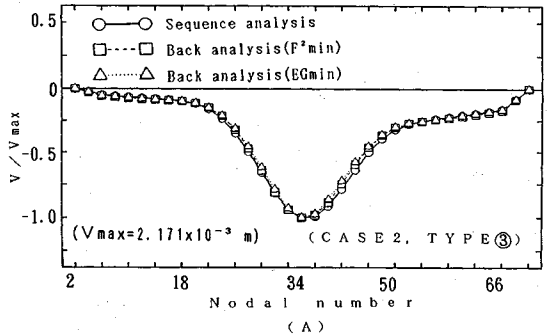
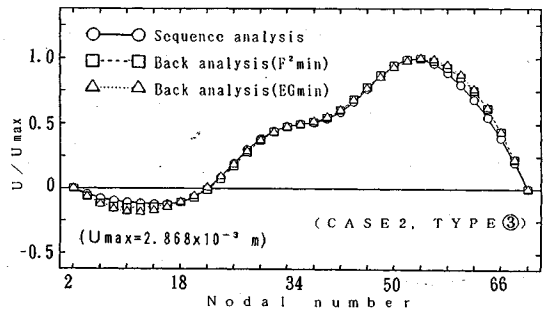


Fig.4 Comparison of displacements among sequence analysis, back analysis (F^2_{min}) and back analysis (EG_{min}) in loading cases 2 (Fig(A)) and 3(Fig(B)) [U : Horizontal, V : Vertical]

Figs.5, 6 は、それぞれ荷重ケース 2, 3 の場合において、変位計測点数を変化させたときの逆解析応力と真値を比較して示したものである。ただし、入力相対変位(付録参照)を用い、応力は覆工内面の節点中央部の最大せん断応力である。当然のことながら、変位計測点数

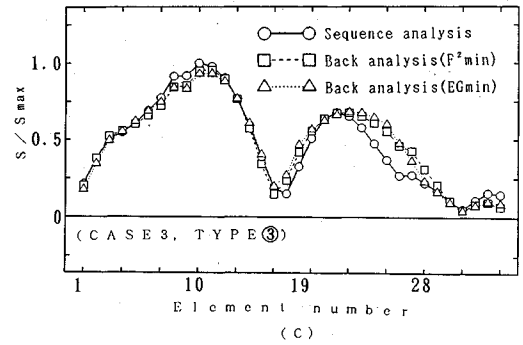
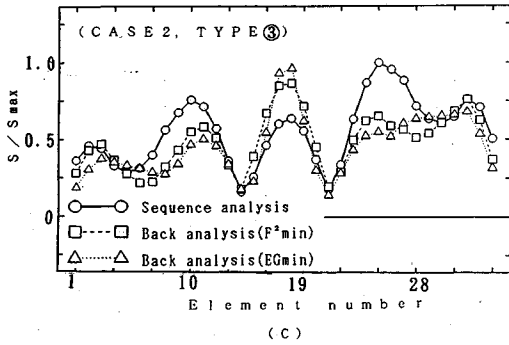
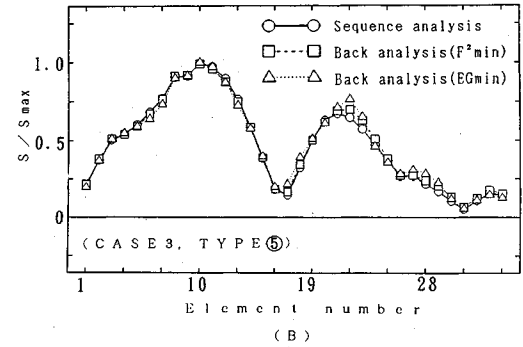
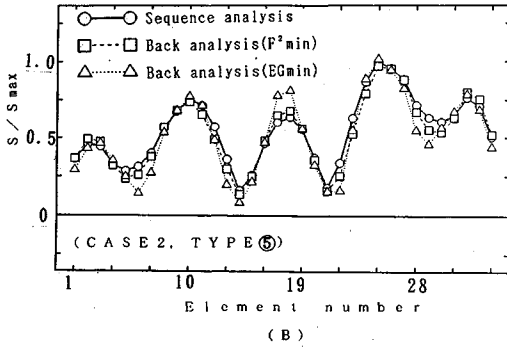
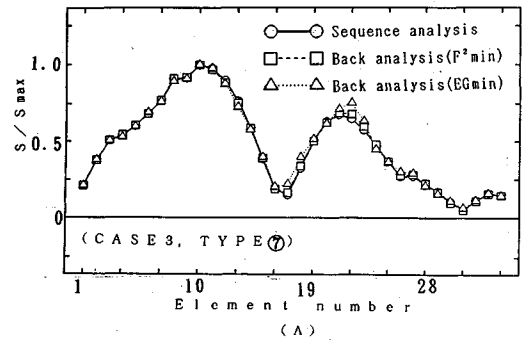
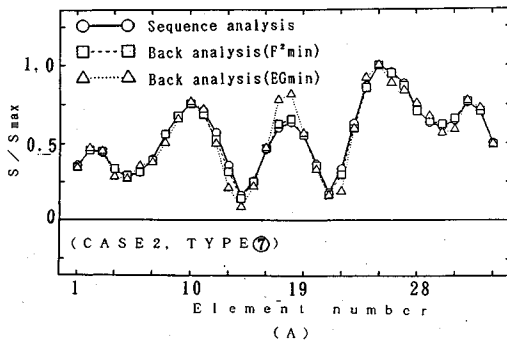


Fig.5 Comparison of the maximum shear stress (S) in loading case 2

Fig.6 Comparison of the maximum shear stress (S) in loading case 3

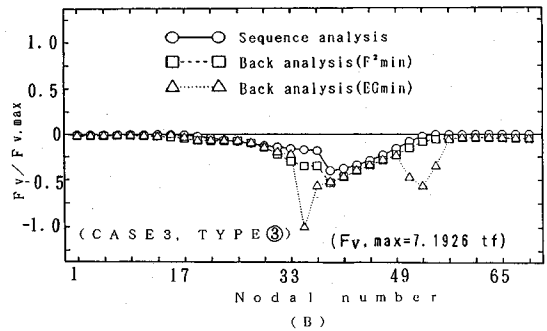
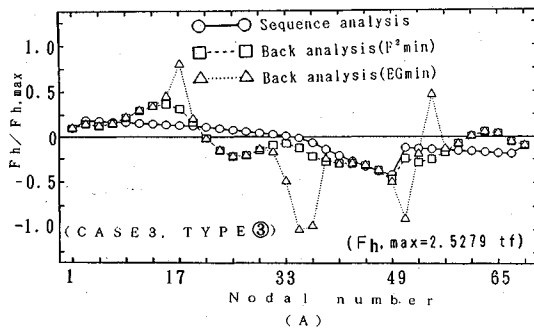
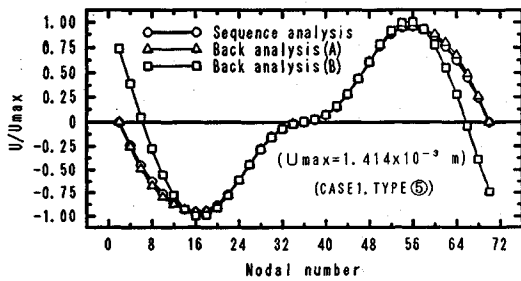
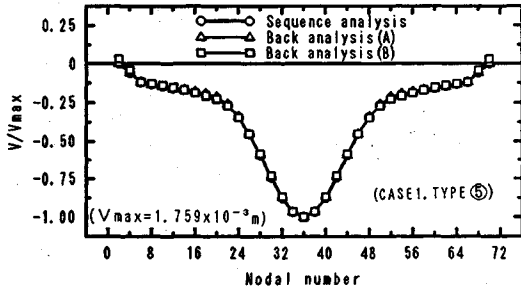


Fig.7 Comparison of external nodal forces ((A) : F_h , Horizontal, (B) : F_v , Vertical)



(A)



(B)

Fig.8 Effects of restriction conditions of lining edge displacements on lining displacements (U : Horizontal, V : Vertical)

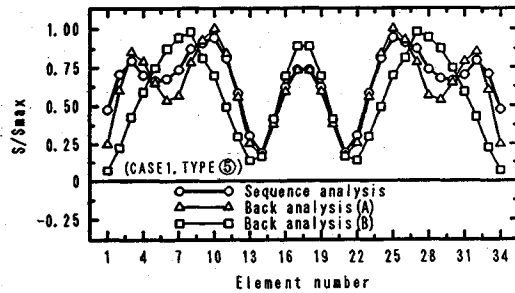


Fig.9 Effects of restriction conditions of lining edge displacements on lining shear stresses (S)

の増加と共に逆解析応力の精度は向上する。応力は、変位を微分して求められるはずみから算出されるため、逆解析から得られる応力の精度は変位の精度に比べて当然低下する。また、エネルギー最小化法は外力自乗和最小化法に比べて精度が劣っている。これは、覆工外面の節点外力を両手法で推定した Fig.7 から分かるように、エネルギー最小化法では、エネルギーを小にするよう、変位計測点に近い位置に外力が集中するためと思われる。すなわち、覆工のある変位計測点に一定変位を発生させる場合を想定すると、測点から遠い位置に荷重をかけるよりも、近い位置にかける方において、小さい荷重でも同一変位を発生させる事が出来るので、エネルギーも小さくなるためである。

以下では、外力自乗和最小化法の精度について検討す

る事とする。

(3) 覆工脚下端変位の精度に及ぼす影響

以上の解析では、剛体変位を生じさせないために、順解析において覆工脚下端の内側節点の水平、鉛直変位を完全拘束し、また逆解析においても同様の条件を適用した。しかし、実際の工事現場において、覆工脚下端を完全に拘束することは困難であり、いくらかの変位は生じることになる。また本逆解析法では必ずしも脚下端変位を拘束する必要はないので、以下では脚下端内側の節点変位を完全拘束した順解析に対して、この変位を完全拘束した場合 (Back analysis (A)) と、完全に無視した場合 (Back analysis (B)) の両逆解析を行い、その結果を検討してみた。

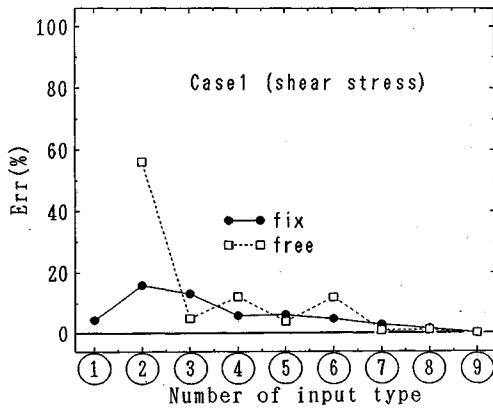
Figs.8, 9 は、両条件による変位と応力の逆解析結果である。これより、脚下端変位を完全に無視した場合には、計測点では含まれていない位置の逆解析値は期待できない事が分かる。また、脚下端変位を拘束した逆解析は、順解析と同一条件であることから、脚下端で変位0を入力した逆解析 (入力変位点が2点増える) に対応し、当然 Back analysis (B) で精度の低下した位置でも Back analysis (A) では良い結果が得られる事になる。

Fig.10 は覆工に生じる最大せん断応力の最大値の誤差に及ぼす入力タイプ、及び脚下端拘束条件の影響について、荷重ケース別に示したものである。これより、一部を除いて、入力変位数の増加と共に両結果とも精度は向上するが、しかし入力変位数が3以上であれば、いずれの脚下端拘束条件で精度が良いという一般的な傾向はない様である。その理由は、本解析で用いた荷重条件では、最大せん断応力の最大値が覆工上半領域で発生し、下半領域で発生していないためであると考えられる。またこれは荷重 Case 1, 2 の場合において、クラウンでの変位入力がない場合には、精度が低下する結果と符合する。また、脚下端拘束条件がフリーの場合においては、入力変位点数が1点の場合には当然の事ながら逆解析は出来ないし、また2点の場合では誤差は相当大であり、実用的でない。しかし3点の場合では最大10%程度の誤差であることから、この場合では本手法を工事現場に十分適用できる事がわかる。なお、実際の施工においては、覆工脚下端は完全拘束でも完全自由でもなくその中間の状態にあるから、現実の精度は Fig.10 の両条件による結果には含まれた範囲内にあるものと思われる。

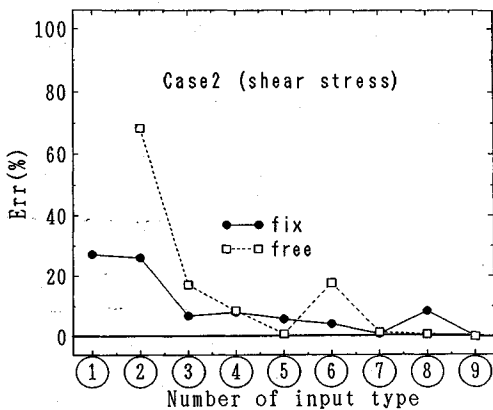
(4) 計測位置の影響

以上より、3点の入力変位により、工学上ほぼ満足いく精度が確保されることが確認できたので、以下では3点の位置を Fig.11 に示す Mu, Mm, Ml の3ケースの様に変化させ、これらの入力変位により逆解析結果がいかに変化するかについて検討してみた。

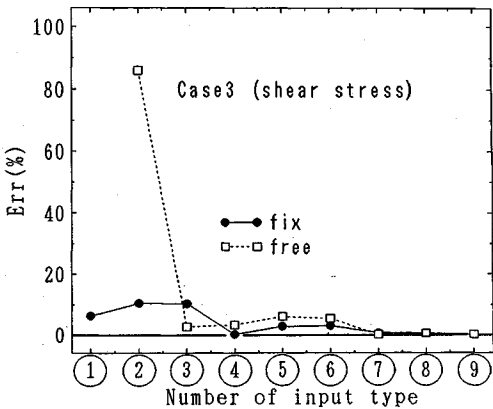
Fig.12 は変位計測が Mu, Mm, Ml の場合における



(A)



(B)



(C)

Fig.10 Accuracy of the maximum value (S_{max}) of the maximum shear stress (S), obtained by F^2_{min} with different restriction conditions of edge displacements

変位 (Fig. (A)), 応力 (Fig. (B)) の逆解析結果と真値とを比較して示したものである。これより、計測点で挟まれた領域が狭いほど、その領域の精度は向上するが、しかし脚下端を拘束していない場合においては、計測点

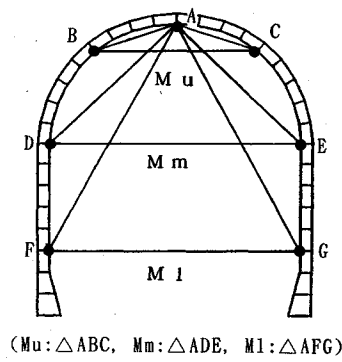


Fig.11 Different input points of displacement measurement

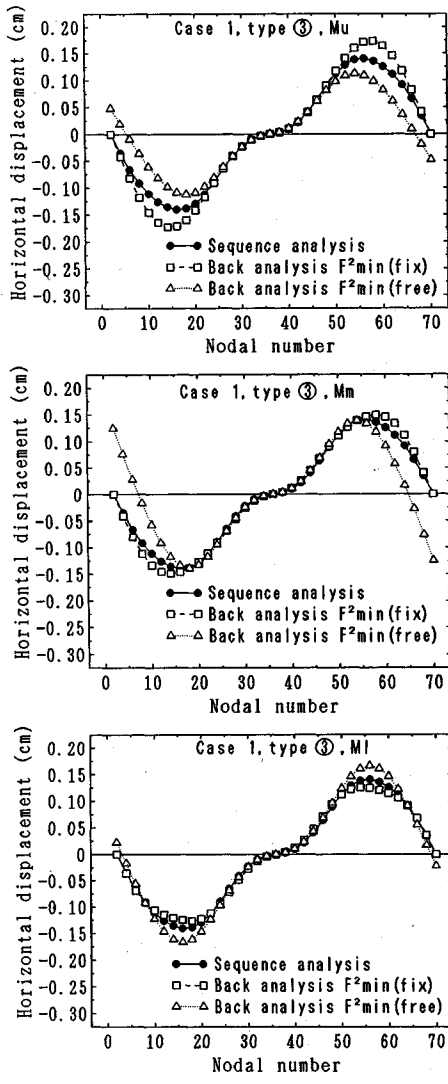
で挟まれていない領域の精度は低下するという傾向が理解できる。

4. 結 論

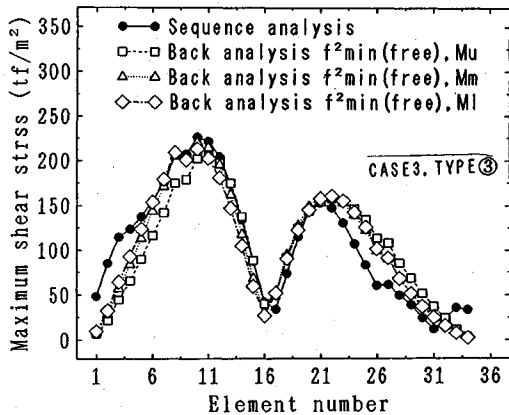
本論文では、A 計測程度の少ない変位から覆工の応力、ひずみ、変位、外力を一意的に求める逆解析手法を二つ提案し、それらの精度について種々検討したものである。結論を列挙すれば以下の通りである。

- 1) 未知外力数に比べて計測変位数が少ない場合には、その変位を生じさす覆工外力の組合せは無数に考えられるが、その中から、外力の自乗和を最小にする解、及び覆工に与えられるエネルギーが最小である解を見つけ出す手法を提案した。FEM により本手法の定式化を行い、これを 2 次元平面ひずみの弾性トンネル覆工に対して適用した。
- 2) 本手法では、覆工外力のモードをあらかじめ仮定する必要はない。また相対入力変位が利用でき、さらに計測変位数に関係なく覆工応力を逆解析出来るという特徴を有する。
- 3) 外力自乗和最小化の方がエネルギー最小化法に比べて精度良い逆解析値を与える事から、外力自乗和最小化法の精度について検討した。
- 4) 計測変位数と逆解析精度の関係を明らかにした。本解析モデルにおいて、通常のトンネル A 計測程度の計測数 (6 変位成分) でも、最大約 10 数% の誤差で最大覆工応力が逆解析できることが示され、本手法が現場に十分適用できることが確認された。
- 5) 覆工脚下端が拘束されていない場合には、変位計測点で挟まれていない領域の逆解析値の精度は期待できない。また計測点で挟まれた領域が狭いほど、その領域の精度は向上する。従って、変位計測位置の決定は応力などを求めようとする位置との関係から決める必要がある。

終りに、本研究は元大阪大学大学院生 上久保裕介君 (現在、近畿日本鉄道)、元近畿大学学生 大西智君 (バ

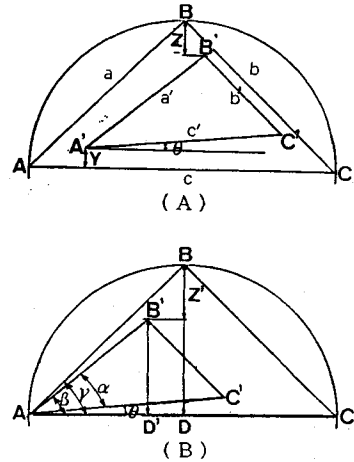


(A)



(B)

Fig.12 Comparison of displacements (A) and stresses (B) obtained by sequence and back analyses



Appendix Fig.1 Geometrical relationships of convergence measurement

ンダー化学), 桜井正明君 (住商コンピューターサービス), 中川真一君 (地崎工業), 岡田充功君 (住友林業緑化) の助力を得て行われたことを付記して, 心から謝意を表する.

付録 コンバージェンス値から相対変位の算出

トンネル現場では通常, 切羽掘削直後に鋼製支保工や吹き付けコンクリート等からなる覆工が施され, その後 A 計測として経時的に覆工の天端沈下やコンバージェンスが測定される. 覆工応力を求める本逆解析法では相対変位の入力がよく, また通常の工事現場では上記の A 計測値が利用できるのをこれを用いた相対変位の算出式を以下で示すこととする.

覆工変形前の測点を A, B, C, 変形後のそれらを A', B', C' とすると, それらの関係は, Appendix Fig.1 (A) に示すことができる. しかし, 覆工応力の算出では, 覆工のすべての節点に剛体変位を加えても覆工応力は変化しないから, 変形後の計測点 (A', B', C') を Appendix Fig.1 (B) のように平行移動してもよい. コンバージェンス値として, Appendix Fig.1 (A) に示す覆工変形前の測線長 a, b, c, 及び変形後の測線長 a', b', c' が求められるので, これに加えて,

- (1): 角 C'AC (=θ) (Appendix Fig.1 (B) 参照), または
- (2): B 点の沈下 Z と A 点の隆起 Y の和 (Z'=Z+Y), のいずれかが求められた場合の相対変位 (水平変位, 鉛直変位) の算出式は以下の通りである. ただし, 変形前の測線 AC は水平とする.

A 点の相対変位 (0, 0)

B 点の相対変位 ($a' \cos\beta - a \cos\gamma, a' \sin\beta - a \sin\gamma$),

C 点の相対変位 ($c' \cos\theta - c, c' \sin\theta$),

ここに,

$$\gamma = \cos^{-1} \left[\frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} \right] \dots\dots\dots (1)$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left[\frac{b'^2 - a'^2 - c'^2}{-2a'c'} \right] \dots\dots\dots (2)$$

ただし,

(1) a, b, c, a', b', c', θ が既知の場合

$$\beta = \alpha + \theta \dots\dots\dots (3)$$

(2) a, b, c, a', b', c', Z, Y が既知の場合

$$\beta = \sin^{-1} \left[\frac{a \sin \gamma - (Z + Y)}{a'} \right] \dots\dots\dots (4)$$

$$\theta = \beta - \alpha \dots\dots\dots (5)$$

参 考 文 献

- 1) Kovari, K., Amstad, Ch. and Fritz, P. : Integrated Technique for Rock Pressure Determination, Proc. Int. Symp. on field Measurements in Rock Mech., pp.289~316, 1977.
- 2) Hisatake, M. and Ito, T. : Back Analysis Methods to Tunnel Linings, Proc. Int. Symp. on Field Measurements in Geomech., pp.1047~1056, 1983.
- 3) 土岐晃生・村上譲二・久武勝保: 覆工応力逆解析法の現場への適用: 土木学会第 46 回年次学術講演会講演概要集, 第 3 部, pp. 582-583, 1991.
- 4) Hisatake, M. : Back Analysis of Tunnel Lining Stresses, Proc. 7th Int. Conf. Computer Methods and Advances in Geomech., pp.1479~1484, 1991.

(1991. 11. 25 受付)

ESTIMATION METHODS OF LINING STRESSES FROM TUNNEL CONVERGENCE DATA

Masayasu HISATAKE and Toshio MURAKAMI

In order to assess the tunnel stability by estimating the lining stresses with a small number of field measurements of displacements, two formulations of back analysis are newly proposed theoretically. The formulations are ; (A) A method to minimize the square of external forces acting on tunnel lining, (B) A method to minimize the energy given to the tunnel lining from the external forces. The accuracy of the methods is investigated through parametric study by a finite element method on two dimensional elastic lining. Application of the methods to a lining with several types of external forces shows appropriateness of it. When 6 components of input displacements are given to the method (A), high accuracy with a few percents error on displacements and less than 20 percents error on the maximum shear stress is also confirmed.