

ALE有限要素法による流れ・構造連成解析への予測子・修正子法の適用と計算過程に関する技法

野村卓史*

パネ支持された剛体と非圧縮性粘性流れの連成問題を対象とする解析法を構成した。提案する方法は Arbitrary Lagrangian-Eulerian 法によって物体の運動にともなう移動境界を表現している。流れの有限要素方程式と物体の運動方程式との連成方程式系に対し、予測子・修正子法を適用して非定常問題の計算過程を導出した。この計算過程が筆者らの従来の方法よりも安定性に優れていることを数値解析例によって示している。また、計算時間を低減するための技法を併せて報告する。

Keywords: arbitrary Lagrangian-Eulerian method, finite element method, fluid-structure interaction problem, predictor-corrector method

1. はじめに

流体の中で構造物が振動するような流れと構造系との連成問題を数値解析する場合に、構造系の変位・変形が大きく、そのことが流れに与える影響を無視できないときには、流体に関する解析領域が構造の運動とともに変形する状況を取り扱う必要がある。Arbitrary Lagrangian-Eulerian 法(以下 ALE 法と略記する)はこのような問題に対して提案されている方法で、解析領域の変形にともなう解析メッシュを変形させ、流れの支配方程式を運動している節点を基準として相対的に記述するというものである^{1)~4)}。ALE 法では節点が空間に固定されていれば Euler 的記述となり、節点が流体粒子とともに移動するのであれば Lagrange 的記述となつて、一般には両者の中間的立場の記述が解析領域内の場所に応じて設定される。粘性流体と構造との連成問題の場合には、物体の表面上では滑り無し条件のために Lagrange 的記述とし、空間に固定された境界上では Euler 的記述とする。ALE 法ではこのようにして移動する境界の影響を考慮できるだけでなく、メッシュの変形様式を適当にコントロールすることにより、メッシュが過度に歪むような数値解析上好ましくない状況を避けることも可能である。そのため自由表面流れの問題^{5),6)}や塑性加工の問題⁷⁾など、かつて Lagrange 的な定式化で解析された問題にも適用されている。

筆者らは以前にパネ支持された剛体と非圧縮性粘性流体とが連成運動する問題を対象とした解析法を ALE 法に基づいて構成し報告した^{8),9)}。このような対象の ALE 解析は、その後 Shimura ら¹⁰⁾を始め、試みられ始めている¹¹⁾が、まだ報告数は少ない。筆者らの以前の研究⁹⁾では、流れの解析に Balancing Tensor Diffusivity

(BTD) 法¹²⁾に基づく有限要素法を採用した。BTD 法の時間積分法が陽的 Euler 法であるため、物体の運動方程式の時間積分にもやはり陽的 Euler 法を用いた。したがって構成した解析法は安定性の面できびしく制約されていることが予想されていたが、本論文の数値解析例に示すように、流体の粘性の寄与が少なくなってくると数値的不安定性のために非現実的な解が得られることが明らかとなった。本研究は主としてこの点を改善することを目的として行ったものである。物体の運動方程式の時間積分については Newmark 公式を基本にすることとし、流体の有限要素方程式と連成させて解き進める計算過程を Hughes の Predictor-Corrector 法^{13),14)}に基づいて誘導したのでここに報告する。

また、前述したように ALE 法による解析では、境界位置の変化に応じて節点が移動し解析メッシュが変形するため、ステップごとに要素係数マトリックスを作成し直したり、全体係数マトリックスを作成し直したりすることになる。したがってメッシュの更新にともなうこれらの作業をできる限り軽減することが、当然のことながら解析を成立させるための重要な要因の一つである。本論文では計算のアルゴリズムを具体化するに当たって工夫した 2,3 の技法についても報告する。ただしここで示す技法は流速と圧力の混合補間と、スカイライン法によるソルバーとを対象としている。

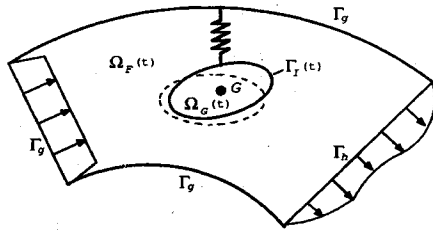
なお、本論文の内容の一部は第 5 回計算力学シンポジウム¹⁵⁾、および Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 誌¹⁶⁾で発表した。

2. 流体および物体の運動方程式

(1) ALE 法による流体の支配方程式

図-1 に解析対象領域を示す。すなわち、 $\Omega_c(t)$ は流体中で運動している物体の占める領域、 $\Omega_f(t)$ はその周囲の流体が占める領域、 $\Gamma_I(t)$ は流体と物体の境界で

* 正会員 工博 東京大学 助教授 工学部土木工学科
(〒113 東京都文京区本郷 7-3-1)



図一 解析対象領域と境界

ある。また Γ_g と Γ_b は空間に固定された境界で、それぞれ流速が規定される境界、トラクションが規定される境界である。

このとき ALE 法によって記述されたナビエ・ストークス方程式と連続条件式は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \rho \{ u'_i + (u_j - \hat{u}_j) u_{i,j} \} &= \tau_{ij} + f_i \\ \tau_{ij} &= -p \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \\ u_{i,i} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{in } \Omega_F(t) \dots (1-3)$$

ここで、 ρ は密度、 μ は粘性係数、 u_i は流速、 τ_{ij} は応力テンソル、 p は圧力、 f_i は物体力であり、 \hat{u}_i はメッシュ速度（節点の移動速度）、 δ_{ij} はクロネッカのデルタである。 u'_i は流速の参照微分 (referential time derivative) であり、物質微分 (material time derivative) \dot{u}_i との間には次の関係がある。

$$\dot{u}_i = u'_i + (u_j - \hat{u}_j) u_{i,j} \dots (4)$$

ただし、 $u_{i,j}$ は流速成分 u_i の空間座標 x_j に関する微分である。式 (1) が Euler 記述による通常のナビエ・ストークス方程式と異なる点は、移流速度が流体粒子の速度とメッシュ速度との相対速度 $(u_i - \hat{u}_i)$ になっている点である。

境界条件は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} u_i &= g_i, \hat{u}_i = 0 \text{ on } \Gamma_g \dots (5 a, b) \\ t_i &= \tau_{ij} n_j = h_i, \hat{u}_i = 0 \text{ on } \Gamma_b \dots (5 c, d) \\ u_i &= \hat{u}_i \text{ on } \Gamma_r(t) \dots (5 e) \end{aligned}$$

ここで t_i はトラクション、 n_i は境界上の外向き単位法線ベクトル、 g_i と h_i は与えられたデータである。境界条件に示すように、本研究では空間に固定された境界、 Γ_g 、 Γ_b では Euler 記述を用い、物体表面上ではすべりなしの条件により、流体粒子の速度とメッシュ速度が一致する Lagrange 記述を用いている。

(2) 物体の運動方程式

物体は流れの中でバネ支持された 2 次元剛体と仮定する。その運動方程式は次式で表される。

$$m\alpha + c\nu + \kappa\delta = X \dots (6)$$

ここで $\delta = \{ \delta_1, \delta_2, \theta \}'$ は重心で定義された並進 2 成分 δ_1, δ_2 、および回転成分 θ からなる変位のベクトル、 $\nu = \dot{\delta}$ は速度のベクトル、 $\alpha = \ddot{\delta}$ は加速度のベクトル、 $X = \{ X_1, X_2, M \}'$ は δ に対応する集中力のベクトルである。

m, c, κ は質量、減衰、剛性のマトリックスであり、いずれも対角マトリックスとする。

3. 流体の有限要素方程式

(1) 弱形式および有限要素方程式

上記の ALE 記述されたナビエ・ストークス方程式の弱形式は次のように表される。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_F(t)} \rho \{ u'_i + (u_j - \hat{u}_j) u_{i,j} \} w_i d\Omega + \int_{\Omega_F(t)} \mu u_{i,j} w_{i,j} d\Omega \\ - \int_{\Omega_F(t)} p w_{i,i} d\Omega = \int_{\Gamma_b} h_i w_i d\Gamma + \int_{\Omega_F(t)} f_i w_i d\Omega \end{aligned} \dots (7 a)$$

$$\int_{\Omega_F(t)} u_{i,i} q d\Omega = 0 \dots (7 b)$$

ここで w_i と q は重み関数である。

本研究では、流速双線形、圧力一定の混合補間要素を用いて、Streamline upwind/Petrov-Galerkin 法 (SUPG 法)¹⁴⁾ を適用する。このときの有限要素方程式を以下のように表す。

$$Ma + N(v - \hat{v})v - Gp = f \dots (8)$$

$$G^i v = 0 \dots (9)$$

ここで v は節点流速ベクトル、 \hat{v} はメッシュ速度のベクトル、 a は節点加速度ベクトル、 p は要素圧力のベクトル、 f は物体力および境界における流体力からなるベクトルである。また、 M は質量マトリックス、 G は勾配に関するマトリックスであり、 $N(v - \hat{v})$ は対流項、粘性項および人工粘性に関するマトリックスを便宜的にまとめて表したもので移流速度 $v - \hat{v}$ の関数である。マトリックス M, N, G を作成するときに参照する節点座標は、物体の変位にしたがって変化する時間の関数である。

(2) 物体の自由度と物体表面の節点変数の関係

先に述べたように対象としている問題の境界は $\Gamma_g, \Gamma_b, \Gamma_r(t)$ の 3 種類に分けられる。このことから、流体の有限要素方程式の節点変数ベクトルの成分を次のように区別する。

$$a = \langle a^\alpha, \bar{a}^\beta, a^\gamma \rangle, u = \langle v^\alpha, \bar{v}^\beta, v^\gamma \rangle \dots (10 a, b)$$

$$f = \langle \bar{f}^\alpha, f^\beta, f^\gamma \rangle, \hat{v} = \langle v^\alpha, \bar{v}^\beta, v^\gamma \rangle \dots (10 c, d)$$

ここで添え字 β, γ はそれぞれ境界 $\Gamma_g, \Gamma_r(t)$ 上の節点変数を表し、添え字 α はそれ以外の節点変数、すなわち境界 Γ_b 上と領域 $\Omega_F(t)$ 内部の節点変数を表している。また記号 $(-)$ は、その成分が既知であることを意味している。

この区別にもとまって、有限要素方程式を次のように分離する。

$$\begin{bmatrix} M^{\alpha\alpha} & M^{\alpha\beta} & M^{\alpha\gamma} \\ M^{\beta\alpha} & M^{\beta\beta} & M^{\beta\gamma} \\ M^{\gamma\alpha} & M^{\gamma\beta} & M^{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^\alpha \\ \bar{a}^\beta \\ a^\gamma \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} N^{\alpha\alpha} & N^{\alpha\beta} & N^{\alpha r} \\ N^{\beta\alpha} & N^{\beta\beta} & N^{\beta r} \\ N^{r\alpha} & N^{r\beta} & N^{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^\alpha \\ v^\beta \\ v^r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G^\alpha \\ G^\beta \\ G^r \end{bmatrix} p = \begin{bmatrix} \tilde{f}^\alpha \\ \tilde{f}^\beta \\ \tilde{f}^r \end{bmatrix} \dots\dots(11)$$

$$[G^{\alpha\alpha} G^{\beta\beta} G^{rr}] \begin{bmatrix} v^\alpha \\ v^\beta \\ v^r \end{bmatrix} = 0 \dots\dots(12)$$

また、物体表面 $\Gamma_I(t)$ 上の節点変数と物体の重心で定義された諸量との関係は次のように表される。

適合条件： $v^r = T^r \nu, a^r = T^r \alpha \dots\dots(13a, b)$

つりあい条件： $X + T f^r = 0 \dots\dots(13c)$

T は物体の重心と物体表面の各節点の間の幾何的な関係を表すマトリックスである⁹⁾。

メッシュ速度 \hat{v} は問題ごとに任意の分布が与えられるが、境界では次の条件を満たすものとする。

$\hat{v} = v^r = T^r \nu$ on $\Gamma_I(t), \hat{v} = 0$ on $\Gamma_o \cup \Gamma_k \dots\dots(14a, b)$

図-1 のような外部流の問題では、メッシュ速度を物体から離れて行くにしたがって減少していく分布とすることが自然である。そのようなメッシュ速度分布および節点座標分布を、物体の変位 δ 、速度 ν の関数としてあらかじめ与えておく。

4. Predictor-corrector法に基づく計算過程の誘導

(1) 物体表面上の自由度の消去

式 (13 a, b) に表されるように、物体表面 $\Gamma_I(t)$ 上の節点加速度成分 a^r と節点流速成分 v^r は物体重心で定義された加速度 α 、流速 ν によって拘束されている。この関係を式 (11) の第3行に代入し、さらに既知流速成分 \tilde{v}^β に関する第2行を除去した結果は次のようである。

$$\begin{bmatrix} M^{\alpha\alpha} & M^{\alpha r} \\ M^{r\alpha} & M^{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^\alpha \\ T^r \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N^{\alpha\alpha} & N^{\alpha r} \\ N^{r\alpha} & N^{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^\alpha \\ v^r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G^\alpha \\ G^r \end{bmatrix} p = \begin{bmatrix} \tilde{f}^\alpha \\ \tilde{f}^r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M^{\alpha\beta} \\ M^{r\beta} \end{bmatrix} \tilde{a}^\beta - \begin{bmatrix} N^{\alpha\beta} \\ N^{r\beta} \end{bmatrix} \tilde{v}^\beta \dots\dots(15)$$

この式の第2行より節点力 f^r を表し、関係式 (13c) を用いて物体の運動方程式 (6) に代入すると次式が得られる。

$$m\alpha + c\nu + k\delta = -Tf^r = -T \left([M^{\beta\alpha} M^{\beta\beta} M^{\beta r}] \begin{bmatrix} a^\alpha \\ \tilde{a}^\beta \\ T^r \alpha \end{bmatrix} + [N^{r\alpha} N^{r\beta} N^{rr}] \begin{bmatrix} v^\alpha \\ \tilde{v}^\beta \\ T^r \nu \end{bmatrix} - G^r p \right) \dots\dots(16)$$

右辺にある物体の加速度ベクトル α に関する項を左辺に移項すると次式が得られる。

$$m^* \alpha + c\nu + k\delta = -T \left([M^{r\alpha} M^{r\beta}] \begin{bmatrix} a^\alpha \\ \tilde{a}^\beta \end{bmatrix} + [N^{r\alpha} N^{r\beta} N^{rr}] \begin{bmatrix} v^\alpha \\ \tilde{v}^\beta \\ v^r \end{bmatrix} + G^r p \right) \dots\dots(17)$$

ここで

$$m^* = m + TM^{rr}T^t \dots\dots(18)$$

式 (15) の第1行と式 (17) に対して以下のように時間積分法を適用する。

(2) Predictor-corrector法の適用

以上に示した連成問題のマトリックス方程式の時間微分項に、Hughes らの Predictor-corrector 法^{13), 14)} を適用すると、時刻 t_n から $t_{n+1} (= t_n + \Delta t)$ への1ステップの時間積分が次の3つの段階からなる計算過程を構成できる。

第1段階 (predictor) : $i=0$

[流体] $a_{n+1}^{(i)} = 0 \dots\dots(19a)$

$v_{n+1}^{(i)} = v_n^{(i)} + \Delta t(1-\gamma_v) a_n^{(i)} \dots\dots(19b)$

$p_{n+1}^{(i)} = p_n \dots\dots(19c)$

[物体] $\alpha_{n+1}^{(i)} = 0 \dots\dots(19d)$

$\nu_{n+1}^{(i)} = \nu_n + \Delta t(1-\gamma) \alpha_n \dots\dots(19e)$

$\delta_{n+1}^{(i)} = \delta_n + \Delta t \nu_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 (1-2\beta) \alpha_n \dots\dots(19f)$

第2段階 (solution) : $0 \leq i \leq I-1$

加速度増分 $\Delta a^{(i)}$ 、 $\Delta \alpha^{(i)}$ と圧力増分 $\Delta p^{(i)}$ を計算する。次節 (3) で詳述する。

第3段階 (corrector) : $0 \leq i \leq I-1$

[流体] $\alpha_{n+1}^{(i+1)} = \alpha_{n+1}^{(i)} + \Delta \alpha^{(i)} \dots\dots(20a)$

$v_{n+1}^{(i+1)} = v_{n+1}^{(i)} + \gamma_v \Delta t \Delta a^{(i)} \dots\dots(20b)$

$p_{n+1}^{(i+1)} = p_{n+1}^{(i)} + \Delta p^{(i)} \dots\dots(20c)$

[物体] $\alpha_{n+1}^{(i+1)} = \alpha_{n+1}^{(i)} + \Delta \alpha^{(i)} \dots\dots(20d)$

$\nu_{n+1}^{(i+1)} = \nu_{n+1}^{(i)} + \gamma \Delta t \Delta \alpha^{(i)} \dots\dots(20e)$

$\delta_{n+1}^{(i+1)} = \delta_{n+1}^{(i)} + \beta \Delta t^2 \Delta \alpha^{(i)} \dots\dots(20f)$

以上の計算で第2段階および第3段階は2回以上繰り返す必要がある ($I \geq 2$)。また $\gamma_v \geq \frac{1}{2}$ 、 $\gamma \geq \frac{1}{2}$ 、 $\beta \geq \frac{1}{4}$ は時間積分の精度と安定性を制御するパラメータで、 γ と β は Newmark 公式のものである。数値計算による検討の結果、 $\gamma_v \neq \gamma$ の場合は数ステップで解が発散してしまうこと、したがって $\gamma_v = \gamma$ として、加速度と速度の関係を流体と物体とで同じにする必要があることが明らかになった。

(3) 第2段階の計算

第2段階 (solution) は以下の4つの手順からなる。

a) 運動方程式の残差の計算

第 i 回目の繰り返し計算の近似値によって運動方程式の残差を求める：

$$R_{n+1}^{\alpha(i)} = \bar{f}_{n+1}^{\alpha} - [M^{\alpha\alpha} M^{\alpha\beta} M^{\alpha r}]_{n+1}^{(i)} \begin{Bmatrix} \alpha^{\alpha} \\ \bar{\alpha}^{\beta} \\ T^r \alpha \end{Bmatrix}_{n+1}^{(i)} - [N^{\alpha\alpha} N^{\alpha\beta} N^{\alpha r}]_{n+1}^{(i)} \begin{Bmatrix} v^{\alpha} \\ \bar{v}^{\beta} \\ T^r v \end{Bmatrix}_{n+1}^{(i)} + G_{n+1}^{\alpha(i)} p_{n+1}^{(i)} \dots (21)$$

$$r_{n+1}^{(i)} = -m_{n+1}^{*(i)} \alpha_{n+1}^{(i)} - c v_{n+1}^{(i)} - k \delta_{n+1}^{(i)} - T_{n+1}^{(i)} \left([M^r \alpha M^r \beta]_{n+1}^{(i)} \begin{Bmatrix} \alpha^{\alpha} \\ \bar{\alpha}^{\beta} \end{Bmatrix}_{n+1}^{(i)} + [N^r \alpha N^r \beta N^r r]_{n+1}^{(i)} \begin{Bmatrix} v^{\alpha} \\ \bar{v}^{\beta} \\ T^r v \end{Bmatrix}_{n+1}^{(i)} - G_{n+1}^{(i)} p_{n+1}^{(i)} \right) \dots (22)$$

ここでマトリックスの添え字 (i) は i 回目の繰り返し時の節点座標に基づくマトリックスであることを意味する。

b) 仮の加速度増分の計算

次式を解いて、非圧縮条件を満足していない、仮の加速度増分を求める：

$$\bar{M}_{n+1}^{(i)} \Delta \alpha^{*(i)} = R_{n+1}^{\alpha(i)} \dots (23 a)$$

$$\bar{m}_{n+1}^{*(i)} \Delta \alpha^{*(i)} = r_{n+1}^{(i)} \dots (23 b)$$

ただし

$$\Delta \alpha^{*(i)} = \Delta \alpha^{(i)} - \bar{M}_{n+1}^{(i)-1} G_{n+1}^{\alpha(i)} \Delta p^{(i)} \dots (24 a)$$

$$\Delta \alpha^{*(i)} = \Delta \alpha^{(i)} - \bar{m}_{n+1}^{*(i)-1} T_{n+1}^{(i)} G_{n+1}^r \Delta p^{(i)} \dots (24 b)$$

ここで \bar{M} は M の lumped mass を表し、 \bar{M}^{α} はその内、加速度成分 α^{α} に対応する部分マトリックスを意味している。また、

$$\bar{m}^* \equiv m^* + \Delta t \gamma c + \Delta t^2 \beta k \dots (25)$$

は Newmark 公式を適用することにより得られるマトリックスである。

lumped mass を導入したのは、後述する圧力に関する方程式の係数マトリックスのスパース性を確保するためである。式 (21), (22) に示したように、lumped mass による精度低下を抑えるために、これらの式の右辺の残差ベクトルの計算には元の consistent mass マトリックスを用いている。

c) 圧力増分の計算

通常の混合法による非圧縮性流れの解析アルゴリズムと同様に、流速場に連続条件を課すことによって圧力増分に関する方程式を得る。すなわち各繰り返し計算後の流速 $v_{n+1}^{(i+1)}$ に関する連続条件は式 (9) と (13 a) より次のように表される。

$$G_{n+1}^{\alpha(i+1)} v_{n+1}^{\alpha(i+1)} + G_{n+1}^{r(i+1)} T_{n+1}^{(i+1)} v_{n+1}^{(i+1)}$$

$$= -G_{n+1}^{\beta(i+1)} \bar{v}_{n+1}^{\beta} \dots (26)$$

これに式 (20b), (20e) を代入すると次式が得られる。

$$G_{n+1}^{\alpha(i)} [v_{n+1}^{\alpha(i)} + \gamma \Delta t (\Delta \alpha^{*(i)} + \bar{M}_{n+1}^{(i)-1} G_{n+1}^{\alpha(i)} \Delta p^{(i)})] + G_{n+1}^{r(i)} T_{n+1}^{(i)} [v_{n+1}^{(i)} + \gamma \Delta t (\Delta \alpha^{*(i)} + \bar{m}_{n+1}^{*(i)-1} T_{n+1}^{(i)} G_{n+1}^r \Delta p^{(i)})] = -G_{n+1}^{\beta(i)} \bar{v}_{n+1}^{\beta} \dots (27)$$

ただし、一回の繰り返し計算に伴う有限要素の変形は無視できるものと仮定し、マトリックス $G^{(i+1)}$ を $G^{(i)}$ で置き換えている。これより次の方程式を得る。

$$K_{n+1}^{(i)} \Delta p^{(i)} = - [G^{\alpha} G^{\beta} G^r]_{n+1}^{(i)} \begin{Bmatrix} v_{n+1}^{\alpha(i)} + \gamma \Delta t \Delta \alpha^{*(i)} \\ \bar{v}_{n+1}^{\beta} \\ T_{n+1}^{(i)} (v_{n+1}^{(i)} + \gamma \Delta t \Delta \alpha^{*(i)}) \end{Bmatrix} \dots (28)$$

ここで、

$$K_{n+1}^{(i)} = \gamma \Delta t G_{n+1}^{\alpha(i)} \bar{M}_{n+1}^{(i)-1} G_{n+1}^{\alpha(i)} + \gamma \Delta t G_{n+1}^{r(i)} T_{n+1}^{(i)} \bar{m}_{n+1}^{*(i)-1} T_{n+1}^{(i)} G_{n+1}^r \dots (29)$$

式 (28) を解いて圧力増分 $\Delta p^{(i)}$ を求める。

d) 加速度増分の計算

次式によって加速度増分を補正し、第 3 段階 (corrector) に進む。

$$\Delta \alpha^{\alpha(i)} = \Delta \alpha^{*(i)} + \bar{M}_{n+1}^{(i)-1} G_{n+1}^{\alpha(i)} \Delta p^{(i)} \dots (30 a)$$

$$\Delta \alpha^{(i)} = \Delta \alpha^{*(i)} + \bar{m}_{n+1}^{*(i)-1} T_{n+1}^{(i)} G_{n+1}^r \Delta p^{(i)} \dots (30 b)$$

5. 計算量を減らすための技法

(1) 全体係数マトリックス K の再作成

4. で示した計算過程では、圧力増分を計算するために連立一次方程式 (28) を解くが、この方程式の全体係数マトリックス $K_{n+1}^{(i)}$ は、各時間積分ステップの各繰り返し計算ごとにその時点での節点座標に基づいて作成し直す必要がある。このマトリックスは [要素数×要素数] の大きさで、次の形式になっている (見通しをよくするために式 (29) を書き直す)。

$$K = c_1 G^r \bar{M}^{-1} G + c_2 [\text{物体との連成による寄与式}] \dots (31)$$

右辺第 1 項は、通常の混合補間要素に基づくナビエ・ストークス方程式の有限要素解析に現れる、ラプラス演算子に対応するマトリックスである。節点座標が更新されるたびにこの 3 重積マトリックスを作成し直す過程について、プログラム上次の手法を用いた。

\bar{M}^{-1} は対角マトリックスであるのでその係数を 2 次元配列に

$$\bar{M}_{n,i}^{-1} = \bar{M}^{-1}(i, n_i) \dots (32)$$

のように記憶する。ここで n_i は節点番号であり、 $i(1 \leq i \leq 2)$ は (u_1, u_2) の 2 自由度に対応している。一方、空間勾配のマトリックス G の係数は、3 次元配列に

$$G_{n,i}^{\alpha} = G(i, n_i, e) \dots (33)$$

のように記憶する。ここで e は要素番号, $n_i^e (1 \leq n_i^e \leq n_{en})$ は要素の局所節点番号, n_{en} は要素の節点数 (本研究で用いた流速双線形・圧力一定の4節点四角形要素の場合 $n_{en}=4$) であり, 全体系での節点番号 n_e とは要素データを記憶する次の配列で対応づけられる。

$$n_e = LM(n_i^e, e) \dots \dots \dots (34)$$

3重積マトリックス $G^T M^{-1} G$ の非ゼロ成分は, マトリックスの対角上, および1節点ないし2節点を共有する2つの要素に対応する個所に位置している。有限要素メッシュは基本的に非構造メッシュであるから, 任意の2つの要素間に共有節点があるかどうかを調べるためには, 配列 LM を探索することになる。この探索作業は要素数の2乗に比例して演算量が増大する上, 条件文を含むためベクトル化できない。メッシュが固定された純 Euler 流の解析では, 計算の初期段階でこの探索とマトリックスの作成を同時に1度だけ行えばよいが, ALE 解析ではマトリックスを作成し直すたびに探索を行うわけにはいかない。そのため, 探索した結果を次のように記憶することにした。

$$e_i = EC(j, e) \quad (1 \leq j \leq c), \quad c = ID(e+1) - ID(e) \dots \dots \dots (35a, b)$$

ここで e_i, c は, 要素 e と節点を共有する要素の要素番号と要素数である。

この配列 EC によって, 2つの要素が節点を共有しているか否かは分かるが, これだけでは不十分である。マトリックス $G^T M^{-1} G$ の個々の係数を計算するためには, 2つの要素のそれぞれの4節点の内, 局所節点番号で何番目と何番目とが対応しているかを知る必要がある。そこで, これに関する情報を次のように記憶することにした。

$$n_i^e = LNC(i, k, ID(e) + j), \quad 1 \leq i \leq 2, \quad k = 1 \text{ or } 2, 1 \leq j \leq c \dots \dots \dots (36)$$

ここで n_i^e は要素 e_i の局所節点番号で, $e_1 (= e)$ は注目している要素の要素番号, e_2 は接続されている要素の要素番号である。2つの要素が1つの節点のみを共有しているときは $k=1$, 2つの節点を共有しているときは $k=2$ である。配列 LNC は, あたかもスカイライン法で非ゼロの配列要素を除外して圧縮したような記憶の方法を採用している。

以上の2つの配列 EC と LNC を利用することによって, 節点座標が変化するたびに3重積マトリックスを作成し直しスカイライン法で記憶するプロセスを, 判断などの条件文なしで行うことができる。なお, 式 (29) の右辺第2項のマトリックスを作成し直すことについても同様の技法を用いている。この場合は物体に接している要素の節点番号を記憶する配列を用意した。

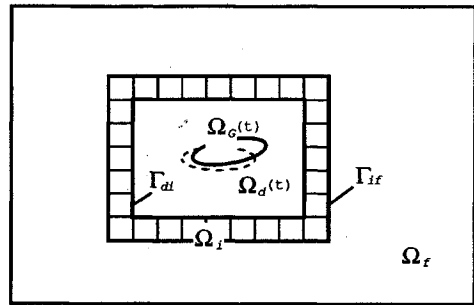


図-2 解析対象領域内の3つの部分領域

(2) 要素が変形する領域の限定

図-1のような外部流れの問題では, 全領域に渡って要素を変形させる必要はなく, 過度に変形する要素さえ生じなければ物体まわりの適当な範囲だけ変形するようにすれば十分である。当然のことながら, これによって, M, G などの要素係数マトリックスを作成し直すための演算量は直接的に減少する(ただし対流項に関するマトリックスは要素が変形する/しないにかかわらず全ての要素に渡って作成し直す)。さらに, ソルバーがスカイライン法の場合には, 要素の番号付けに以下のような配慮をすることによって, LDU 分解の演算量も減ずることができる。

流れ解析の対象領域 $\Omega_f(t)$ を図-2のように3つの部分領域に分割する。すなわち, $\Omega_d(t)$ は物体 $\Omega_c(t)$ の周りの領域で, その中の要素は全て変形する。 Ω_i は $\Omega_d(t)$ を取り囲む1層の, 変形しない要素からなる領域, Ω_f はさらにその外側の, 変形しない要素のみからなる領域である。それぞれの領域に含まれる要素の要素番号を記号, e_d, e_i, e_f で代表することとし, 要素番号の順番を昇順で次のように並べるものとする。

$$(\dots e_f \dots; \dots e_i \dots; \dots e_d \dots) \dots \dots \dots (37)$$

このとき全体係数マトリックス K は次のような部分行列で表される。

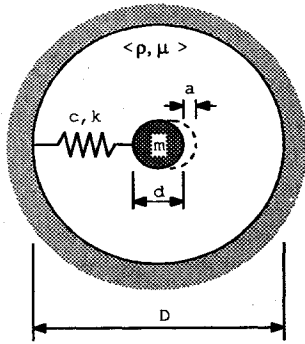
$$K = \begin{bmatrix} K_{e_f e_f} & K_{e_f e_i} & 0_{e_f e_d} \\ K_{e_i e_f} & K_{e_i e_i} & K_{e_i e_d} \\ 0_{e_d e_f} & K_{e_d e_i} & K_{e_d e_d} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (38)$$

ここで式 (29) の右辺第2項は部分行列 $K_{e_d e_d}$ に含まれる。

K の上三角マトリックスを式 (38) のような配置でスカイライン法によって記憶し, 1度 LDU 分解を行ったのちは, 領域 $\Omega_d(t)$ 内の要素が変形しても部分行列 $K_{e_f e_f}$ の内容は不変である。LDU 分解の対象となるのは式 (38) の第2列以降のみであり, 演算量が軽減できる。

(3) ALE 解析に要する計算時間の目安

(1) で述べた技法を用いることにより, 1つの積分ステップの計算の中で全体係数マトリックスを再作成することに要する時間は要素係数マトリックスを再作成するための時間に比べて無視できるほどにすることができ



$m = 3.408 \text{ g}$
 $c = 0$
 $k = 34611.3 \text{ g/s}^2$
 $d = 1.27 \text{ cm}$
 $D = 5d$
 $a = d/100$

図-3 円形領域を満たす粘性流体内における円柱の自由振動

表-1 流体の物性値

| | 流体 | 密度 (g/cm^3) | 粘性係数 ($\text{g/cm}\cdot\text{s}$) |
|---|-------------|---------------------------|--|
| 1 | silicon oil | 0.956 | 1.45 |
| 2 | mineral oil | 0.935 | 0.41 |
| 3 | water | 1.0 | 0.0133 |
| 4 | air | 1.18×10^{-3} | 1.82×10^{-4} |

る。また、LDU 分解に要する計算時間も要素係数マトリックスを作成し直す時間に比べればわずかである。すなわち、LDU 分解をソルバーとする場合には要素係数マトリックスを作り直すプロセスが計算時間をほぼ支配する。このことに基づいて ALE 解析に要する計算時間と解析メッシュが固定された純 Euler 流の解析に要する計算時間を比較すると、作成し直す係数マトリックスが前者では質量 (M)、粘性、対流および勾配 (G) の 4 種類あるのに対し、後者では対流に関するマトリックス 1 つであるから、大ざっぱに言って 4 倍程度ということになる。SUPG 法では重み関数が流速の関数であり、純 Euler 流の解析でも質量マトリックスをステップごとに作成し直すから計算時間の差はもっと少なくなる。(2) で述べたようにメッシュが変形する領域を限定すれば両者の差はさらに縮まる。

6. 数値解析例 (1)：粘性流体中の円柱の減衰振動

図-3 に示すような、粘性流体で満たされた円形領域の中心でバネ支持された円柱の自由振動問題を考える。円柱-バネ系には構造減衰を与えず、周囲の流体の粘性によって振動が減衰していくことを想定している。円柱の直径と円形領域の直径との比は 1 対 5、初期変位は円柱直径の 1% とし、流体の密度と粘性係数を変化させて表-1 に示す 4 ケースの計算を行った。Predictor-corrector 法の反復回数は $I=2$ 、時間積分のパラメータは $\gamma_0 = \gamma = 0.5$ 、 $\beta = 0.25$ を用いた。図-4 は解析に用いた有限要素メッシュとその変形パターンである。

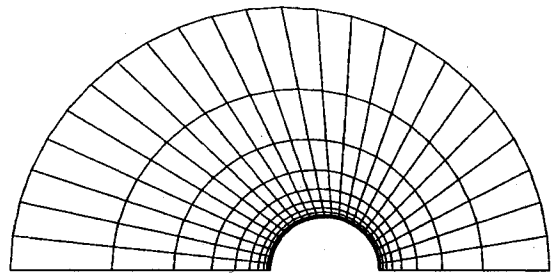


図-4 解析に用いた有限要素メッシュ (円柱が変位しているときの变形パターン)

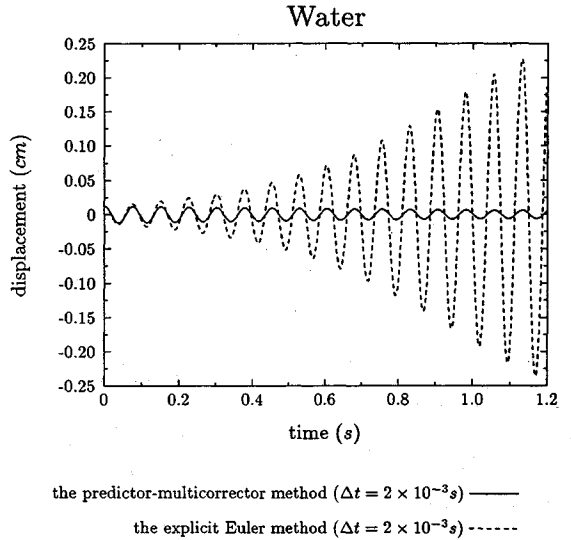


図-5 2つの解析法による変位の時刻歴の比較 (実線：本論文の解析法による結果、破線：前報の解析法による結果)

この問題は先に筆者らが取り上げたものと同じ問題である⁹⁾。その時の解析法は Balancing Tensor Diffusivity 法に基づいたもので、物体の運動方程式の時間積分は陽的 Euler 法であった。自由振動問題については流体の粘性の大きいケース 1 (Silicon Oil) とケース 2 (Mineral Oil) の計算を行い、付加質量係数と付加減衰係数が理論解¹⁷⁾とよく一致して評価されることを確認している。

今回はさらに低粘性の流体ケース 3 (水) とケース 4 (空気) の計算も試みた。この 2 種類の流体の場合は陽的時間積分法に基づく前報の解析法では円柱の変位が減少せず増大していつてしまう結果となった。これに対し今回構成した方法では減衰していく結果が得られている。図-5 に 2 つの解析法で求めた変位の時刻歴の一例 [ケース 3] を示す。

図-6 は 4 ケースの計算から評価された付加質量係数と付加減衰係数を理論解と比較したものである。ケース 4 (空気) の場合を除いてよい一致を示している。ケース 4 の場合は他の 3 つの場合と比べて流体の密度が 3

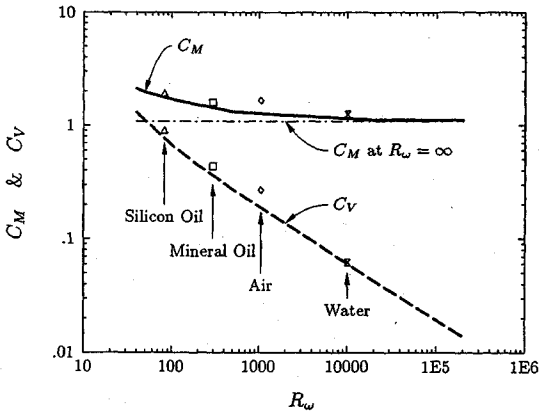
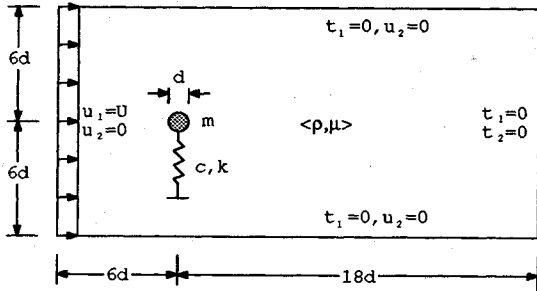


図-6 解析から得られた付加質量係数 C_M 、付加減衰係数 C_V と理論解との比較 [横軸は無次元振動数: $Re \equiv \rho \omega d / \mu$ (ω : 減衰角振動数, d : 円柱の直径)]



$\rho = 1.18 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$
 $\mu = 1.82 \times 10^{-4} \text{ g/cm} \cdot \text{s}$
 $m = 0.06 \text{ g}$
 $c = 0$
 $k = 344.0 \text{ g/s}$
 $d = 0.6 \text{ cm}$
 $U = 51.3 \text{ cm/s}$
 (at $Re = 200$)

図-7 円柱の渦励振問題の解析条件

オーダーも小さいため、円柱の質量に比べて付加質量がそれだけ小さい。そのため変位の時刻歴から付加質量係数を評価するときに誤差が入りやすいものと考えられる。

なお、ここで取り上げた問題は初期変位が円柱径の1%と小さいが、これは理論解¹⁷⁾と比較することを目的としているためである。振幅が大きいときの理論解は報告されていないが、そのような問題にも本解析法は適用することができる。

7. 数値解析例(2): 円柱の渦励振

図-7に示すように、バネ支持された円柱が一樣流中に置かれた状態で、カルマン渦により振動する問題を解析した。円柱は流れと直交する方向にのみ変位できるものとする。円柱の固有振動数は、レイノルズ数が200のときの静止円柱の渦放出周波数と一致するように設定し

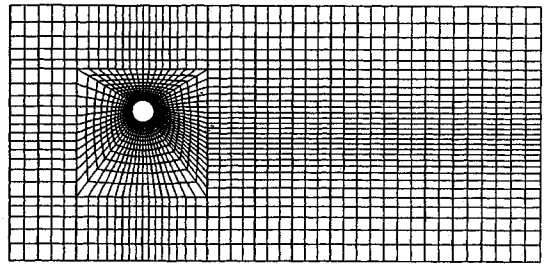


図-8 有限要素メッシュの変形パターン

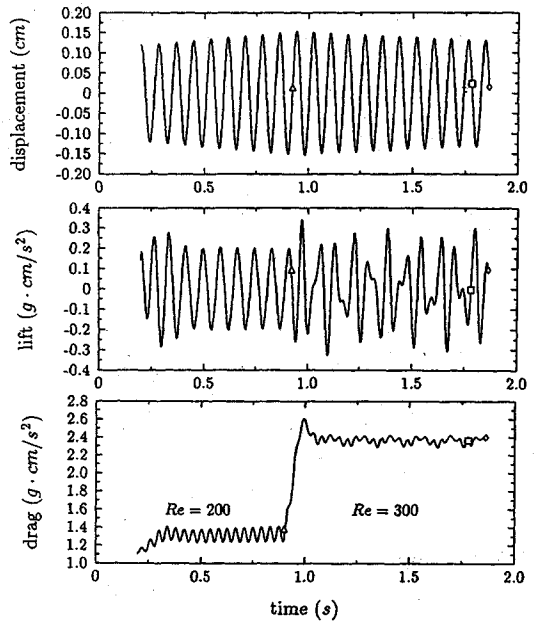
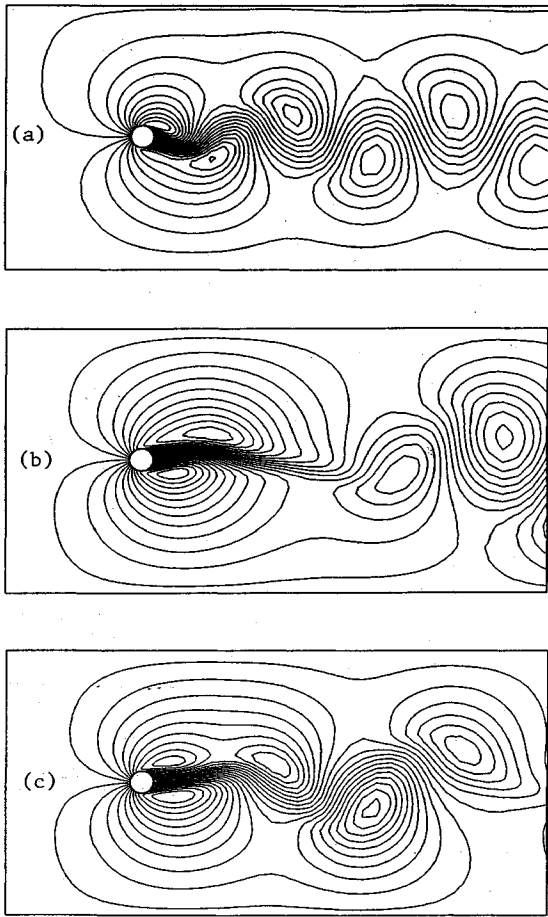


図-9 変位、揚力、抗力の時刻歴 (図中の記号 Δ 、 \square 、 \diamond はそれぞれ図-10の流速分布(a), (b), (c)に対応する)

た。構造減衰はゼロとしている。図-8は円柱が変位しているときの有限要素メッシュである。要素が変形する範囲を、円柱を囲む正方形領域に限定して前章で述べた技法を適用している。以下のいずれの計算も、積分時間間隔 Δt は無次元時間で0.03、Predictor-corrector法の反復回数は $I=2$ 、時間積分のパラメータは、 $\gamma_0 = \gamma = 0.55$ 、 $\beta = (\gamma + 1/2)^2 / 4$ (Hughes¹³⁾) として行った。

円柱が取り付け位置で静止している状態でレイノルズ数200の計算を開始し、周期的にカルマン渦が放出するようになってから円柱の拘束を除去して連成解析に移行させた。渦放出による揚力変動に共振して、円柱の振動振幅は次第に増大していく。このようにして円柱振動の振幅が円柱直径の約20%に達したのちに、上流流速を増してレイノルズ数を300まで上げた。図-9に計算から求めた円柱変位、揚力および抗力の時刻歴を示す。レイノルズ数を300にしても円柱の振動周期は200のときと変わらないが、揚力は乱れた波形となった。



図—10 振動円柱まわりの流れの流線 (上から図—9の図中の記号, Δ , \square , \diamond で示した瞬間に対応する)

図—10には典型的な流れの様子を示す。図—10(a)はレイノルズ数が200で円柱振動と渦放出とが同期しているときの流れである。円柱が上方へ主流速度の約20%の速度で運動している瞬間であるため、円柱近傍の流れに相対迎角がついている。また図—10(b)と(c)はレイノルズ数を300に上げたのちの流れで、揚力変動の乱れに対応した間欠的な渦放出の状態になっている。

8. おわりに

以上に、バネ支持された剛体と非圧縮性粘性流体との連成問題を対象とする、ALE法と有限要素法に基づく解析法を示した。構成した計算アルゴリズムは、物体運動と流体運動に関する連成したマトリックス方程式に予測子・修正子法による時間積分公式を適用して誘導したものである。この解析法が、筆者らが以前に陽的時間積分法に基づいて誘導した解析法と比較して優れた特性を有することを数値計算例によって実証した。

また、構成した解析法では物体の運動にともなって積

分ステップごとに有限要素メッシュが変形し、要素係数マトリックスを作成し直す必要があるが、それに要する計算量を低減するためのプログラム上の技法を考案した。この計算法を用いて、一様流の中に置かれた円柱がカルマン渦によって励振される問題の解析を行い、円柱直径の20%程度の振幅時においても安定して計算が進められることを示した。解析に用いた有限要素メッシュの分解能の制約のため、解析した流れはレイノルズ数200~300の範囲であるが、今後さらにアルゴリズムを改良するなどして、実際上問題となるような流れに対して適用していけるよう研究を進めていく予定である。

なお本研究を進めるにあたり、アメリカ合衆国Stanford大学のT.J.R. Hughes教授には貴重な示唆を頂きました。また同大学に長期滞在する機会を与えて下さった吉田裕教授をはじめとする東京工業大学土木工学科の皆様にご心より謝意を表する次第です。

参考文献

- 1) Hirt, C.W., Amsden, A.A. and Cook, J.L. : An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds, *J. Comp. Phys.*, Vol.14, pp.227~253, 1974.
- 2) Hughes, T.J.R., Liu, W.K. and Zimmermann, T.K. : Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows, *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.29, pp.329~349, 1981.
- 3) Donea, J., Giuliani, S. and Halleux, J.P. : An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element for transient dynamic fluid-structure interactions, *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.33, pp.689~723, 1982.
- 4) Belytschko, T. and Flanagan, D.P. : Finite element methods with user-controlled meshes for fluid-structure interaction, *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.33, pp.669~688, 1982.
- 5) Ramaswamy, B. and Kawahara, M. : Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for unsteady, convective, incompressible viscous free surface flow, *Int. J. Numer. Methods for Fluids*, Vol.7, pp.1053~1075, 1987.
- 6) Huerta, A. and Liu, W.K. : Viscous flow with large free surface motion, *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.69, pp.277~324, 1988.
- 7) Liu, W.K., Chang, H., Chen, J.S. and Belytschko, T. : Arbitrary Lagrangian-Eulerian Petrov-Galerkin finite elements for nonlinear continua, *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.68, pp.259~310, 1988.
- 8) 野村卓史・飯島正義・三橋浩一：振動する物体まわりの流れの問題のALE有限要素解析，東工大土木工学科研究報告，No.40，pp.83~95，1989。
- 9) 野村卓史・飯島正義：ALE法に基づく粘性流体と構造との相関問題の有限要素解析手法，土木学会論文集，No.416/I-13，pp.285~294，1990。
- 10) Shimura, M. and Zienkiewicz, O.C. : Interaction analysis between structure and fluid flow using the direct Laplacian method, *Computer Applications in Civil and Building Engineering, Proc. of 4th int. conf. on comput. in civil and*

- bldg. enrg., pp.267~274, 1991.
- 11) 枝元勝哉・川原睦人：流れによる角柱の自由振動応答の ALE 有限要素解析，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，第 16 巻，pp.445~450, 1992.
 - 12) Gresho, P.M., Chan, S.T., Lee, R.L. and Upson, C.G. : A modified finite element method for solving the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations, Part 1 : Theory, Part 2 : Applications, Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol.4, pp.557~598, 614~640, 1984.
 - 13) Hughes, T.J.R. : The Finite Element Method, Prentice-Hall, New Jersey, 1987.
 - 14) Brooks, A.N. and Hughes, T.J.R. : Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., Vol.32, pp.199~259, 1982.
 - 15) 野村卓史：ALE 有限要素法による流れ解析の計算過程について，第 5 回計算力学シンポジウム報文集，pp.225~230, 1991.
 - 16) Nomura, T. and Hughes, T.J.R. : An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for interaction of fluid and a rigid body, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., Vol.95, pp.115~138, 1992.
 - 17) Chen, S.S. : Flow-induced Vibration of Circular Cylindrical Structures, Hemisphere Publishing, Washington, 1987. (1992.1.8 受付)

APPLICATION OF PREDICTOR-CORRECTOR METHOD TO ALE FINITE ELEMENT ANALYSIS OF FLOW-STRUCTURE INTERACTION PROBLEMS AND ASSOCIATED COMPUTATIONAL TECHNIQUES

Takashi NOMURA

A computational method is developed to solve coupled problems of incompressible viscous flows and motion of an elastically mounted rigid body. The moving interface between the body and the fluid is described in terms of the arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation. The streamline upwind/Petrov-Galerkin method is applied to the ALE Navier-Stokes equations to yield finite element equations. The coupled matrix equations with respect to the fluid and the body are solved by means of a predictor-corrector-type time integration method. The improved stability of the proposed method in comparison with the author's previous one is demonstrated by numerical examples. Computational strategies to reduce the computational time are also presented.