

凍結砂のひずみ軟化型弾粘塑性構成式

足立紀尚*・岡 二三生**

本論文では、弾粘塑性理論にある種の時間測度を導入することによって、三軸圧縮条件下における凍結砂のひずみ硬化-軟化挙動とひずみ速度効果を説明できる構成式を誘導した。ついで、構成式に含まれる材料定数の決定方法を詳細に示すとともに単位体積中に土粒子の占める割合、温度、ひずみ速度ならびに拘束圧の材料定数に与える影響を検討した。

Keywords: frozen sand, strain-softening, rate effect, elasto-viscoplasticity, constitutive law

1. はじめに

補助工法としての凍結工法や凍土地帯における建設に関連して、凍結土の力学特性の把握は土木技術者にとって大切な課題である。凍土は土粒子と氷の混合体であり、ひずみ硬化-軟化挙動を呈するとともに顕著なひずみ速度依存性を示す材料であることが実験的に明らかにされている(例えば、Ladanyi¹⁾)。これらの特性は単位体積中に土粒子の占める割合、温度、ならびに拘束圧に影響を受ける。凍土のひずみ軟化の程度、すなわち脆性の度合は低温になるほど、またひずみ速度が大きいほど顕著となる。せん断強度は、氷の強度、土粒子の摩擦強度と土粒子間の粘着力に関係するが、最大強度は主に氷の強度に、一方大ひずみでの強度(残留強度)は土粒子間の摩擦強度に支配されると考えられる。さらには、最大強度がひずみ速度の影響を受けることは、凍土の特徴である。

Vialov²⁾が凍土の力学モデルを提示して以来、これまで多数のモデルが提案されている(Sayles³⁾, Andersland & Al-Noure⁴⁾, Fish⁵⁾, Assur⁶⁾, Ting⁷⁾)。しかしながら、これらの研究は一軸状態のせん断やクリープ挙動に対するモデルを中心としており、地盤工学への適用からは三次元応力場における挙動を説明できる構成式を求める必要がある。

Adachi & Oka⁸⁾はOka⁹⁾が提案した弾粘塑性理論に基づき、ひずみ硬化-軟化挙動とひずみ速度効果を説明できる凍土の構成式を導いた。本論文は、Adachi & Okaの理論を再構成して、構成式に含まれる材料定数の決定方法を詳細に述べるとともに単位体積中に土粒子の占める割合、温度、載荷速度ならびに拘束圧の材料定

数に与える影響を明らかにした。

2. 弾粘塑性構成式

Oka⁹⁾は応力テンソルの時間に関する汎関数で与えられる応力履歴テンソルを新たに導入して粘塑性体理論を構築した。足立・岡¹⁰⁾はこの理論の実時間をValanis¹¹⁾が用いたと同様なひずみ速度に置き換えることで応力履歴テンソルを与え、ひずみ硬化-軟化挙動を説明できる軟岩の構成式を導いている。

そこで本節では、ひずみ硬化-軟化挙動のみならずひずみ速度効果も顕著に示す凍土の弾粘塑性構成式を、時間測度の関数として与えられる応力履歴テンソルを用いて誘導する。

(1) 時間測度と応力履歴テンソル

本論文では、時間測度増分を次式で定義する。

$$dz = G(\text{ひずみ速度}) dt \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 dz は一般化された時間測度 z の増分、 dt は実時間の増分であり、関数 G はひずみ速度依存性を表現する材料関数で実験により決定されるものである。

このような一般化された時間測度 z を用いて、応力履歴テンソル σ_{ij}^* を以下のように定義づける。まず、応力の全履歴 σ_{ij}^* は現在の応力 σ_{ij} と縮退応力履歴 σ_{ij}^* との和集合であって、縮退応力履歴は応力の全履歴から現在の応力を除いたものと考え、連続体力学における表現法にならってつぎのように表す。

$$\sigma_{ij}^*(z-z') = [\sigma_{ij}(z), \sigma_{ij}^*(z-z') \quad 0 < z' \leq z] \dots \dots (2)$$

$$\sigma_{ij}^*(z-z') = [\sigma_{ij}(z-z') \quad 0 < z' \leq z] \dots \dots \dots (3)$$

また、応力履歴テンソル σ_{ij}^* は縮退応力履歴 σ_{ij}^* のみの関数として次のように与えられるとする。

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^*[\sigma_{ij}^*(z-z')] \dots \dots \dots (4)$$

本式は応力履歴テンソル σ_{ij}^* が一般に縮退応力履歴 σ_{ij}^* の汎関数で表わされることを示している。汎関数を

* 正会員 工修 京都大学教授 工学部交通土木工学科

(〒606 京都市左京区吉田本町)

** 正会員 工博 岐阜大学教授 工学部土木工学科

線形であると仮定すれば有界な応力履歴は、有界なノルムが定義できる場合、ヒルベルト空間を構成し内積を定義できる¹²⁾⁻¹⁴⁾。また、応力履歴テンソルが縮退応力履歴にのみ依存するとしたのは、応力履歴が現在の応力に陽には依存しないとするためである(付録1参照)。応力履歴が有界で有限個の点で不連続であっても積分が定義できるから、核関数を用いて表現できる。そこで、本研究では先の研究^{9),10)}に倣って応力履歴テンソル σ_{ij}^* が単一の指数関数形の核関数により与えられるとともに応力履歴テンソルの積分は初期応力との差のみを考え次式で与えられると仮定する。後者の仮定は初期の応力履歴テンソルは初期応力に等しいこと、換言すれば載荷以前は式中のパラメーター τ が十分小さいこと、あるいは初期状態が平衡にあることに対応している。

$$\sigma_{ij}^* = \frac{1}{\tau} \int_0^z \exp[-(z-z')/\tau] [\sigma_{ij}(z') - \sigma_{ij}(0)] dz' + \sigma_{ij}(0) \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 τ は時間測度に対する応力の遅延を表す応力履歴パラメーターで粘弾性理論における遅延時間に対応しており、 $\sigma_{ij}(0)$ は $z=0$ での応力値である。また、これ以下においては式(1)の時間測度 z を次式のように書き改める。

$$dz = g dt \dots\dots\dots (6)$$

$$g = g(\dot{\epsilon}_{ij}) \dots\dots\dots (7)$$

もしも、関数 g がひずみ速度 ϵ_{ij} に関して一次の同次関数の場合には dz はひずみ増分 $d\epsilon_{ij}$ の関数となるから、ひずみ速度非依存性材料の時間測度となる。なお、適用可能な関数形は付録2に示すが、 $g=1$ の場合にはOka⁹⁾が提案した粘弾塑性体理論に一致する。

(2) ひずみ増分と流動則

本研究では、微小ひずみ場での議論とし、全ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}$ は弾性ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}^e$ と塑性ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}^p$ の和で与えられるとする。

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \dots\dots\dots (8)$$

等方線形弾性体と仮定すれば、弾性ひずみ増分テンソル $d\epsilon_{ij}^e$ は次式で与えられる。

$$d\epsilon_{ij}^e = dS_{ij}/2G + d\sigma_m \delta_{ij}/3K \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 S_{ij} は偏差応力テンソル、 σ_m は平均有効応力、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。

一方、粘塑性ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}^p$ は次の非関連流動則で与えられると仮定する。

$$d\epsilon_{ij}^p = H \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} df_p \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 H はひずみ硬化-軟化パラメーターを、 f_p は塑性ポテンシャル関数を、また f_p は塑性降伏関数をそれぞれ表している。

(3) 塑性降伏関数

さて、塑性降伏関数 f_p は現在の応力 σ_{ij} には直接依存

せず、応力履歴テンソル σ_{ij}^* とひずみ硬化パラメーター κ のみの関数として次式で表されるとする。

$$f_p = \eta^* - \kappa = 0 \dots\dots\dots (11)$$

なお、 η^* は応力履歴テンソルの不変量で次のように定義づける。

$$\eta^* = (S_{ij}^* S_{ij}^* / \sigma_m^{*2})^{1/2} \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 S_{ij}^* は応力履歴テンソルの偏差成分を、 σ_m^* はその等方成分である。

さて、どのような負荷に対して塑性ひずみが生じるかを規定する負荷条件は、ひずみ硬化パラメーター κ を現時点の値に固定した条件の下での降伏関数の増分 df_p が正であるか負であるかによる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \text{負荷: } f_p = 0 \text{ で } df_p > 0 \text{ の時} \\ d\epsilon_{ij}^p > 0 \\ \text{中立負荷: } f_p = 0 \text{ で } df_p = 0 \text{ の時,} \\ d\epsilon_{ij}^p = 0 \\ \text{除荷: } f_p = 0 \text{ で } df_p < 0 \text{ の時,} \\ d\epsilon_{ij}^p < 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (13)$$

(4) ひずみ硬化パラメーター κ

式(11)のひずみ硬化パラメーター κ の発展式は

$$\dot{\kappa} = \frac{G'(M^* - \kappa)^2}{M^{*2}} \dot{\gamma}^p \dots\dots\dots (14)$$

で表され、式中の $\dot{\gamma}^p$ は次式で与えられる粘塑性偏差ひずみ測度 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ の不変量である。

$$\dot{\gamma}^p = (\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p)^{1/2} \dots\dots\dots (15)$$

なお、 κ は次式で定義できる。

$$\kappa = \int_0^{\gamma^p} \dot{\kappa} dt \dots\dots\dots (16)$$

結局単純な比例負荷の場合、式(14)を初期条件 $\dot{\gamma}^p = 0$ を用いて積分すると、軟岩¹⁰⁾の場合と同様に次の双曲線関数となる。

$$\kappa = \frac{M^* G' \gamma^p}{M^* + G' \gamma^p} \dots\dots\dots (17)$$

ただし、

$$\gamma^p = \int_0^{\gamma^p} d\gamma^p \dots\dots\dots (18)$$

ここに、 M^* は残留強度状態の η^* の値であり、 G' は双曲線型ひずみ硬化関数の初期接線勾配である。

(5) 塑性ポテンシャル関数と過圧密境界面

すでに述べたとおり、降伏関数は応力履歴テンソルの関数であるが、塑性ポテンシャル関数は現在の応力の関数と考え、凍土に対しては軟岩¹⁰⁾と同様次式で与えられるとする。

$$f_p = \bar{\eta} + \bar{M} \ln [(\sigma_m + b) / (\sigma_{mb} + b)] = 0 \dots\dots\dots (19)$$

ここに、 $\bar{\eta}$ は次式で与えられる応力比であり、 b と σ_{mb} はFig.1に示すように塑性ポテンシャル関数のパラメーターである。

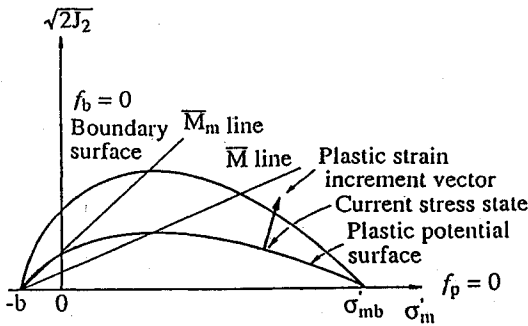


Fig. 1 Plastic potential and overconsolidation boundary surface

$$\bar{\eta} = [S_{ij}S_{ij} / (\sigma_m + b)^2]^{1/2} \dots \dots \dots (20)$$

次に、その内側では過圧密の挙動を示すとする限界を与える過圧密境界面 f_b を次のように定義づける。

$$f_b = \bar{\eta} + \bar{M}_m \ln[(\sigma_m + b) / (\sigma_{mb} + b)] = 0 \dots \dots \dots (21)$$

これは過圧密領域での塑性ポテンシャル関数の変化できる範囲の限界を与え、また式中の \bar{M}_m はせん断過程において最大の体積圧縮ひずみが生じるときの $\bar{\eta}$ の値である。このような過圧密境界関数の導入により、式 (19) の \bar{M} は、過圧密領域においては、

$$M = -\bar{\eta} / \ln[(\sigma_m + b) / (\sigma_{mb} + b)] \dots \dots \dots (22)$$

正規圧密領域では

$$\bar{M} = \bar{M}_m \dots \dots \dots (23)$$

とそれぞれ与えられる。なお、過圧密領域での \bar{M} は現在の応力状態 σ_{ij} ならびに材料定数 b と σ_{mb} を知れば自動的に決定される。

(6) 弾粘塑性構成式

粘塑性ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}^v$ は塑性載荷過程に対する Prager の適合条件 (eg., Naghdi (1960)¹⁵⁾)

$$d\epsilon_{ij}^v = d(\eta^* - \kappa) = 0 \dots \dots \dots (24)$$

を式 (10) の流動則、式 (17) のひずみ硬化パラメーターおよび式 (19) の塑性ポテンシャル関数と共に用いることで以下のように求まる。

$$d\epsilon_{ij}^v = \Lambda \left\{ \frac{\bar{\eta}_{ij}}{\bar{\eta}} + (\bar{M} - \bar{\eta}) \frac{\delta_{ij}}{3} \right\} \left[\frac{\eta_{kl}^*}{\eta^*} - \eta^* \frac{\delta_{kl}}{3} \right] \frac{d\sigma_{kl}^*}{\sigma_m^*} \right\}$$

$$\Lambda = \frac{M^*{}^2}{G'(M^* - \eta^*)^2} \dots \dots \dots (25)$$

ここに、 $\bar{\eta}_{ij} = S_{ij} / (\sigma_m + b)$ 、 $\eta_{kl}^* = S_{kl}^* / \sigma_m^*$ である。

したがって、弾粘塑性構成式は式 (8) と式 (9) と式 (25) を用いることで導かれる。また、本構成式に含まれる材料定数は、 G (せん断弾性係数)、 K (体積弾性係数)、 τ (応力履歴パラメーター)、 b および σ_{mb} (塑性ポテンシャルパラメーター)、 M^* および G' (ひずみ硬化パラメーター) と \bar{M}_m (過圧密境界パラメーター) の 8 個である。

Table 1 Test conditions

Test No.	Temperature ℃	Confining Pressure kgf/cm ²	Initial Void Ratio	Strain Rate $\dot{\epsilon}_{11}$ %/min
S-1	-48.5	50.0	0.642	2.700
S-2	-51.5	50.0	0.654	0.290
S-3	-51.0	50.0	0.643	0.027
C-1	-49.0	100.0	0.644	2.700
C-2	-50.0	100.0	0.664	0.290
C-3	-52.0	100.0	0.645	0.027
E-1	-50.0	50.0	0.919	2.700
E-2	-49.0	50.0	0.929	0.290
E-3	-50.0	50.0	0.930	0.027
T-1	-10.0	50.0	0.651	2.700
T-2	-12.5	50.0	0.655	0.290
T-3	-10.0	50.0	0.641	0.027

Table 2 Material parameters

Test No. of Series	E kgf/cm ²	K kgf/cm ²	G'	σ_{mb} kgf/cm ²	b kgf/cm ²	M_m^*	\bar{M}_m	τ_0 sec	a
S-1,2,3	100000	16000	200	10000	400	1.7	1.6	130	0.92
C-1,2,3	80000	21060	200	10000	400	1.5	1.4	75	0.92
E-1,2,3	64500	16000	200	10000	400	1.7	1.6	110	0.92
T-1,2,3	20000	6000	200	10000	400	1.5	1.4	40	0.72

3. 凍土の三軸試験結果のシミュレーション

前章で誘導した凍土の弾粘塑性構成式の適用性を、Shibata ら¹⁶⁾が凍結豊浦砂について種々の条件下 (土粒子の詰まり具合、温度、載荷ひずみ速度、拘束圧) で行った定ひずみ速度三軸圧縮試験結果をシミュレーションすることで検討する。

(1) パラメーターの決定

実験条件を Table 1 に、シミュレーションに用いた材料定数を Table 2 に示すが、材料定数の決定は以下の手順によった。なお、応力履歴パラメーター τ 以外の材料定数はひずみ速度に依存しないと仮定し、2.7%/min のひずみ速度を基準ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_0$ として、それに対して決定される定数の他のひずみ速度に対する実験結果にも適用できるものとする。

1) せん断弾性係数 G と体積弾性係数 K は応力-ひずみ曲線の初期接線係数として直接求める。なお、ヤング係数 E は、せん断弾性係数 G と体積弾性係数 K から決定でき、 E と K を Table 2 に与えた。

2) 塑性ポテンシャルパラメーター、 b と σ_{mb} は大ひずみ領域におけるダイレイタンス量を表現できるように決めるが、本凍結砂に対しては $b = 400$ kgf/cm²、 $\sigma_{mb} = 10,000$ kgf/cm² と求まった。

3) ひずみ硬化則におけるパラメーター M^* は残留強度状態での応力比 η^* から Table 2 のように、 G' はひずみ軟化を示さない高い温度 (-10°) の応力-ひずみ関係

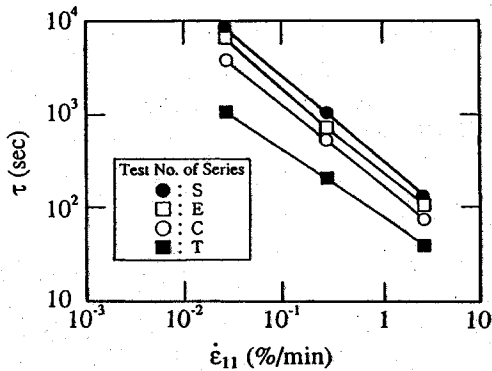


Fig.2 Stress history parameter τ vs. strain rate $\dot{\epsilon}_{11}$

から $G'=200$ と決定した。

4) 過圧密境界パラメーター \bar{M}_m は最大体積圧縮状態での応力比 $\bar{\eta}$ の値として Table 2 のように決定した。

5) 残る応力履歴パラメーター τ と関数 g は以下のように決定する。まず、 $g=1.0$ すなわち $dz=dt$ として応力履歴パラメーター τ を決定する。この時、ピーク強度が実験結果と一致するように各ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{11}$ に対する応力-ひずみ曲線の試行によるカーブフィティングにより最適値としての τ を決定する。このようにして求められた τ を τ' としておく。この τ' をひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{11}$ に対してプロットすると Fig.2 が求まる。Fig.2 より、ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{11}=2.7\%/min=\dot{\epsilon}_0$ を基準ひずみ速度として、それに対する τ を τ_0 とすると、次の関係式が成立する。

$$\tau' = (\dot{\epsilon}_{11}/\dot{\epsilon}_0)^{-a} \tau_0, a > 0 \dots\dots\dots (26)$$

一方、式 (5) あるいは式 (A-5) で与えられる応力履歴テンソル σ_{ij} は dz/τ によって決まるから、 τ に式 (26) の τ' を代入すると次の関係式が求まる。

$$\frac{dz}{\tau'} = \frac{dt}{\tau} = (\dot{\epsilon}_{11}/\dot{\epsilon}_0)^a \frac{dt}{\tau_0} \dots\dots\dots (27)$$

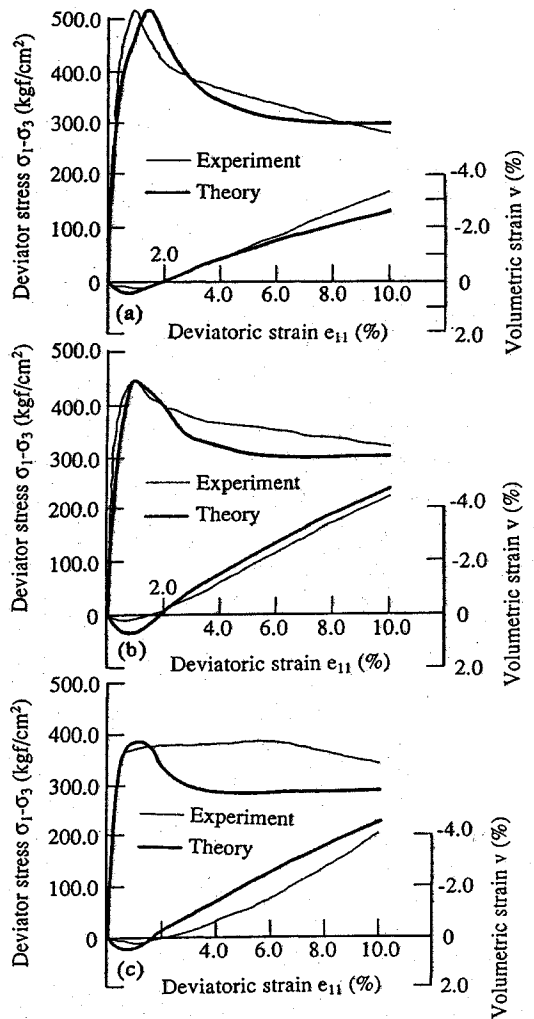
式 (7) と式 (27) を比較することで、

$$g = g(\dot{\epsilon}_{11}) = (\dot{\epsilon}_{11}/\dot{\epsilon}_0)^a \dots\dots\dots (28)$$

で与えられる。また、このとき求められた τ_0 をひずみ速度によらない材料固有の τ とする。Table 2 には、 τ と Fig.2 から求まる a を与えてある。

(2) 凍結砂の典型的な応力-ひずみ関係

Fig.3 (a) は case(S-1) の軸差応力-偏差ひずみおよび体積ひずみ-偏差ひずみ関係である。軸差応力はひずみの増加とともに増大し、最大強度に達した後、応力は減少に転じ最終的には残留強度に落ち着く、いわゆる典型的なひずみ硬化-軟化挙動を示している。体積ひずみは、最大強度近傍で圧縮から膨張に転じている。提案する構成式は、軸差ひずみ-偏差ひずみならびに体積ひずみ-偏差ひずみ関係双方とも、よく表現できることが明らかである。

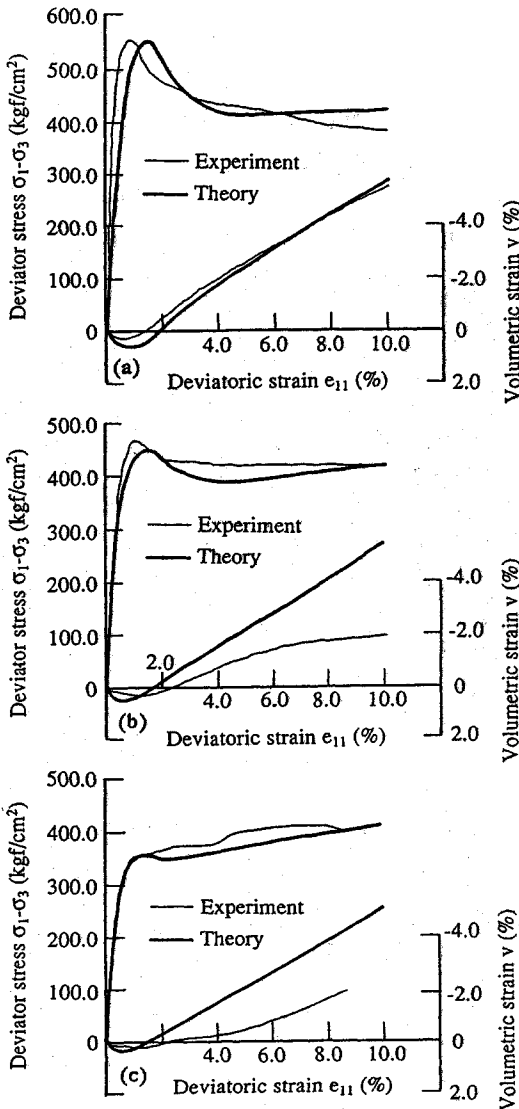


(a) test no. S-1 ($T=-48.5^\circ\text{C}$, $\sigma_3=50\text{ kgf/cm}^2$, $\dot{\epsilon}_{11}=2.7\%/min.$)
 (b) test no. S-2 ($T=-51.5^\circ\text{C}$, $\sigma_3=50\text{ kgf/cm}^2$, $\dot{\epsilon}_{11}=0.29\%/min.$)
 (c) test no. S-3 ($T=-51.0^\circ\text{C}$, $\sigma_3=50\text{ kgf/cm}^2$, $\dot{\epsilon}_{11}=0.027\%/min.$)

Fig.3 Stress-Strain relationship for test series S

(3) ひずみ速度効果

Figs.3 (b), (c) は case(S-1) と同じ温度 (-50°)、拘束圧 (50 kgf/cm^2) で、ひずみ速度を変えたときの実験結果と理論曲線を示している。ひずみ速度が低くなるとともに、最大強度は低下し、最大強度と残留強度の差が小さくなる。このようなひずみ速度効果は、Fig.2 に示すように τ を変化させることで表現できる。求めた理論曲線は、おおむね実験曲線を表現できているが、ひずみ速度の小さい Fig.3 (c) の case(S-3) では実験曲線には顕著なひずみ軟化が見られない。この実験事実は Fig.4 (c) と Fig.5 (c) の他の case(C-3, E-3) でもみられ、ひずみ速度が小さい場合には氷の粘性抵抗の発現によって、軟化が抑制されるためと考えられる。このような効果は、将来別途構成式に取り入れる必要がある。

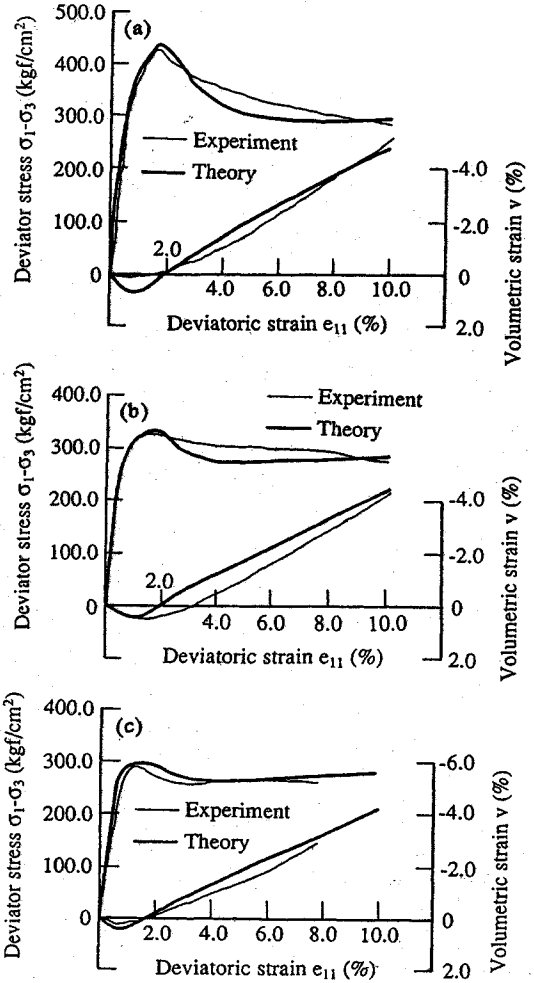


(a) test no. C-1 ($T = -49.0^{\circ}\text{C}$, $\sigma_3 = 100 \text{ kgf/cm}^2$, $\dot{\epsilon}_{11} = 2.7\%/ \text{min.}$)
 (b) test no. C-2 ($T = -50.0^{\circ}\text{C}$, $\sigma_3 = 100 \text{ kgf/cm}^2$, $\dot{\epsilon}_{11} = 0.29\%/ \text{min.}$)
 (c) test no. C-3 ($T = -52.0^{\circ}\text{C}$, $\sigma_3 = 100 \text{ kgf/cm}^2$, $\dot{\epsilon}_{11} = 0.027\%/ \text{min.}$)

Fig.4 Stress-Strain relationship for test series C

(4) 拘束圧の影響

拘束圧が 50 kgf/cm^2 の Fig.3 (S-1, S-2, S-3) と拘束圧が 100 kgf/cm^2 の Fig.4 (C-1, C-2, C-3) を比較することで、拘束圧の影響を検討しよう。拘束圧が高くなると、残留強度は大きくなるが、最大強度の増加割合は残留強度ほどではない。最大強度はひずみ速度の影響をより強く受けるようである。拘束圧の影響は、Table 2 に示すように弾性係数 E 、 K と M^* および τ を変えることによって表すことができる。なお、理論曲線は拘束圧の影響をよく表現できている。



(a) test no. E-1 ($T = -50.0^{\circ}\text{C}$, $\sigma_3 = 50 \text{ kgf/cm}^2$, $\dot{\epsilon}_{11} = 2.7\%/ \text{min.}$)
 (b) test no. E-2 ($T = -49.0^{\circ}\text{C}$, $\sigma_3 = 50 \text{ kgf/cm}^2$, $\dot{\epsilon}_{11} = 0.29\%/ \text{min.}$)
 (c) test no. E-3 ($T = -50.0^{\circ}\text{C}$, $\sigma_3 = 50 \text{ kgf/cm}^2$, $\dot{\epsilon}_{11} = 0.027\%/ \text{min.}$)

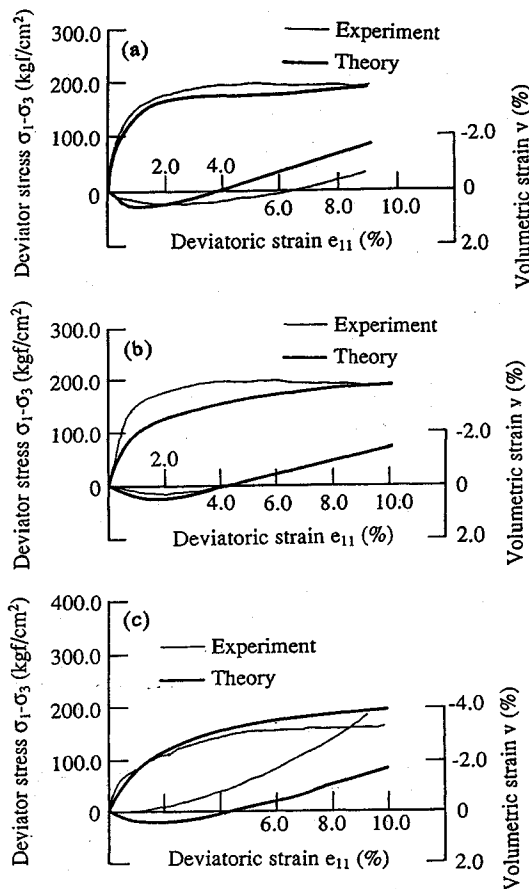
Fig.5 Stress-Strain relationship for test series E

(5) 初期間隙比の影響

単位体積中に土粒子の占める割合（初期間隙比）の影響を、初期間隙比が約 0.65 と小さい Fig.3 (S-1, S-2, S-3) と約 0.92 と大きい Fig.5 (E-1, E-2, E-3) との比較で調べると、初期間隙比が大きいと最大強度は低下するが残留強度には差が見られない。この挙動の差異は、弾性係数 E と τ を変化させることで対応でき、理論曲線はよく実験曲線を説明できている。

(6) 温度の影響

温度が -50° の Fig.3 (S-1, S-2, S-3) と -10° の Fig.6 (T-1, T-2, T-3) とを比較すると、温度が高くなるとひずみ軟化挙動がみられず、さらには、最大強度が低下し、体積膨張量が減少する。また、残留強度はひずみ速度に影響されない。この挙動の差異は、弾性係数 E 、 K と M^* および τ を変化させることで対応できる。



(a) test no. T-1 ($T = -10.0^\circ\text{C}$, $\sigma_3 = 50 \text{ kgf/cm}^2$, $\dot{\epsilon}_{11} = 2.7\%/ \text{min.}$)
 (b) test no. T-2 ($T = -12.5^\circ\text{C}$, $\sigma_3 = 50 \text{ kgf/cm}^2$, $\dot{\epsilon}_{11} = 0.29\%/ \text{min.}$)
 (c) test no. T-3 ($T = -10.0^\circ\text{C}$, $\sigma_3 = 50 \text{ kgf/cm}^2$, $\dot{\epsilon}_{11} = 0.027\%/ \text{min.}$)

Fig.6 Stress-Strain relationship for test series T

4. 結 論

本研究から得られる主な結論は以下のようである。

- 1) 式(6)および式(7)で定義づけたひずみ速度 z を用いた弾粘塑性構成式に基づいて、凍結砂の構成式を導いた。
- 2) 本構成式は、材料定数を適切に決定することで凍結砂の種々な力学挙動、すなわちひずみ硬化-軟化挙動、ひずみ速度効果をよく表現できることを示した。また、拘束圧、土粒子の初期間隙比および温度が構成式の材料定数に与える影響を明らかにした。

付録—1

応力履歴テンソル σ_{ij} の汎関数による表現は Coleman and Noll¹²⁾ にならない、縮退履歴と核関数の積で与えられることはすでに明らかにしている⁹⁾。ここでは例を挙げて、応力履歴テンソルが応力の全履歴の汎関数と仮定し

ない理由を説明する。そこでまず、応力の全履歴を考える。

式(4)で表される汎関数が線形汎関数とすると、Rieszの表現定理により次式のように有界変動関数 G によって表される。

$$\sigma_{ij} = \int_0^\infty \sigma_{ij}(z-s) dG(s) \dots\dots\dots (A-1)$$

ここに、 G は領域 ($0 \leq s < \infty$) における有界変動関数とする。 G が一回微分可能連続であるとするれば、 $z' = z - s$ と変数変換して一般的に次式のように表される。

$$\sigma_{ij} = G(0)\sigma_{ij}(z) + \int_{-\infty}^z \sigma_{ij}(z') dG(z-z') \dots\dots (A-2)$$

このとき、 z が z' の値域にある場合は、右辺第一項を考慮することになる。しかし、応力履歴テンソル σ_{ij} が現在の応力に陽に依存しない場合は、 z' の値域から z を除かなくてはならない。したがって、この場合、応力履歴テンソル σ_{ij} は結局次のように表されることになる。

$$\sigma_{ij} = \int_{-\infty}^z \sigma_{ij}(z') dG(z-z') \dots\dots\dots (A-3)$$

なお、 $\sigma_{ij}(z')$ の値域は $0 \leq z' < z$ であり、また式(A-3)の右辺は次式のような広義積分である。

$$\begin{aligned} & \int_0^z \sigma_{ij}(z') dG(z-z') \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_0^{z-\epsilon} \sigma_{ij}(z') dG(z-z') \dots\dots\dots (A-4) \end{aligned}$$

ここで、先の研究^{9), 10)} にならない、 τ を材料定数として単一の指数関数形の次の核関数

$$G(z) = -\exp(-z/\tau) \dots\dots\dots (A-5)$$

を導入すると、以下の積分方程式が求まる。

$$\sigma_{ij} = \int_0^z \frac{1}{\tau} \sigma_{ij}(z') \exp[-(z-z')/\tau] dz' \dots\dots (A-6)$$

以上のように、応力履歴テンソル σ_{ij} は縮退応力履歴テンソル σ_{ij}^* の汎関数であると仮定することではじめて式(A-6)の表現が可能である。逆に、応力の全履歴テンソル σ_{ij} の汎関数とすると、応力履歴テンソル σ_{ij} は縮退応力履歴テンソル σ_{ij}^* のみでなく、現在の応力テンソルの関数となり、式(A-6)のような表現とはならない。

付録—2

g はスカラー関数であるから、 g は以下に示すひずみ速度の不変量 I, II, III の関数と考えてよい。

$$I = \dot{\epsilon}_{ii}, \quad II = \dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}, \quad III = \dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{jk}\dot{\epsilon}_{ki}$$

また、 $g(x)$ が一次の同次関数とは、 a を定数として

$$g(ax) = ag(x)$$

となることであるから、 $a = 1/dt$ 、 x を $d\epsilon_{ij}$ に対応させると次式となる。

$$g(\dot{\epsilon}_{ij}) = g(d\epsilon_{ij})/dt$$

したがって、式(6)は $dz=g(d\epsilon_{ij})$ となり、 dz が時間増分に依存しない。すなわち、構成式は速度非依存となる。

一次の同次関数の例としては次のような関数が考えられる。

$$g(\dot{\epsilon}_{ij}) = bI + c\sqrt{II} + d\sqrt[3]{III}$$

ここに、 b, c, d は材料定数である。

参 考 文 献

- 1) Ladanyi, B. : Mechanical behaviour of frozen soils, *Mechanics of Structured Media, Part B*, ed. by A.P.S. Selvadurai, pp.203~245, 1981.
- 2) Vialov, S.S. : Rheological properties and bearing capacity of frozen soils, *USA Cold Regions Research and Engineering Laboratory, Translation 74*, 1959.
- 3) Sayles, F.H. : Triaxial constant strain rate tests and triaxial creep tests on frozen Ottawa sand, *Proc. 2nd Int. Permafrost Conf., Yakutsk, USSR*, pp.384~391, 1973.
- 4) Andersland, O.B. and Al-Nouri, I. : Time dependent strength behavior of frozen soils, *J. Soil Mech. and Foundation Div., ASCE*, 96SM(4), pp.1249~1265, 1970.
- 5) Fish, A.M. : Kinetic nature of the long-term strength of frozen soils, *Proc. 2nd Int. Symp. on Ground freezing, Trondheim, Norway*, pp.95~108, 1980.
- 6) Assur, A. : Some promising trends in ice mechanics, *Physics and Mechanics of Ice*, ed. by P. Tyyde, *Proc. IUTAM Symp., Springer-Verlag, Copenhagen*, pp.1~15, 1979.
- 7) Ting, J.M. : Tertiary creep model for frozen sands, *ASCE J. of Geotech. Engng.*, 109(7), pp.932~945, 1983.
- 8) Adachi, T. and Oka, F. : A constitutive model for frozen sand, *Proc. 6th Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, Innsbruck, Balkema Pub. Co.*, Vol.1, pp.727~732, 1988.
- 9) Oka, F. : Elasto-viscoplastic constitutive equations of geologic materials with memory, *Computer and Geotechnics*, Vol.1, No.1, pp.59~69, 1985.
- 10) 足立紀尚・岡二三生 : 軟岩のひずみ軟化型弾塑性構成式, *土木学会論文集*, No.445-III-18, pp.9~16, 1992.
- 11) Valanis, K.C. : A theory of viscoplasticity without a yield surface, *Arch. Mech. Stos.*, Vol.23, No.4, pp.517~533, 1971.
- 12) Coleman, B.D. and Noll, W. : Foundation of linear viscoelasticity, *Review Modern Phys.*, Vol.33, pp.239~249, 1961.
- 13) Coleman, B.D. : On thermodynamics, strain impulses and viscoelasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol.17, pp.230~254, 1964.
- 14) Tokuoka, T. : One-dimensional failure of materials with memory, *Acta Mechanica*, Vol.18, pp.193~200, 1973.
- 15) Naghdi, P.M. : Stress-strain in plasticity and thermoplasticity, *Proc. 2nd Symp. on Naval Structural Mechanics*, Pergamon Press, pp.121~169, 1960.
- 16) Shibata, T., Adachi, T., Yashima, A., Takahashi, T. and Yoshioka, I. : Time-dependent and volumetric change characteristics of frozen sand, *Proc. 4th Int. Symp. on Ground Freezing, Sapporo, Balkema Pub. Co.*, pp.173~179, 1985.

(1991.7.11 受付)

AN ELASTO-VISCOPLASTIC CONSTITUTIVE MODEL FOR FROZEN SAND

Toshihisa ADACHI and Fusao OKA

An elasto-viscoplastic constitutive model for frozen sand is proposed based on the elasto-viscoplasticity theory incorporating the new time measure. The proposed model can describe a number of features of the mechanical behavior of the medium, such as rate sensitivity and strain softening under the loading conditions of triaxial compression. The effect of temperature, ambient pressure and the concentration of soil particles on the mechanical behaviors well as the constitutive parameters are also discussed.