

投稿論文 (和文)
PAPERS

弾性多層構造の逆解析におけるモデル誤差・測定誤差に対する感度

松井邦人*・井上武美**・三瓶辰之***

逆解析により未知パラメータを推定するとき、推定値はモデルの誤差と計測値の誤差の影響を受ける。これらの影響度が分かれば、モデルおよび測定値に必要な精度をあらかじめ知ることができる。本研究は、最適化問題の最適解の感度の考え方を利用し、このような誤差が推定値に与える影響度（感度）の計算式を誘導している。そして、線形多層構造を対象として、層厚、ポアソン比、表面たわみの誤差が、各層の推定弾性係数に与える感度を定量的に示した。

Keywords : sensitivity of model errors elastic multilayered structure sensitivity of measurement errors inverse analysis objective function

1. はじめに

土質工学・地盤工学に関わる諸問題を解析するときには、何らかのモデル化がなされる。即ち、モデルの幾何学的形状を与え、モデルを構成している材料の物性値及び力学的な特性が必要となる。しばしば物性値の決定には、室内試験、現位置試験が行われる。しかし、物性値は常に一定の値をとるのではなく、環境条件、荷重条件等により変化する。桜井・武内等¹⁾はトンネル工事にもなう地盤のゆるみの広がりを変位計測から推定している。青木・嘉門等²⁾は地下水位の変動を観測し、不均質地盤の帯水層定数を同定している。斉藤・古賀等³⁾は掘削工事にもなう山留め壁に作用する外力の推定を行っている。また、Arai等⁴⁾及び村上・長谷川等⁵⁾は測定変位より地盤のヤング係数、ポアソン比を決定する方法を提案している。著者等⁶⁾も舗装構造の表面たわみの測定値より各層の弾性係数の推定方法を公表してきた。これらの研究は、測定データより未知パラメータの推定の仕方を記述しているが、このような問題に内在しているモデル誤差、測定誤差が未知パラメータの推定値に及ぼす影響については十分な検討が行われていない。逆解析は通常、測定値と解析値の不一致度の尺度を、できるだけ小さくなるように未知パラメータを決定するという一種の最適化問題である。従って、未知パラメータの推定値は最適解に対応しており、このパラメータの感度は最適解の感度^{7),8)}と見なすことができる。

本研究では弾性多層構造を対象として、モデル誤差、たわみの測定誤差が未知パラメータの推定値に及ぼす影響（感度）を求める方法を誘導する。この結果、モデル

誤差、測定誤差が未知パラメータの推定値に大きく影響するかどうか、どの誤差の影響が大きいのか、あるいは未知パラメータの推定値にどの程度の誤差が含まれている可能性があるのか推定できる。また逆に、推定値にある精度が要求される場合、モデル化の許容誤差や測定値の許容誤差をどの程度に設定すべきかあらかじめ決めることが可能となる。

2. 逆解析と評価関数

本研究で対象とする弾性多層構造モデルは、最下層が無限で、その上に一層以上の平行で有限な厚さの層から構成されている軸対称構造である。図-1に3層構造の例を示した。本逆解析問題では、各層の層厚、ポアソン比は与えられているものとし、層弾性係数だけを未知パラメータと考えている。表面に円形等分布する荷重を作用させ、その周辺数カ所の測点で表面たわみを測定する。そして、測定たわみと解析たわみとの差が限りなく小さくなるように層弾性係数を決定している。従って本逆解析問題は、多層構造の挙動が微小線形弾性理論に基づくという制約の下で、評価関数を最小化する一種の最適化問題である。いま未知パラメータである第 j 番目の弾性係数を $x_j (j=1, 2, \dots, M)$ 、測点 i での測定たわみを $u_i (i=1, 2, \dots, N)$ 、そして対応する解析たわみを z_i で表すものとする。ただし、 $x = \{x_j\}$ は $M \times 1$ のベクトルである。また測定点数を N 個とすると、評価関数は一般に、

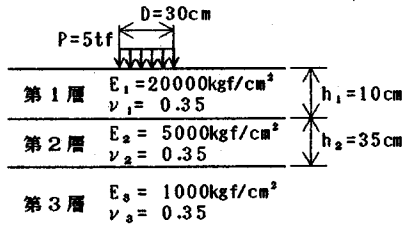
$$J_0 = \sum_{i=1}^N w_i \{u_i - z_i(x)\}^2 \dots \dots \dots (1)$$

と書くことができる。 w_i は重み係数であり、基本的には精度の良い測定値には大きな重みを、精度の悪いものには小さな重みを付与する。いま、測点 i での測定たわみの平均値を $u_i (i=1, 2, \dots, N)$ 、分散を σ_i^2 とすると、 $w_i = \sigma_0^2 / \sigma_i^2$ とすることが提案されている⁹⁾。このとき式(1)は

* 正会員 Ph.D 東京電機大学教授 理工学部建設工学科 (〒350-03 埼玉県比企郡鳩山町石坂)

** 正会員 日本舗道(株) 総合技術部技術管理課長

*** 正会員 日本舗道(株) 総合技術部生産技術第2グループ



図一 3層の弾性多層構造モデル

$$J_1 = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \{u_i - z_i(x)\}^2 \dots \dots \dots (2)$$

σ_0^2 は w_i を無次元化するために選定し、すべての測点で同一の値をとる任意の定数である。すべての測点で分散が同じであるとき $\sigma_0^2 = \sigma_i^2$ と選定できる。このとき式(2)は、

$$J_2 = \sum_{i=1}^N \{u_i - z_i(x)\}^2 \dots \dots \dots (3)$$

となる。一方、すべての測点で変動係数 δ が同じであるとき、 $\delta = \sigma_i / u_i$ と書くことができる。そこで $\sigma_0^2 = \delta^2$ と選定すると式(2)は、

$$J_3 = \sum_{i=1}^N \left[1 - \frac{z_i(x)}{u_i} \right]^2 \dots \dots \dots (4)$$

となる。式(3)は各測点でたわみ誤差の2乗和であることに對し、式(4)は各測点のたわみの不一致度の2乗和と考えることができる。式(4)では、各項は1との比較になっており各測定値は同じ重要度を持つと考えられるが、式(3)は式(4)の各項に u_i^2 を掛けたものとなっている。すなわち式(4)と比較すると、式(3)はたわみの大きな測点を重視した評価関数となっていると言える。式(1)の評価関数は x の非線形関数となり、陽に式(1)の最小値とそのときの x の値を決定することはできず、繰り返し計算を必要とする。そこで式(1)に Gauss-Newton 法^{6),9)}を適用すると、

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N w_i \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \frac{\partial z_i}{\partial x_k} \delta x_j = \sum_{i=1}^N \frac{\partial z_i}{\partial x_k} w_i \{u_i - z_i(x)\} \quad (k=1, 2, \dots, M) \dots \dots \dots (5)$$

となる。上式は未知パラメータ x の補正量 δx に関する線形連立方程式である。 δx の大きさが十分に小さいときは計算を打ち切り、そうでないときは $x + \delta x \rightarrow x$ と補正し再度計算を行う。この作業を x が収束するまで繰り返し行う。しかし、逆解析に用いたモデルや測定値に誤差が含まれていると、得られた x はその誤差を反映したものとなる。その誤差の影響は評価関数によっても異なる。そこで評価関数として式(3)と式(4)を用い、誤差が x の推定値に及ぼす影響、即ち誤差に対する未知パラメータ x の感度を誘導しその精度を検討する。

3. 未知パラメータに対する誤差の感度

弾性多層構造の逆解析では、表面に荷重 p を載荷し、その周辺で測定された表面たわみ $u_i (i=1, 2, \dots, N)$ から各層の剛性(弾性係数) x を推定する。この推定値に影響を及ぼす要因は：1) 層厚の誤差、2) ポアソン比の誤差、3) 表面たわみの測定値の誤差、4) 載荷荷重の測定値の誤差、5) たわみ測定位置の誤差が考えられる。これらの誤差に対する未知パラメータ x の感度は計算可能であるが、以下には1), 2) 及び3) の場合についてのみ記す。

(1) 層厚, ポアソン比の誤差に対する感度

l (層厚： $l=1, 2, \dots, M-1$; ポアソン比： $l=1, 2, \dots, M$) 番目の層の層厚あるいはポアソン比にのみ誤差があり、その他には全く誤差がないものとする。解析たわみ z_i は x だけでなくこの誤差を含むパラメータ y_l (層厚あるいはポアソン比) の関数 $z_i(x, y_l)$ と考えることができる。 x を逆解析して得られた結果とすると、この y_l が x に及ぼす影響は比較的小さいと仮定して差し支えない。このとき、 $x \approx \bar{x} + \frac{\partial x}{\partial y_l} \Delta y_l$ とすることができる。

ここに \bar{x} は x の真値であり、 Δy_l は y_l に含まれる誤差とする。第 i 番目の測定位置での解析たわみは \bar{y}_i を y_i の真値として、

$$z_i(x, y_l) = z_i\left(\bar{x} + \frac{\partial x}{\partial y_l} \Delta y_l, \bar{y}_i + \Delta y_i\right) \approx z_i(\bar{x}, \bar{y}_i) + \sum_{j=1}^M \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \lambda_{ji} \Delta y_j + \frac{\partial z_i}{\partial x_l} \Delta y_l \dots \dots \dots (6)$$

但し、

$$\lambda_{ji} = \frac{\partial x_j}{\partial y_l} \dots \dots \dots (7)$$

λ_{ji} が x_j のパラメータ y_l の誤差に対する感度である。いま、 Δy_l は誤差であり決して大きくはないが任意の大きさである。このことを考慮して式(6)を式(1)に代入すると、 J_0 を最小とするための必要条件 $\frac{\partial J_0}{\partial \lambda_{ki}} = 0 (k=1, 2, \dots, M)$ より

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N w_i \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \frac{\partial z_i}{\partial x_k} \lambda_{ji} = - \sum_{i=1}^N w_i \frac{\partial z_i}{\partial y_l} \frac{\partial z_i}{\partial x_k} \quad (k=1, 2, \dots, M) \dots \dots \dots (8)$$

上式は λ_{ki} に関する線形連立方程式であり容易に解くことができる。層厚、ポアソン比の誤差はモデル誤差であり、誤差の種類からすると系統誤差である。従って測定回数を増加しても除去できない。本手法で得られた感度係数が大きいとき、モデル化に十分配慮する必要がある。

(2) 表面たわみの測定誤差に対する影響

測点 $l (l=1, 2, \dots, N)$ の測定たわみに誤差を含んでいるものとする、測点 l のたわみは $u_l + \Delta u_l$ と書くこと

ができる。式(1)の評価式 J_0 は、

$$J_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N w_i \left\{ u_i - z_i \left(\bar{x} + \frac{\partial x}{\partial u_i} \Delta u_i \right) \right\}^2 + \frac{1}{2} w_i \left\{ u_i + \Delta u_i - z_i \left(\bar{x} + \frac{\partial x}{\partial u_i} \Delta u_i \right) \right\}^2 \dots \dots \dots (9)$$

と書くことができる。いま、 $z_i(x)$ をTaylor展開し一次の項までを採用すると

$$z_i \left(\bar{x} + \frac{\partial x}{\partial u_i} \Delta u_i \right) \cong z_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^M \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial u_i} \Delta u_i \dots \dots \dots (10)$$

ここに、

$$\Gamma_{ji} = \frac{\partial z_i}{\partial u_i} \dots \dots \dots (11)$$

と置くと Γ_{ji} が測点*l*における測定誤差に対する x_j の感度である。また、 Δu_i は誤差でありその大きさは任意であることを考えると、式(1)が最小となるための必要

条件 $\frac{\partial J_0}{\partial \Gamma_{ki}} = 0$ より、

$$\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N w_i \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \frac{\partial z_i}{\partial x_k} \Gamma_{ki} = w_i \frac{\partial z_i}{\partial x_k} \dots \dots \dots (12)$$

この式は Γ_{ki} に関する線形連立方程式となり容易に解くことができる。測定たわみの誤差は言わば偶然誤差であり、各測点で独立とみなせるものとする。また、測定誤差は通常は正規分布すると考えられ、測定回数を増加することにより誤差の影響を減少させることが可能である。

4. 変数変換

3節では、モデル誤差、測定誤差が未知パラメータの推定値に及ぼす影響度、即ち誤差に対する未知パラメータの感度について一般的な理論式を誘導した。その中では、式(6)や式(10)に示したように解析たわみをTaylor展開して、その一次近似を用いている。従って自ずからその精度には限界がある。最適設計の研究の中でこのような近似計算の精度を向上させるために変数変換を行っている¹⁰⁾。図-1のモデルでは未知パラメータ x_j は $E_j(j=1,2,3)$ であるが、変数変換により一般に $E_j = f(x_j)$ と書くことができる。しかし、 $f(x_j)$ を決定することは必ずしも容易なことではない。そこでしばしば $E_j = x_j^\alpha$ が用いられる。特に $\alpha = -1$ のときは逆変数と呼んでいる。また、 $\alpha = 1/2$ や $\alpha = 2$ もしばしば用いられる。本研究では $E_j = e^{x_j}$ を用いることにする。しかしこのような選択は特に根拠がない。そのような変換を用いる理由としては、 $E_j(j=1,2,3)$ の値が1000~20000 kgf/cm² (98 MPa~1960 MPa)とかなりの幅があり、 x_j を用いることによりオーダーがほぼ同じであること、また5節の結果が示しているように変換を行わないとき感度係数が極端に大きかったり、小さかったりすること

表-1 未知パラメータに対するたわみの感度

	たわみの測定位置					
	0.0cm	20.0cm	45.0cm	90.0cm	150.0cm	
変数 感度	$\frac{\partial z_1}{\partial x_1}$	-3.768×10^{-7}	-1.099×10^{-7}	-4.983×10^{-8}	-2.217×10^{-8}	-3.679×10^{-8}
	$\frac{\partial z_1}{\partial x_2}$	-3.650×10^{-8}	-2.351×10^{-8}	-7.588×10^{-7}	-3.744×10^{-8}	7.804×10^{-9}
交換 を行	$\frac{\partial z_1}{\partial x_3}$	-2.217×10^{-5}	-2.158×10^{-5}	-1.954×10^{-5}	-1.489×10^{-5}	-9.996×10^{-6}
	$\frac{\partial z_2}{\partial x_3}$	-7.531×10^{-3}	-2.200×10^{-3}	-9.944×10^{-4}	-4.432×10^{-4}	-7.213×10^{-5}
変数 感度	$\frac{\partial z_2}{\partial x_1}$	-1.824×10^{-2}	-1.174×10^{-2}	-3.795×10^{-3}	-1.930×10^{-4}	3.858×10^{-4}
	$\frac{\partial z_2}{\partial x_2}$	-2.216×10^{-2}	-2.156×10^{-2}	-1.952×10^{-2}	-1.486×10^{-2}	-9.971×10^{-3}

(単位: cm³/kgf)

があるが、上述の変換を行うことにより感度係数のこの極端さを緩和できるからである。さらに、逆解析を行うとき未知パラメータをあらかじめスケールしておくことも計算効率、計算精度を向上する上で検討に値する。

5. 例題とその結果

例題として図-1の3層モデルを用いた。5tfの荷重が表面に円形等分布(半径15cm)しており、荷重載荷点中心を含む5点、即ち載荷点中心から0.0, 20.0, 45.0, 90.0及び150.0cmの位置で表面たわみを測定するものとする。本来真値を知ることはできないが、ここでは便宜上図-1に示した層厚、ポアソン比を真値とする。各層の弾性係数を推定することは一種の逆解析であり、その方法は文献6)で詳述している。また表面たわみの測定値として、図-1で与えられている各層の弾性係数を用いて解析した結果を代用する。このたわみを基準たわみ、そして図-1のモデルを基準構造と呼ぶことにする。図-1の層弾性係数を未知として、基準たわみを用いて逆解析すると、当然のことであるが図-1に示された各層の弾性係数が得られる。しかし逆解析を行うとき、基準たわみや基準構造と若干異なる誤差を含んだ値を用いると、層弾性係数の推定値はこの誤差を反映したものとなる。ここでは逆解析を行うことなく感度係数を用いて誤差が混入したときの層弾性係数の値を推定している。そして、その推定値の精度を調べるため実際に逆解析して得られた結果と比較している。

(1) 感度係数

式(8)、(12)を用いてモデル誤差や測定誤差に対する未知パラメータ x_j の感度を計算するにあたり、未知パラメータに対するたわみの感度 $\frac{\partial z_i}{\partial x_j}$ を計算する必要がある。この感度計算を解析的に行うことが困難な場合、差分法を用いて行うことも可能である。表-1に変数変換なし($x_j = E_j$)と変数変換あり($x_j = \log E_j$)の場合について示した。符号が“正”であることは、“ x_j が増加すると z_i も増加する”ことを、また“負”であることは“ x_j が増加すると z_i が減少する”ことを意味して

表一 層厚誤差に対する未知パラメータの感度

変数	層厚	
	1層	2層
変換		
$\frac{\partial x_1}{\partial h_1}$	-2317.0	624.2
変換		
$\frac{\partial x_2}{\partial h_1}$	-199.7	-150.7
変換		
$\frac{\partial x_3}{\partial h_1}$	-0.3386	-5.829
変換		
$\frac{\partial x_1}{\partial h_2}$	-0.1160	0.03138
変換		
$\frac{\partial x_2}{\partial h_2}$	-0.03997	-0.03023
変換		
$\frac{\partial x_3}{\partial h_2}$	-3.321	-5.828
変換		
$\frac{\partial x_1}{\partial h_3}$	$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-3}$

(単位: kgf/cm²)

表三 ポアソン比誤差に対する未知パラメータの感度

変数	ポアソン比		
	1層	2層	3層
変換			
$\frac{\partial x_1}{\partial \nu_1}$	-16160	2043	-9661
変換			
$\frac{\partial x_2}{\partial \nu_1}$	-1580	1975	2023
変換			
$\frac{\partial x_3}{\partial \nu_1}$	-24.66	-55.93	-6.360
変換			
$\frac{\partial x_1}{\partial \nu_2}$	-0.8082	0.1008	-0.4857
変換			
$\frac{\partial x_2}{\partial \nu_2}$	-0.3163	0.3961	0.4060
変換			
$\frac{\partial x_3}{\partial \nu_2}$	-0.02465	-0.05617	-6.525
変換			
$\frac{\partial x_1}{\partial \nu_3}$			$\times 10^{-3}$

(単位: kgf/cm²)

表四 たわみ測定誤差に対する未知パラメータの感度

変数	たわみの測定位置				
	0.0cm	20.0cm	45.0cm	90.0cm	150.0cm
変換					
$\frac{\partial x_1}{\partial u_1}$	-4.554×10 ⁶	6.990×10 ⁶	2.083×10 ⁶	-2.556×10 ⁶	-1.590×10 ⁶
変換					
$\frac{\partial x_2}{\partial u_1}$	1.645×10 ⁶	-7.189×10 ⁶	1.276×10 ⁶	4.323×10 ⁶	2.942×10 ⁶
変換					
$\frac{\partial x_3}{\partial u_1}$	5.248×10 ³	-4.596×10 ³	-2.451×10 ⁴	-2.846×10 ⁴	-2.038×10 ⁴
変換					
$\frac{\partial x_1}{\partial u_2}$	-2.282×10 ²	3.506×10 ²	1.059×10	-1.288×10 ²	-7.982×10
変換					
$\frac{\partial x_2}{\partial u_2}$	3.311×10	-1.443×10 ²	2.552×10	8.694×10	5.905×10
変換					
$\frac{\partial x_3}{\partial u_2}$	5.234	-3.906×10 ⁻¹	-2.457×10	-2.856×10	-2.043×10

(単位: kgf/cm²)

いる。また、感度係数の絶対値は変化量の大きさを表しており、同表により最下層(3層目)の x_3 の変化が着目点の位置にかかわらず表面たわみに及ぼす影響が一番大きいことを示している。層厚 h_i の誤差に対する未知パラメータの感度を式(8)を用いて計算した結果を表一に示す。符号“正”は、実際の層厚が感度解析に用いた層厚より厚いとき未知パラメータの推定値も増加することを、また“負”は未知パラメータの推定値が減少することを意味している。

表三は、ポアソン比の誤差に対する未知パラメータの感度である。層厚の場合と同様で、符号“正”は実際のポアソン比が感度解析に用いたポアソン比より大きいとき未知パラメータの推定値も増加し、また逆に“負”は未知パラメータの推定値が減少することを意味している。表四はたわみの測定誤差に対する未知パラメータの感度である。“正”、“負”の符号の意味は層厚、ポアソン比と同様である。表一～表四の感度係数の大きさは、未知パラメータへの影響度、即ち大きさ1の誤差が存在するときの未知パラメータの推定値の変化量である。測定誤差の影響が最も大きく、次にポアソン比、層厚の順序になっている。しかし、たわみ誤差の大きさが0.01～0.001 mm、ポアソン比の誤差は0.1、層厚の誤差は5～10 mm程度であると考えられる^{11),12)}。従って個々の因子に含まれる誤差の大きさを考慮すると、未知パラメータの推定値に及ぼす影響は表一～表四の数値の大きさほど極端ではない。

(2) モデル誤差に対する感度の精度

逆解析に用いる構造モデルにおいて、既知として与えるモデルパラメータの正確な値は必ずしもわかってはいない。また感度解析からモデル誤差の影響は推定できるが、その誘導は1次近似に基づいている。そこで、その適用限界を調べるため誤差の大きさを変え、感度係数を用いた推定値と逆解析に基づく推定値を比較した。

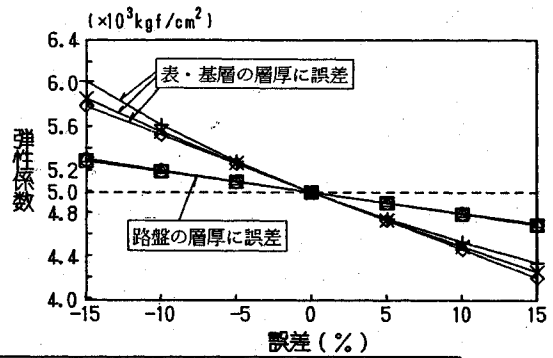
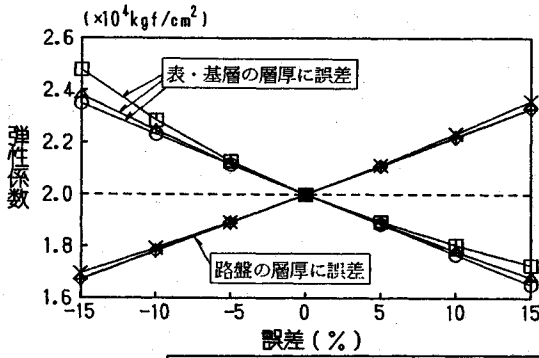
図一は、表・基層と路盤の層厚に図一のモデルに対して±5、±10、±15%の誤差が含まれるとき、それらの大きさと表・基層及び路盤の推定弾性係数の関係を

示している。いま、正しい層厚を実層厚、誤差を含んだ層厚を推定層厚と呼ぶことにする。図中、横軸の符号が正であることは、推定層厚が実層厚よりも厚いことを、負は薄いことを意味している。推定弾性係数は、実際に逆解析をした結果と3.で示した感度解析を用いて求めた結果を示している。図一(a)より、表・基層の推定層厚がその実層厚より厚いとき、表・基層の弾性係数を小さく推定し、逆に薄いとき大きく推定する。また、路盤の推定層厚がその実層厚より厚いときには、表・基層の推定弾性係数を大きく、薄いときには小さくなる。図一(b)より、表・基層及び路盤の推定層厚が実層厚より厚いとき、両層とも弾性係数を小さく推定し、薄いときは大きく推定することになる。推定層厚の実層厚との差が15%以内であるなら、逆解析結果と感度解析による推定値の差は10%弱となり、層厚の誤差の大きさがわかれば工学的に十分な精度でその弾性係数に及ぼす影響を推定できる。

図三は、推定に真値とは異なり、誤差を含んだポアソン比を用いたとき、そのポアソン比と推定弾性係数の関係を示している。ここでは、推定に用いたポアソン比を推定ポアソン比、正しいポアソン比を実ポアソン比と呼ぶことにする。各層厚とも実ポアソン比を0.35、推定ポアソン比を0.1、0.15、0.20、0.25、0.30、0.40、0.45としている。

図三(a)より、表・基層の推定ポアソン比が実ポアソン比より大きいとき、表・基層の弾性係数を低く推定し、逆に小さいとき高く推定することになる。また、路盤の推定ポアソン比がその実ポアソン比より大きいとき、表・基層の弾性係数を若干高く、小さいとき低く推定することになる。図三(b)より、表・基層の推定ポアソン比がその実ポアソン比より大きいとき、路盤の弾性係数をその真値より低く推定し、逆に小さいとき高く推定する。そして、路盤の推定ポアソン比が実ポアソン比より大きいとき、路盤の推定弾性係数は高く、逆に小さいときその推定弾性係数も低く評価することになる。

図一、三より、変数変換の効果は図三のポアソン比

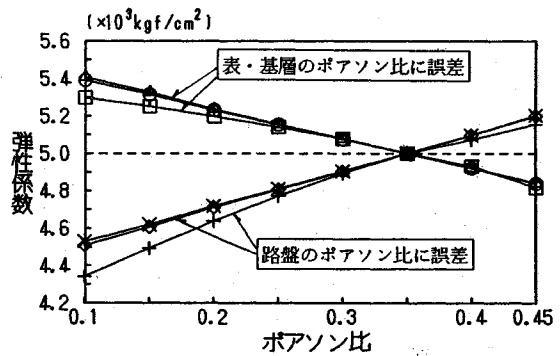
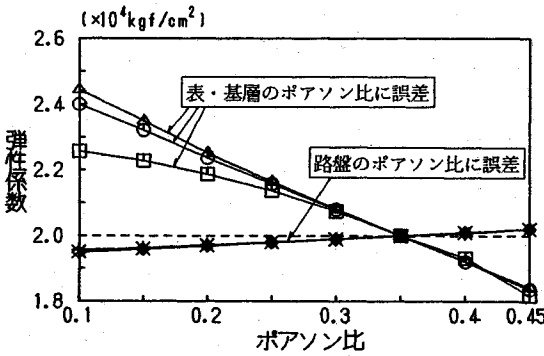


1層目の層厚誤差の影響；○:変数変換なし (表・基層) △:変数変換あり □:逆解析
 2層目の層厚誤差の影響；◇:変数変換なし (路盤) ×:変数変換あり +:逆解析

(a) 表・基層の推定弾性係数

(b) 路盤の推定弾性係数

図-2 表・基層と路盤の層厚誤差と推定弾性係数の関係



1層目のポアソン比の影響；○:変数変換なし (表・基層) △:変数変換あり □:逆解析
 2層目のポアソン比の影響；◇:変数変換なし (路盤) ×:変数変換あり +:逆解析

(a) 表・基層の推定弾性係数

(b) 路盤の推定弾性係数

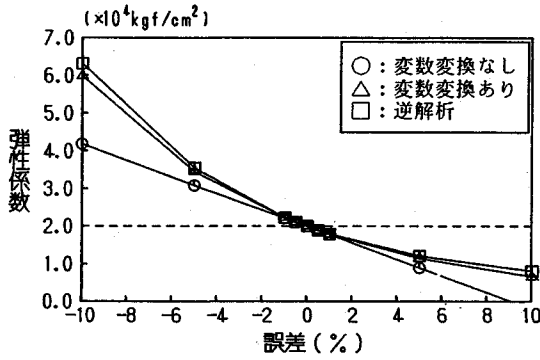
図-3 表・基層及び路盤の誤差を含んだポアソン比と推定弾性係数の関係

に誤差が含まれる場合に少し認められるが、特にその効果は顕著ではない。

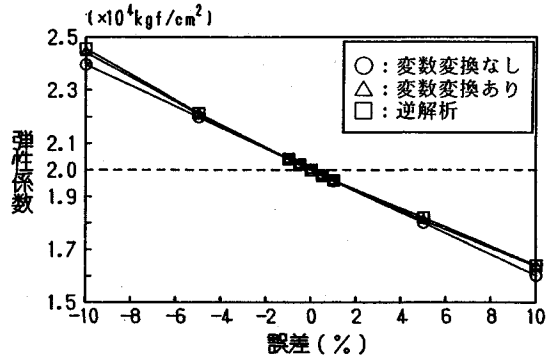
(3) 測定誤差の感度の精度

表-4のたわみ誤差に対する未知パラメータの感度を用いて、変数変換を行わない場合と行った場合について推定弾性係数を計算した。また、誤差を含んだ表面たわみに逆解析手法を適用して推定弾性係数を求めた。このとき、特定の測点における測定誤差の感度の精度を調べるため、測定誤差は1点にのみ含まれるものとし、他の測点では誤差がない(即ち、たわみの真値)として逆解析計算を行っている。ここでは、測定位置0 cm, 90 cmのたわみ測定値に誤差が含まれるときの結果だけを記すことにする。誤差の大きさは、図-1のモデルを解析して得られた値に対して、±0.5, ±1.0, ±5.0, ±10.0%とした。図-4は評価関数に式(3)を用いて、測定位置0 cmのたわみに誤差が含まれているとき、および90

cmの位置のたわみに誤差が含まれているときについて、それぞれの誤差の大きさと表・基層の推定弾性係数を3通りの方法で計算し、その結果を示している。そのうち1つは実際に誤差を解析たわみに加えた結果を用いて逆解析をしたものであり、残りの2つは感度解析の結果(変数変換ありと変数変換なし)を用いたたわみ誤差が混入したときの推定弾性係数を求めている。また図中、横軸の誤差が正であるということは、たわみの測定値がその真値より大きいことを、負であるということは逆にたわみの測定値がその真値より小さいことを意味している。この図から0 cmの位置の誤差は表・基層の推定弾性係数に大きく影響するが、90 cmの位置における誤差の影響は比較的小さいといえる。また変数変換の効果は、0 cmの位置の誤差の影響に顕著にあらわれている。変数変換を行わなければ、誤差が大きくなるほど逆解析結果と感度係数を用いて推定した結果の差が大きくな

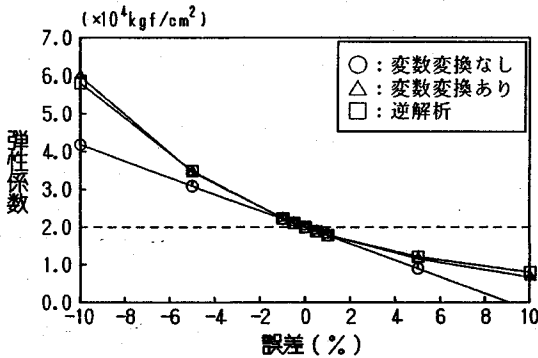


(a) 測定位置 0 cm にたわみ誤差が含まれるとき

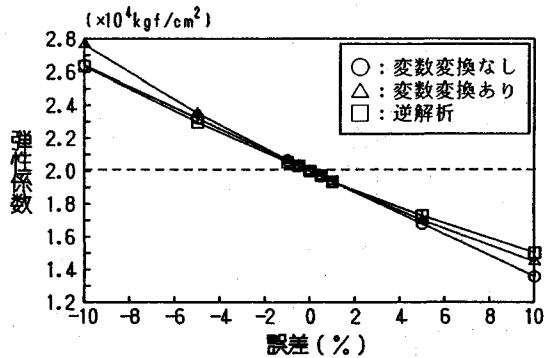


(b) 測定位置 90 cm にたわみ誤差が含まれるとき

図-4 たわみ誤差と表・基層の推定弾性係数の関係



(a) 測定位置 0 cm たわみ誤差が含まれるとき



(b) 測定位置 90 cm たわみ誤差が含まれるとき

図-5 たわみ誤差と表・基層の推定弾性係数の関係 (式 (4) を用いた場合)

る。しかし、10% 程度の誤差であれば感度解析より精度良く推定弾性係数を求めることができることを示している。たわみの測定値がその真値より小さいとき、表・基層の弾性係数はその正しい値より高く、逆にその真値より大きいとき、表・基層の弾性係数を低く推定することを示している。

最後に、測定誤差が評価関数の違いにより推定弾性係数にどのように影響するかを調べた。評価関数として式 (4) を用いて、測定位置 0 cm と 90 cm におけるたわみの測定値に含まれる誤差が、表・基層の推定弾性係数に及ぼす影響を図-5 に示した。測定位置 0 cm における測定誤差の影響は、図-4 と比べ図-5 が僅かばかり小さくなっていく。しかし、測定位置 90 cm では、誤差の影響は図-4 より図-5 において大きく現れる。一般にたわみが小さな測定位置に誤差が含まれるとき、式 (4) は式 (3) より表・基層の推定弾性係数へ若干大きく影響する。しかし、評価関数に関わらず 0 cm における誤差の影響が最も大きいため、式 (3) 及び式 (4) から求められる誤差の表・基層に及ぼす影響には顕著な差がない。

6. あとがき

構造同定においては、通常、モデルを与え測定値から未知パラメータを推定する。しかし、モデルは必ずしも対象構造物を精度良く表しているとは言い難い。Uzan 等は舗装の非破壊試験に対する実験計画的アプローチ¹³⁾ という論文の中で、モデル誤差 (系統誤差)、たわみ測定誤差 (偶然誤差) の影響を推定弾性係数の分散の形で示しているが、その中に含まれている誤差に対する感度を直接計算することができないと述べ、定量的に結果を示し得ていない。本論文は、それらの誤差の影響を誤差に対する感度という形で定量的に求める方法を提示した。そして誤差の影響を実際に逆解析を繰り返すことなく、誤差に対する感度から未知パラメータへの影響度を評価できることを示した。さらに測定誤差に対する感度係数を用い、Uzan 等が示した未知パラメータの最確値の分散を指標として、測定点数とそれらの位置について複数の候補を選択したなかで最適な候補を判断できるであろう。

参 考 文 献

- 1) 桜井春輔・武内邦文：トンネル掘削時における変位計測結果の逆解析法，土木学会論文報告集，第337号，pp.137~145，1983年9月。
- 2) 青木一男・嘉門雅史：不均質地盤における帯水層定数の同定について，土木学会論文報告集，第382号，pp.91~99，1987年6月。
- 3) 斉藤悦郎・古賀重利：EK-WGI法による山留め壁の作用外力の同定，土木学会論文報告集，第380号，pp.459~465，1987年4月。
- 4) Arai, K., Ohta, H. and Yasui, T. : Simple Optimization Techniques for Evaluating Deformation Moduli from Field Observations, Soils and Foundations, Vol.23, No.1, pp.107~113, 1983.
- 5) 村上章・長谷川高士：Kalman フィルター有限要素法による逆解析と観測節点配置，土木学会論文報告集，第388号，pp.227~235，1987年12月。
- 6) 松井邦人・井上武美・三瓶辰之：舗装各層の弾性係数を表面たわみから推定する一手法，土木学会論文集，第420号/V-13, pp.107~114, 1990年8月。
- 7) Vanderplaats, G.N. and Yoshida, N. : Efficient Calculation of Optimum Design Sensitivity, AIAA Journal Vol.23, No.11, 1985.
- 8) 山田善一編：構造システムの最適化—理論と応用—，構造工学シリーズ1，土木学会，1988.
- 9) 中川徹・小柳義雄：最小二乗法による実験データ解析—プログラムSALS, UP 応用数学選書7, 東京大学出版会, 1982年.
- 10) 杉本博之・山村和人：骨組構造物の最適設計における応力近似モデルについて，構造工学論文集，Vol.35A, pp.347~359, 1989年3月。
- 11) 松野三朗：講座「アスファルト舗装」，舗装，Vol.4, No.11, pp.23~26, 建設図書，1969年。
- 12) 姫野賢治・丸山暉彦・林正則・菅原義昭：FWDによる舗装のたわみ測定システムの開発に関する研究，東京工業大学土木工学科研究報告，No.38, pp.51~67, 1987年12月。
- 13) Uzan, J. and Lytton, R.L. : Experiment Design Approach to Nondestructive Testing of Pavements, Proc. of ASCE, Vol.115, No.5, pp.505~520, Sept., 1989.
(1990.6.13 受付)

SENSITIVITY ANALYSIS FOR STRUCTURAL IDENTIFICATION OF ELASTIC MULTILAYERED SYSTEM WITH RESPECT TO MODEL AND MEASUREMENT ERRORS

Kunihito MATSUI, Takemi INOUE and Tatsuyuki SAMPEI

Although various inverse analysis techniques for structural and geomechanics problems have been presented, it has not been developed to compute the effect of model and measurement errors on estimated parameters, which is called the sensitivity of errors in structural identification problems. This paper is devoted to the development of the sensitivity analysis based on the sensitivity of optimal solution. To demonstrate their effectiveness and accuracy, the procedures are applied to a multilayered system to evaluate the sensitivities of errors in layer thickness, Poisson's ratio and measured deflections on estimated layer stiffnesses. The procedures presented herein are applicable to other structural identification problems.