

時間領域のモード解析による振動系の動的特性の同定とその適用*

安藤幸治**・岩楯敞広***

振動系の動的特性はモード定数や諸物性値等により特徴付けられるが、これらは観測・試験の結果から逆解析的に決定可能であり、本論文ではその一手法として時間領域データを対象としたモード定数の同定手法を提案した。適用例として周波数領域ではノイズの影響を受けて系の動特性を把握するには困難が伴う地震波観測データを取り上げ、本手法の有効性を検証した。

Keywords : modal analysis, inverse problem, least squares method, Fourier transformation, model identification

1. はじめに

地震観測や振動試験は、地盤あるいは構造物の動的特性を把握し、その耐震性を検証するために実施される。振動系の動的特性は、モード定数（固有値と固有ベクトル）や諸物性値等により特徴付けられるが、これらは観測・試験の結果から逆解析的に決定可能であり、既に周波数領域データ（伝達関数）を対象とした解析手法^{1),2)}が開発されている。

本論文は、上記手法に変えて時間領域データ（時系列データ）を対象としたモード定数の同定手法について述べたものである。本手法の適用例として周波数領域では系の動特性を把握するには困難が伴う地震波観測データを取り上げる。

通常地震波観測データの場合は、有限フーリエ級数展開に基づくスペクトル解析によって2点間の伝達関数を作成し、その周波数特性より動特性の検討が行われる。周知のように有限フーリエ級数は完全直交関数系を成す正弦、余弦関数の線形結合で表され、その個数は観測データ数 N に等しい。幾何学的に言えば N 個の三角関数は時間領域において N 次元ベクトル空間の基本ベクトルを構成し、観測データはかかる空間の任意の N 元ベクトルとして処理される。従ってフーリエ級数の展開係数（周波数スペクトル）は、観測データベクトルと各三角関数基本ベクトルとの内積として与えられる。

このように性質の既知な三角関数座標系の導入によって観測データを全て再現する周波数スペクトルが得られる。しかし地震波のようにノイズを多く含むデータを対象とした場合、フーリエ級数はこれらノイズをも有意に

扱うため周波数スペクトルやそれらの比をとった伝達関数は周波数特性の形に描けば複雑な形状を示し、これより地震波の特性や対象地盤あるいは構造物の動特性を読み取るのは容易ではない。普通スペクトル解析に際して観測データからノイズを除去するために平滑化処理やバンドパスフィルターの試用等種々の前段操作が加えられるが、これらの操作はスペクトルを変質させ、特に平滑化処理は観測データの本質をゆがめかねない。またこれらは解析者の解析目的に沿った結果を引き出すための主観的な操作とも言え、観測データを理解する上で誤った解釈に結び付く恐れがある。

モード解析は逆問題に属し、観測データに対して回帰式を仮定して最小二乗法によりパラメータ（モード定数）の最確値を求める手法である。このとき観測データは一般に回帰式に一致せず、その間には誤差が存在する。本解析手法を地震観測データに適用した場合はノイズはその意味の誤差として処理され、全てのデータを関与させて対象系の真のモード定数の推定値を算定する。

以下に時間領域のモード解析手法について述べ、実地震波に対する適用例を示して同定した数値モデルにより妥当性の検討を行う。

2. 時間領域におけるモード解析手法の概要と特徴

時間領域データを扱ったモード解析手法に関しては、J. L. Beck³⁾による方法がある。それは系のものつ複数個のモードの各モード定数を個別に推定する手法である。即ち、後に紹介する相対加速度の固有ベクトル \mathbf{u}_r による線形展開式 (16) 式（回帰式）において、第 s 次モード1個を対象とした場合次の式を仮定している。

$$\ddot{x}^s(t) - 2\operatorname{Re} \sum_{r \neq s} \dot{\alpha}_r(t) \lambda_r \mathbf{u}_r \doteq 2\operatorname{Re} \dot{\alpha}_s(t) \lambda_s \mathbf{u}_s \cdots \cdots \quad (\text{a})$$

ここに、 λ_r は第 r 次固有値であり、 $\alpha_r(t)$ は相対変位を

* システム最適化に関するシンポジウム (1989年11月) にて一部発表

** 正会員 東電設計(株) 技術開発本部耐震技術部
(〒100 東京都千代田区内幸町1-3-1)

*** 正会員 工博 (財) 電力中央研究所 我孫子研究所

u_r の線形展開に表したときの展開係数である。またベクトル $\dot{x}^e(t)$ は相対加速度観測データである。記号 Re は実数部を、 $\sum_{r \neq s}$ は s 次モードを除いた全てのモード和を、 \cdot は時間 t に関する微分をそれぞれ意味する。

式 (a) は、右辺の第 s 次モード定数 λ_s 、 u_s と同様変化しつつあるパラメータ λ_r 、 u_r を真値とみなして仮定した回帰式である。最小二乗法に従って誤差を評価する場合は回帰式の値を母集合の中の標本に対応させて行すが、式 (a) は、標本に当たる左辺が未知変数を含むため標本自身が種々に変動していき収束性に疑問が持たれる。従って 1 自由度系を除いて式 (a) を回帰式として仮定するのは適当ではないと言える。

しかも式 (a) において、固有ベクトルは $\dot{x}^e(t)$ 対して線形の関係に固有値は非線形の関係にあるが、最小二乗法に従って厳密に解いているのは固有ベクトルのみである。固有値は、固有周波数と固有減衰定数を人為的に微小変化させ、同時にそのときの二乗誤差、即ち式 (a) の両辺の差の時間と測点数に渡る二乗和を計算して、その中で最小の誤差を与えるこれら二変数により決定される。しかしこのような試行的な誤差評価手法では効率的な収束は期待できない。一方最小二乗法に従って推定する場合は、固有周波数と固有減衰定数が次式 (b) に示すように固有値一個の変数に含まれるため固有値自身をパラメータとして取り扱わなければならない。なぜなら固有周波数と固有減衰定数をパラメータに選んだ場合、最小二乗法より導かれる正規方程式の係数行列が以下に示すように数式上特異になり、同時に決定し得ないからである。

$$\lambda_s = -2\pi f_s h_s + i2\pi f_s (1 - h_s^2)^{1/2} \dots \dots \dots (b)$$

ここに、 f_s 、 h_s は、それぞれ第 s 次固有周波数及び固有減衰定数であり、 i は虚数単位である。

係数行列の特異性は次のように証明される。

今観測データのデジタル処理に際してサンプリング間隔を Δt 、サンプリング数を N とすれば観測時間 T は $N\Delta t$ となるが、その間の任意時間 t を $t_i = i\Delta t$ ($i = 0 \sim N-1$) の i で表す。また式 (a) において変数変換を行い、 $\dot{x}_{ij}^e = 2\text{Re}\alpha_{is}\lambda_s u_{is}$ 、 $\ddot{x}_{ij}^e = \ddot{x}_{ij}^e - 2\text{Re}\sum_{r \neq s} \alpha_{ir}\lambda_r u_{ir}$ と置く。ここに、 j は観測点成分を指す。これより式 (a) の誤差の二乗和 ϵ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sum_{ij} [\ddot{x}_{ij}^e - \ddot{x}_{ij}^e(f_s, h_s, u_{is})]^2 \\ &= \sum_{ij} \left[\ddot{x}_{ij}^e - \ddot{x}_{ij0}^e - \left(\frac{\partial \ddot{x}_{ij}^e}{\partial f_s} \Delta f_s + \frac{\partial \ddot{x}_{ij}^e}{\partial h_s} \Delta h_s \right) \right]^2 \dots \dots \dots (c) \end{aligned}$$

ここに、 \ddot{x}_{ij0}^e は、固有ベクトル u_s を既知量として固有周波数及び固有減衰定数が f_s 、 h_s のとき、時間 t_i における観測点 j の相対加速度である。また Δf_s 、 Δh_s はそれぞれ f_s 、 h_s の微小変化分であるが、テーラーの定理に従い相対加速度 \ddot{x}_{ij}^e のこれらパラメータについて線形化

を行っている。記号 \sum_{ij} は、時間 i と測点数 j の双方についての総和を意味する。

そして最小二乗法によって式 (c) から次のように Δf_s 、 Δh_s についての正規方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \frac{\partial \ddot{x}_{ij}^e}{\partial \lambda_s} \frac{\partial \ddot{x}_{ij}^e}{\partial \lambda_s} \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_s}{\partial f_s} \frac{\partial \lambda_s}{\partial f_s} & \frac{\partial \lambda_s}{\partial f_s} \frac{\partial \lambda_s}{\partial h_s} \\ \frac{\partial \lambda_s}{\partial h_s} \frac{\partial \lambda_s}{\partial f_s} & \frac{\partial \lambda_s}{\partial h_s} \frac{\partial \lambda_s}{\partial h_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta f_s \\ \Delta h_s \end{bmatrix} \\ = \sum_{ij} (\ddot{x}_{ij}^e - \ddot{x}_{ij0}^e) \frac{\partial \ddot{x}_{ij}^e}{\partial \lambda_s} \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_s}{\partial f_s} \\ \frac{\partial \lambda_s}{\partial h_s} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (d) \end{aligned}$$

ここに、次の微分のチェーンルールを利用している。

$$\frac{\partial \ddot{x}_{ij}^e}{\partial f_s} = \frac{\partial \ddot{x}_{ij}^e}{\partial \lambda_s} \frac{\partial \lambda_s}{\partial f_s}, \quad \frac{\partial \ddot{x}_{ij}^e}{\partial h_s} = \frac{\partial \ddot{x}_{ij}^e}{\partial \lambda_s} \frac{\partial \lambda_s}{\partial h_s} \dots \dots \dots (e)$$

連立方程式 (d) の係数行列の行列式は、明らかにゼロである。よってこれより特異性が示され、 Δf_s と Δh_s は、同時に決定できないことが理解される。

ところで、Beck 手法は一般には上述したように f_s と h_s をパラメータに設定して使用されているが、この手法の提案者 Beck は ω_s^2 ($\omega_s = 2\pi f_s$) と $\omega_s h_s$ を採用している。ただし式 (b) の λ_s は、 $\lambda_s = -(\omega_s h_s) + i(\omega_s^2 - (\omega_s h_s)^2)^{1/2}$ と表現が可能であり、同様に係数行列の特異性が指摘される。また固有ベクトルに関しては刺激関数をパラメータとして扱っているが、次の理由により固有ベクトルとは本質的な違いはない。

第 s 次モードに着目した場合、このモードの変位 $x(t)$ に占める s 次変位 $x_s(t)$ は次の微分方程式を満たす。

$$\ddot{x}_s(t) + 2h_s \omega_s \dot{x}_s(t) + \omega_s^2 x_s(t) = -\gamma_s \ddot{y}(t) \dots \dots \dots (f)$$

ここに、 $\ddot{y}(t)$ は入力加速度であり、 γ_s は第 s 次刺激関数である。ただし上式では非減衰型固有値問題、

$$-\omega_s^2 M u_{Rs} + K u_{Rs} = 0 \dots \dots \dots (g)$$

を解いて、減衰項について次の近似式を仮定している。

$$u_{Rs}^k C u_{Rr} \approx 2h_s \omega_s m_s \delta_{sr} \dots \dots \dots (h)$$

ここに、 M 、 C 及び K は、それぞれ質量、減衰そして剛性行列であり、 u_{Rr} は非減衰型固有値問題の第 r 次固有ベクトルである。また $m_s = u_{Rs}^k M u_{Rs}$ であり、 δ はクロネッカーのデルタを、 T は転置を意味する。

このように相対加速度 $\ddot{x}(t)$ の固有ベクトルによる線形展開式に換えて $\ddot{x}_s(t)$ を考慮すれば γ_s のパラメータ化が可能であり、結果に相違は見られるが、曲線適合を目的に解析を行う場合は応答に対して共に線形の関係にある γ_s 、 u_s のどちらを採用しても構わない。

よってパラメータに以上のような相違はあるが、式 (a) を用いて Beck 手法を論ずるのは差し支えない。

また Beck 手法には次のような利用法がある。それは入出力双方の観測データに対して周波数帯に対象モード

の固有周波数を含むバンドパスフィルター(バンド幅は、約 1 Hz) をかけ解析に処するという方法である。式 (a) で言えば、左辺の第二項がフィルターのバンド外に当たる。ただしこの方法によれば固有減衰定数は本来の値に比較して一般に小さくなる。また設定バンド幅を考えれば、系の固有周波数はあらかじめ精度良く推定されなければならない、という制約がある。その推定には例えばフーリエ変換によって作成した伝達関数が利用されるが、ノイズを含む観測データの場合は、その特定は難しい。これは式 (a) において初期値設定の際に要求される制約でもあり、よって Beck 手法を適用する場合は、系に対して多少予備知識がなければ解析は不可能であると言える。

本解析手法では、次式のように固有ベクトル u_r の線形展開で表した理論式(回帰式)を考えている。

$$\dot{x}^e(t) \approx 2Re \sum_r \dot{\alpha}_r(t) \lambda_r u_r \dots\dots\dots (i)$$

上式の仮定により上に指摘した Beck 手法の 2 つの問題点が解決される。即ち標本自身を回帰式で表現すれば固有値 λ_r の初期推定値の設定が容易であり、安定した収束演算が期待できる。そして固有値 λ_r をパラメータに選ぶことにより最小二乗法に従った計算が可能になり、固有ベクトルと共に効率的に厳密な最確値を求め得る。

本解析手法の特徴を要約すれば次のようになる。①フィルター等による観測データの一次処理は必要ない。②収束性に優れている。観測データを直接対象とした Beck 手法との比較計算例はないが、バンドパスフィルターをかけたデータについては、本手法の方が誤差の二乗和の相対値(式(30)の E_1)を比較して 10 倍以上の精度で得られた。③解析結果から伝達関数が算定される。後述するように本解析によって系の動特性を把握するために有意な固有ベクトルは求まるが、数値的な評価は難しいので伝達関数により量的判断を行っている。一方 Beck 手法から得られる情報は固有周波数と固有減衰定数に限られ、固有値推定の容易な精度良く観測されたデータを対象とした場合にのみ伝達関数が求まる。ただしこのようなデータはフーリエ変換によって正確な伝達関数が得られるので、既に確立されている周波数領域のモード解析手法¹⁾が適用され得る。

3. モード解析手法の定式化¹⁾

自由度 N の非比例減衰を有する振動系の運動方程式は次式となる。今対象系の運動が、この方程式に従うことを前提として考えていく。

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t) \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 M 、 C 及び K は、それぞれ質量、減衰、剛性の ($N \times N$) 行列であり、 x 、 f は相対変位、外力を意味

する N 元ベクトルである。入力加速度であれば外力 f は慣性力となる。

以下で扱う観測データは加速度である。これらの入力関係は、運動方程式(1)によって定義される。

前述したように本解析の目的は固有値と固有ベクトルの 2 つのモード定数を観測データから抽出し対象系の動特性を明らかにすることであるが、はじめに対象系の固有値問題をとり上げ、運動方程式(1)の解⁵⁾がモード定数の陽関数になるよう系の基本ベクトルを形成する固有ベクトルの線形展開式について考えていく。

ここで以下の展開の便宜のために、式(1)を次のように改める。

$$\begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

また上式を簡略に表現するために次の行列、ベクトルを導入する。

$$A\dot{X}(t) + BX(t) = F(t) \dots\dots\dots (3)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$$

$$AX(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 A 、 B は ($2N \times 2N$) の行列、 X 、 F は ($2N \times 1$) のベクトルである。

式(3)の固有値問題は、 $F(t) = 0$ と置いた閉鎖系において論じられる。このとき解 $X(t)$ を $X(t) = V \exp(\lambda t)$ とすれば、式(3)は次の固有方程式へ移行する。

$$\lambda_r A V_r + B V_r = 0 \quad (r=1 \sim 2N) \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 λ_r 、 V_r は、それぞれ第 r 次の固有値、固有ベクトルであり、ベクトル V_r は次の内容を持つ。

$$V_r = (\lambda_r u_r^T u_r^T)^T \dots\dots\dots (6)$$

ここに、ベクトル u_r は、第 r 次変位ベクトルである。

またベクトル V_r は次の直交関係式を満たす。

$$V_s^T A V_r = \delta_{sr} \dots\dots\dots (7)$$

$$V_s^T B V_r = -\lambda_r \delta_{sr} \dots\dots\dots (8)$$

ただし上の両式は、式(7)の左辺が $r=s$ のとき式(4)より $2\lambda_s u_s^T M u_s + u_s^T C u_s$ となるが、この値が 1 になるように規格化された V_s について成立する。以下ではこのように規格化された V_s あるいは u_s を使用する。

固有方程式(5)を解けば閉鎖系の運動が明らかになる。そして(7)、(8)両式の直交性を満たす基本ベクトル V_r によって同一のベクトル界にある式(3)のベクトル $X(t)$ の線形展開が可能となる。即ち展開係数を $\alpha_r(t)$ として次のように表現される。

$$X(t) = \sum_{r=1}^{2N} \alpha_r(t) V_r \dots\dots\dots (9)$$

ここに、記号 \sum_r はモードの総和を意味し、以下記さぬ限り、 $r=1 \sim 2N$ であるとする。 $2N$ 個のモード定数の内の N 個は、他の N 個の共役複素数である。

相対変位 $x(t)$ 、相対速度 $\dot{x}(t)$ 及び相対加速度 $\ddot{x}(t)$ は、(4)、(6)の両式から次のようになる。

$$x(t) = \sum_r \alpha_r(t) u_r \dots\dots\dots (10)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_r \dot{\alpha}_r(t) \lambda_r u_r \dots\dots\dots (11)$$

$$\ddot{x}(t) = \sum_r \ddot{\alpha}_r(t) \lambda_r u_r \dots\dots\dots (12)$$

展開係数 $\alpha_r(t)$ は、次の微分方程式を満たす。

$$\ddot{\alpha}_r(t) - \lambda_r \alpha_r(t) = u_r^T f(t) \dots\dots\dots (13)$$

上式は、式(9)を式(3)に代入し、(7)、(8)両式の直交性より得られる。よって上式を解けば相対変位等が求まる。今問題にしている相対加速度は、次のようになる。

$$\ddot{x}(t) = \sum_r \{ \lambda_r \alpha_{r0} \eta_r(t) + u_r^T \beta_r(t) \} \lambda_r u_r \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 α_{r0} は $\alpha_r(t)$ の初期値であり、 $\eta_r(t) = \exp(\lambda_r t)$ である。{ }内の第2項は $\alpha_r(t)$ の外力 $f(t)$ に関する項であるが、ベクトル $\beta_r(t)$ は次の微分方程式を満たす。

$$\dot{\beta}_r(t) = \lambda_r \beta_r(t) + f(t) \dots\dots\dots (15)$$

上式は、式(13)において $\alpha_r(t) = u_r^T \beta_r(t)$ と置換し、固有ベクトル u_r の独立性を考慮して得られる。

尚式(14)は、モード定数 λ_r 、 u_r の共役複素数を考慮すれば次式のようになり、以後この式の値を観測データの相対加速度応答値(観測値)に対応する理論値として取り扱う。

$$\ddot{x}(t) = 2\text{Real} \left[\sum_{r=1}^N \{ \lambda_r \alpha_{r0} \eta_r(t) + u_r^T \beta_r(t) \} \lambda_r u_r \right] \dots\dots (16)$$

ここに、Real は、実数部を意味する。

以上固有方程式(5)を解いて得られる固有ベクトル u_r による相対加速度の線形展開式が得られた。ただし本解析では式(5)は考慮しない。つまり対象系が運動方程式(1)に従うことを仮定して上式を導いてきたが、ここでは系の質量、減衰及び剛性の各行列は未知であるという条件の下で上式による観測値の再現を考える。

次にモード解析の本論に入るが、式(16)の理論値と観測値との間の誤差の二乗和を評価して観測値の再現を図りながら2つのモード定数、固有値 λ_r 、固有ベクトル u_r を決定するための手法について述べていく。

(1) 固有ベクトルの決定について

固有ベクトル u_r は、固有値 λ_r を既知として扱い観測点毎に決めていく。式(16)より、観測点 j の相対加速度 $\ddot{x}_j(t)$ は、次式となる。

$$\ddot{x}_j(t) = 2\text{Real} \left[\sum_{r=1}^N \{ \lambda_r \alpha_{r0} \eta_r(t) + u_r^T \beta_r(t) \} \lambda_r u_{rj} \right] \dots\dots (17)$$

未知変数 α_{r0} 、 u_{rj} は、上式の理論値と観測値間の差の二乗和を評価し最小二乗法によって得られる。このとき

誤差評価関数は、全ての観測データが等精度で得られている場合次のようになる。

$$\epsilon_j = \sum_i (\ddot{x}_{ji}^o - \ddot{x}_{ji})^2 \\ = \sum_i (\ddot{x}_{ji}^o - 2\text{Real} \sum_{r=1}^N (a_{rj} \lambda_r^2 \eta_{ri} + \lambda_r U_{rj}^T \beta_{ri}))^2 \dots\dots\dots (18)$$

ここに、 $a_{rj} = \alpha_{r0} u_{rj}$ 、 $U_{rj} = u_{rj} u_r$ である。また \ddot{x}_{ji}^o は観測値であり、添字 i は時間 $t = t_i$ を意味する。記号 \sum_j は、解析対象時間内の総和である。

α_{r0} 、 u_{rj} を含む新たな未知変数 a_{rj} 、 U_{rj} は、式(18)の ϵ_j をおのおの偏微分した式をゼロと置いて正規方程式を立て、これを解いて得られる。

(2) 固有値の決定について

ここでは、固有ベクトル u_r を既知として扱う。

(13)、(16)の両式より明らかなように相対加速度 $\ddot{x}(t)$ は、固有値 λ_r について非線形の関係にある。ここではじめに初期値として与えられる λ_r の微小変化分 $\Delta \lambda_r$ について $\ddot{x}(t)$ をテーラー展開をし、 $\Delta \lambda_r$ の一次までとってこの線形化を行う。即ち、観測点 j の時間 t_i における相対加速度 \ddot{x}_{ji} は次のようになる。

$$\ddot{x}_{ji} \doteq \ddot{x}_{ji0} + \sum_r \frac{\partial \ddot{x}_{ji}}{\partial \lambda_r} \Delta \lambda_r \\ = \ddot{x}_{ji0} + 2\text{Real} \left[\sum_{r=1}^N \left\{ 2\lambda_r a_{rj} \eta_{ri} + \lambda_r^2 a_{rj} t_i \eta_{ri} + U_{rj}^T \left(2\lambda_r \beta_{ri} + \lambda_r^2 \frac{\partial \beta_{ri}}{\partial \lambda_r} + f_i \right) \right\} \cdot \Delta \lambda_r \right] \dots\dots\dots (19)$$

ここに、 \ddot{x}_{ji0} は固有値 λ_r に持つときの理論値である。未知変数 $\Delta \lambda_r$ は、式(19)の値と観測値間の差の二乗和を評価して得られる。即ち、誤差評価関数 ϵ は次式のようになり、 $\Delta \lambda_r$ は、 ϵ を $\Delta \lambda_r$ で微分をした式をゼロと置いて正規方程式を立て、これを解けば求まる。そして固有値 λ_r は、 $\Delta \lambda_r$ が加えられ更新される。

$$\epsilon = \sum_{ij} (\ddot{x}_{ji}^o - \ddot{x}_{ji})^2 \dots\dots\dots (20)$$

以上のように計算は、固有値、固有ベクトルを個別に求め、式(20)の誤差あるいは $\Delta \lambda_r$ の絶対値の変化率が、所定の許容値に達するまで繰り返し行われる。

4. 伝達関数について

伝達関数は、モード解析より得られるモード定数から直ちに作成される。

今式(3)のベクトル $X(t)$ 、外力 $F(t)$ のフーリエスペクトルをそれぞれ $Y(\omega)$ 、 $G(\omega)$ とすれば、式(3)の両辺をフーリエ変換して次式を得る。

$$i\omega AY(\omega) + BY(\omega) = G(\omega) \dots\dots\dots (21)$$

ここに、 ω は角振動数であり、 i は虚数単位である。

ここで次式のように、上式のベクトル $Y(\omega)$ の式(6)の固有ベクトル V_r による線形展開式を考える。

$$Y(\omega) = \sum_r \alpha_r(\omega) V_r \dots\dots\dots (22)$$

展開係数 $\alpha_r(\omega)$ は、上式を式 (21) へ代入して直交性 (7), (8) の両式を考慮すれば求まり、 $\mathbf{Y}(\omega)$ 、そして (4), (6) の両式より相対変位 $\mathbf{x}(t)$ のフーリエスペクトル $\mathbf{y}(\omega)$ は次のようになる。

$$\mathbf{Y}(\omega) = \sum_r \frac{\mathbf{u}_r^T \mathbf{g}(\omega)}{i\omega - \lambda_r} \mathbf{V}_r \dots\dots\dots (23)$$

$$\mathbf{y}(\omega) = \sum_r \frac{\mathbf{u}_r^T \mathbf{g}(\omega)}{i\omega - \lambda_r} \mathbf{u}_r \dots\dots\dots (24)$$

ここに、 $\mathbf{g}(\omega)$ は、外力 $\mathbf{f}(t)$ のフーリエスペクトルである。ただし前述したようにモード解析では固有ベクトル \mathbf{u}_r に換えて $\mathbf{U}_{rj} = \mathbf{u}_{rj} \mathbf{u}_r$ (j は観測点を指す) を計算しており、実際には次式により $\mathbf{y}(\omega)$ の観測点 j 成分 $y_j(\omega)$ を計算している。

$$y_j(\omega) = \sum_r \frac{\mathbf{U}_{rj}^T \mathbf{g}(\omega)}{i\omega - \lambda_r} \dots\dots\dots (25)$$

ところで地震波の伝達関数は、対象点の絶対値 (加速度、速度及び変位の各絶対値) を基準点の絶対値で割って作成されるが、今基準点の絶対変位 $x_b(t)$ のフーリエスペクトルを $y_b(\omega)$ とすれば伝達関数 $T_j(\omega)$ は次のようになる。

$$T_j(\omega) = \left[\sum_r \frac{\mathbf{U}_{rj}^T \mathbf{g}(\omega)}{i\omega - \lambda_r} + y_b(\omega) \right] / y_b(\omega) \dots\dots\dots (26)$$

地震波加速度入力の場合、 $\mathbf{g}(\omega)$ は、慣性力 $-\mathbf{M}\mathbf{e}\ddot{x}_b(t)$ のフーリエスペクトルとなり次のようになる。

$$\mathbf{g}(\omega) = \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{e}y_b(\omega) \dots\dots\dots (27)$$

ここに、 \mathbf{e} は単位ベクトルである。これより式 (26) の伝達関数 $T_j(\omega)$ は次のように表される。

$$T_j(\omega) = \sum_r \frac{\omega^2 \mathbf{U}_{rj}^T \mathbf{M}\mathbf{e}}{i\omega - \lambda_r} + 1 \dots\dots\dots (28)$$

ここに、質量行列 \mathbf{M} は、刺激係数 $\mathbf{u}_r^T \mathbf{M}\mathbf{e}$ として上式及び式 (13) の $\mathbf{u}_r^T \mathbf{f}(t)$ ($= -\mathbf{u}_r^T \mathbf{M}\mathbf{e}\ddot{x}_b(t)$) に現われるが、この係数は系の定数であり、従って \mathbf{M} 単独では任意の値を採り得る。つまり本解析から算出される \mathbf{U}_{rj} は適当な \mathbf{M} に応じた値となり、刺激係数 (本解析では刺激関数 $\mathbf{U}_{rj}^T \mathbf{M}\mathbf{e} = \mathbf{u}_r^T \mathbf{M}\mathbf{e} \mathbf{u}_{rj}$ の形で得られるが) は、 \mathbf{M} に依らず一定である。このことは \mathbf{U}_{rj} から計算される固有ベクトル \mathbf{u}_r については、数値的な評価は難しいことを意味する。ただしその形状は評価可能である。

5. 解析理論の検証；数値モデルによる計算例

本章では数値モデルを使用して本解析理論の検証を行う。計算に使用した数値モデルは、Fig.1 に示すように平面ひずみアインパラメトリック要素を利用した地盤の有限要素法モデルである。ここに要素数は 64、節点数は 225 である。側面境界は y 方向の自由度を固定し、底面境界は x, y 両方向の自由度を固定している。今考えている伝達関数は式 (28) であり、入力波としていわゆる入射波と反射波の合成波を考慮しているので以上の境

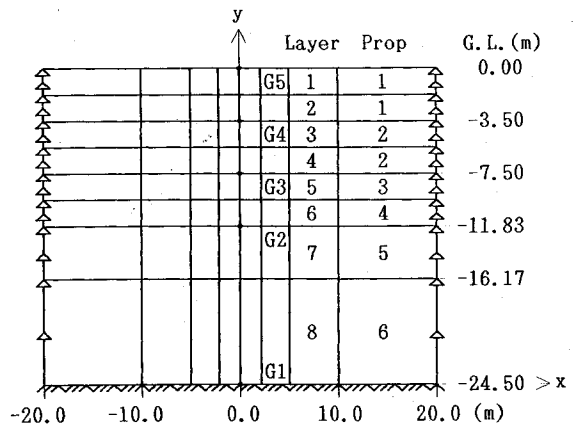


Fig.1 Numerical model of ground

Table 1 Ground constants of model

Prop. No	ρ (t/m ³)	Vs (m/sec)	Q
1	1.8	120.0	10.0
2	2.0	220.0	10.0
3	2.0	310.0	10.0
4	2.0	240.0	10.0
5	2.0	305.0	10.0
6	2.1	500.0	20.0

界条件は妥当である。また各地層には層番号 (Layer) と物性値番号 (Prop) を付しているが、層 1 と 2、及び層 3 と 4 には、それぞれ同じ物性値を与えている。

Table 1 に各層の物性値、即ち密度 ρ 、剪断波速度 V_s 及び $Q (= 1/2h)$ 、 h は減衰定数) 値を示す。

この数値モデルは、6, 7 章で述べる実地震波の解析例に関連するが、モデルの地盤構造と物性値は日本原子力研究所の動力試験炉 JPDR 周辺地盤の地盤調査^{6), 7)} による結果である。また地震観測⁸⁾ は地表面 (図中 G5) と G.L. -24.5 m (図中 G1) の 2 点で行われた。

モード解析は、El Centro 波を地盤直下より x 方向 (剪断方向) 入力波として使用し、その相対加速度応答値を対象とした。即ちこれらを仮の観測値 (真値) とみなして理論の検証を行っている。

各節点の相対加速度応答値 (観測値) は、次式のようにいわゆる MK 型の運動方程式を解いて計算した。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + (i\mathbf{D} + \mathbf{K})\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \dots\dots\dots (29)$$

ここに、 i は虚数単位である。行列 \mathbf{D} は、数値モデルの要素剛性行列 \mathbf{K}^e に $2h^e (= 1/Q^e)$ を乗じて作成した。 h^e は、各要素に固有な減衰定数である。

上式は、本解析で仮定した運動方程式 (1) と比較して減衰項が異なり、式 (1) では粘性減衰を、上式は履歴減衰を系の減衰として採用している。ただし式 (1) に基づいて定式化した本解析手法は、上式の運動方程式

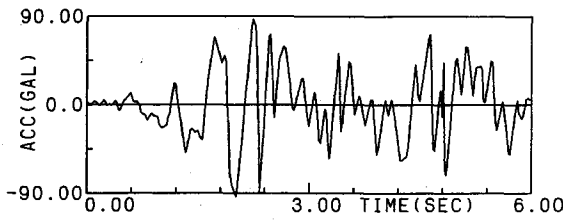


Fig.2 El Centro as the input wave to the model

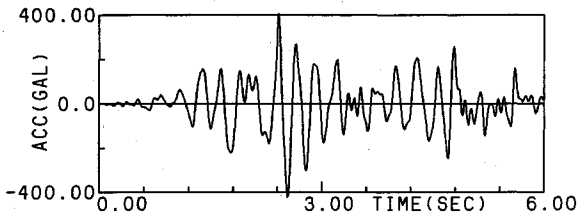


Fig.3 Relative acceleration response at G5

Table 2 Optimal estimates of parameters

Modal Parameters(Eigen values)						
	1st mode		2nd mode		3rd mode	
	f(Hz)	h(%)	f(Hz)	h(%)	f(Hz)	h(%)
Initial estimates	5.000	10.0	10.000	10.0	15.000	10.0
Final estimates	3.751	4.33	8.589	4.51	13.253	4.06
True values	3.751	4.33	8.589	4.51	13.253	4.06

に従う振動系にも適用される。このとき式(1)の減衰行列 C は 0 となり、剛性行列 K は複素行列になるが、(7)、(8) 両式の直交関係式を満たし規格化された固有ベクトルを使用すれば、一連の関係式は成立する。

そこで式(29)に従う相対加速度応答値は、右辺を 0 と置いた同次方程式から得られる固有ベクトルを直交関係式(7)、(8)の両式に基づいて規格化を行いモード毎に微分方程式(13)を解いて式(12)より算出した。

モード解析に使用した応答値は、Fig.1に黒点で示したG2、G3、G4、G5の4点における x 成分である。これら応答値は、周波数範囲を $0.0 \sim 20.0$ Hzに限定し数値モデルの持つモードの中でこの周波数範囲に含まれる3つのモードを用いて作成した(20.0 Hz以下には他にもモードはあるが、それらの中で刺激係数の大きいモードは3個である)。Fig.2に入力波を、Fig.3に解析に使用した4波の内地表面G5の絶対加速度応答値を示す。サンプリング間隔を0.01秒として600個のデータを使用した。

以上の条件下で行ったモード解析の結果は、Table 2(固有周波数 f (Hz), 減衰定数 h (%)) に示す通りである。いずれのモードも適当な固有値の初期値(固有周

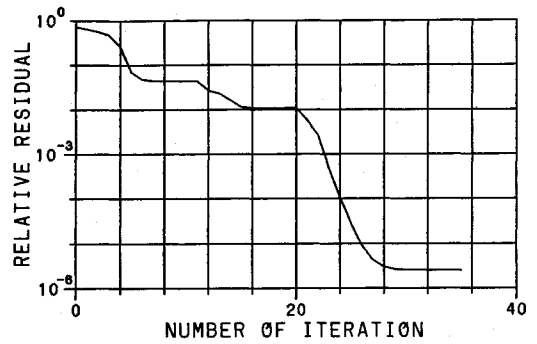


Fig.4 Residual behavior

波数と減衰定数を与える。)に対して最終的には真値に収束した。ここに初期値として数値モデルの各モードの固有値に近い値を与えてはいるが、これらは任意である。固有ベクトルは、前述したように4点の x 方向質量行列によりその絶対値が異なり直接比較するのは難しい。しかし固有ベクトルの形状(複素平面上に描いたときの形状)は、数値モデルの対応する点の固有ベクトルに相似形となり、4個の観測点間の相対的な関係は捉え得る。よって系の動特性把握に有意なベクトルであると言える。

収束判定は次式による誤差の変化率と固有値の変化率

$$E_1 = \frac{|\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n|}{\varepsilon_0} \leq 10^{-4}, \quad E_2 = \left| \frac{\Delta \lambda_{n+1}}{\lambda_n} \right| \leq 10^{-4} \dots (30)$$

を見て行ない、 E_1 、 E_2 の値が上式のいずれかを満足するまで演算を繰り返した。ここに、 ε_n は繰り返し回数 n 回目の式(20)の値であり、 ε_0 は次式より与えられる観測データの二乗和である。

$$\varepsilon_0 = \sum_{ij} (\hat{x}_{ij})^2, \quad (j=1 \sim 4, i=1 \sim 600) \dots (31)$$

また λ_n は、繰り返し回数 n 回目の固有値の値であり、 $\Delta \lambda_{n+1}$ は、 $n+1$ 回目の固有値の変化量である。記号 $| \cdot |$ は絶対値を意味する。

誤差の変化率を示す式(30)の E_1 の推移は、Fig.4のようになる。繰り返し回数は35回である。この内ははじめの11回は第1次モードのみ、次の9回は第1、2次の2つのモードを、そして最後の15回は第1~3次の3つのモードをそれぞれパラメータに指定して反復計算を行った。このように3段階に分けて計算した理由は、各モードの刺激係数の違いによる。第1次モードが他のモードに比較して刺激係数が大きいため(数値モデルの第1次モードの刺激係数の割合は0.54であり、第2次及び3次はそれぞれ0.22、0.23である。)3つのモードを立てて同時に収束を図るといずれも第1次モードの真値に向かって変化をしていく傾向が見られた。またモード数の増加に伴い回帰式(16)の値が変わり、従って先に見出した(18)、(20)両式の誤差を最小にするモー

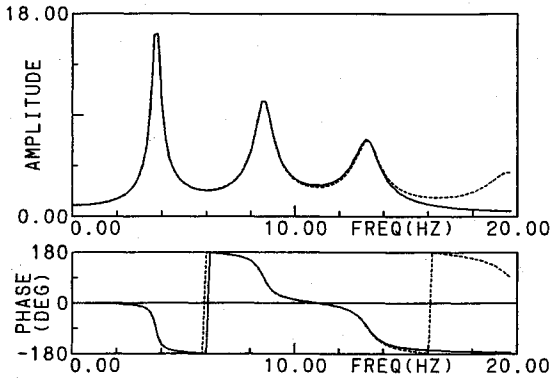


Fig.5 Transfer function of G5. True function (---) and the result calculated by eq. (28) (—).

ド定数に多少の変化が生ずるので各段階において収束した値は、そのモード次数の最終的な結果とは言えない。各段階の収束値は次のステップの対応モード次数の初期値として使用し、モード数が解析対象モード次数に達するまで同様の操作を繰り返した。伝達関数は、Fig.5のようになる。図には2つのグラフを描いているが、点線は数値モデルを解析的に解いて得られた結果で真値を表し、実線がモード解析結果を利用して式(28)から算出した関数値である。これより解析対象周波数帯については良好な結果と言える。後半14 Hz以降に違いが見られるが、これは関数計算時に使用したモードの個数の違いによる。真値は20.0 Hz以降のモードも含め全てを使用した結果である。

以上より本解析理論に基づいて振動系のモード定数の算定が可能であることが確認された。

6. 実地震観測データを対象とした適用例

対象地震観測データは、5章に示した日本原子力研究所の動力試験炉 JPDR 周辺地盤モデル Fig.1 の測点 G1 (G.L. -24.5 m) と測点 G5 (地表面) の2点で観測された x 方向絶対加速度⁸⁾ (茨城県沖, 1982年7月23日23時23分NS成分) である。Fig.6にG1の、Fig.7にG5の各データを示す。ここに、サンプリング間隔は0.008秒、データ数は1024個である。運動方程式(1)に関して言えば、G1が入力加速度であり、G5はその応答値のひとつである。そして対象周波数範囲を0.0~20.0 Hzとしてこの範囲に含まれるモードの抽出を目的に解析を行った。

解析から得られたモードは3個である。各モードの固有値を固有周波数 (f (Hz)) と固有減衰定数 (h (%)) の値で Table 3 (7章) に示す。ここに示した固有周波数は、これまで検討されてきた値⁹⁾にほぼ等しい。固有ベクトルは数値的に検討するのは難しいが、ベクトルの形状は、7章で触れる地盤調査の結果に基づいて同定し

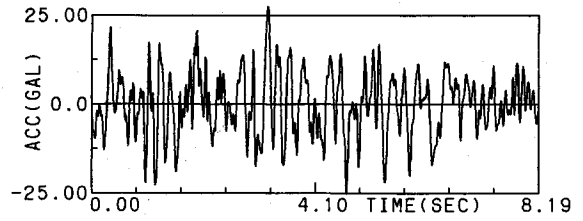


Fig.6 Earthquake record at G1

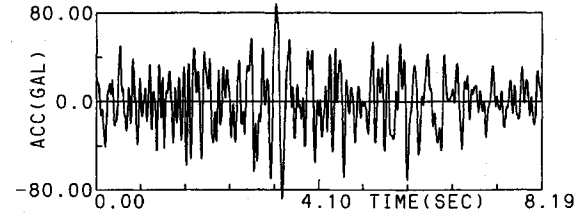


Fig.7 Earthquake record at G5

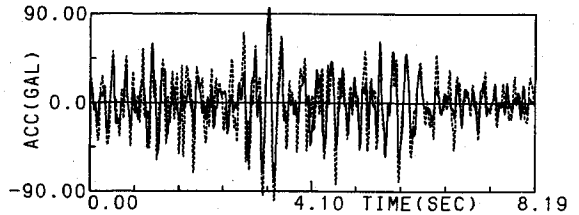


Fig.8 Earthquake record used in analysis (---) and the result calculated by the present analysis (—)

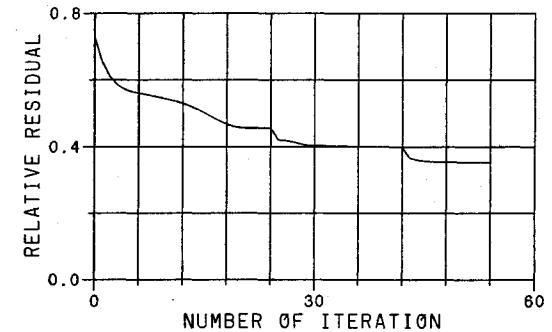


Fig.9 Residual behavior

た数値モデル (Fig.1) の対応点 G5 の x 成分変位ベクトルと比較して、複素平面上でベクトルの実数部と虚数部のなす角度がほぼ一致し相似形をなす。角度の値はその章で示す。

相対加速度を Fig.8 に示す。点線が観測値 G5 の G1 に対する相対加速度であり、実線がモード解析より得られた3個のモードを式(16)によって重ね合わせた結果である。観測値の最大相対加速度 99.365 gal に対して、解析値のそれは、95.383 gal である。式(30)に示す観測値と解析値間の誤差の変化率 E_1 の推移は、Fig.9 の

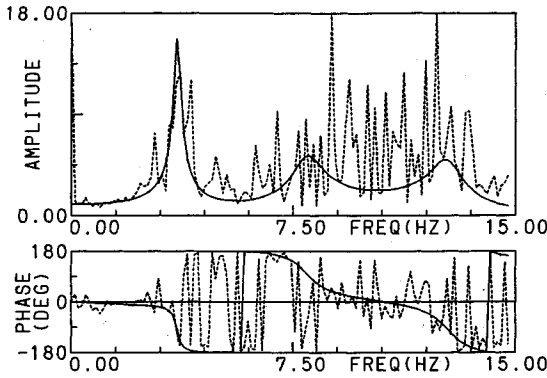


Fig.10 Transfer functions of ground. The result calculated by eq. (28) (—) and by using Fourier transformation (···).

ようになる。解析では固有値の初期値として Table 2 に示した初期推定値 (Initial estimates) を与えた。繰り返し回数は 54 回であるが、5 章の解析例と同様、計算はモード数に相当する 3 段階に分けて行った。即ちはじめの 24 回は第 1 次モードのみ、次の 18 回は第 1, 2 次の 2 個のモードを、最後の 12 回は第 1~3 次の 3 個のモードをパラメータに指定して計算を繰り返した。ここに用いた収束判定基準は式 (30) である。変化率の許容値を E_1, E_2 共に 10^{-4} に設定したが、Fig.9 に見られるように各段階で収束しており妥当な判定基準と言える。

Fig.10 に式 (28) から得られた伝達関数 (実線) を示す。同図には本解析結果と比較する意味でフーリエ変換による伝達関数 (点線) をも描いているが、このように複雑な形状をしており、先に触れたようにモードの特定は難しい。フーリエ変換による伝達関数は単に入力、出力双方の絶対加速度フーリエスペクトルの比をとって作成するため、絶対値スペクトルには鋭いピークがたくさん現われ、平滑化処理の際に影響を及ぼす。本解析より得られた絶対値、位相の両スペクトルは共に理想的な周波数特性を示している。また従来スペクトル情報の半分を担う位相スペクトルはあまり重要視されることはなかったが、数値モデルを念頭に置いた場合、その果たす役割は大きく、無視できない。次章において数値モデル同定手法について簡単に触れるが、観測値と数値モデル値の誤差の動向は、位相スペクトルの形状により大きく左右される。

7. 実地震伝達関数に対する数値モデルの同定²⁾

モード解析は観測データを使用して対象系のモード定数の同定を目的とするが、数値モデル同定解析は更に遡って運動方程式 (1) の系定数、即ち質量 M 、減衰係数 C 及び剛性 K の各行列を推定する手法である。本手法の適用により系の動的特性の把握のみならず諸物性値の検討や設計入力に対する応答予測等に大きく寄与し

得る。

(1) 数値モデル同定解析手法

数値モデル同定は、具体的には予め対象系に対して仮定した運動方程式が最終的に観測値 (伝達関数) を再現し得るように系定数を構成する物性値に修正を加えていく、という方法により行う。ここに観測値としてモード解析から得られた伝達関数を使用する。

今対象振動系が運動方程式 (1) に従うと仮定した場合、伝達関数 $T(\omega)$ は式 (28) より次のようになる。

$$T(\omega) = \sum_r \frac{\omega^2 u_r^T M e}{i\omega - \lambda_r} u_r + 1 \dots\dots\dots (32)$$

物性値の修正量は観測値と上式の理論値間の誤差の二乗和を評価して決定される。このとき誤差評価関数は次式である。

$$\epsilon = \sum_{ij} (\bar{T}_{ij} - T_{ij}) \cdot (T_{ij}^* - T_{ij}) \dots\dots\dots (33)$$

ここに、 T_{ij}^* は角振動数 ω_i における観測点 j の観測値であり、 T_{ij} は理論値である。また $\bar{T}_{ij}, \bar{T}_{ij}^*$ は、それぞれ T_{ij}^*, T_{ij} の共役複素数である。記号 \sum_{ij} は対象振動数範囲及び観測点についての総和を意味する。

ところで式 (32) の伝達関数 $T(\omega)$ は物性値に対して非線形の関係にあるのでテーラーの定理に従い物性値修正量の一次までとってこれの線形化を行い、 ϵ を最小にする最適修正量の計算手法を考えていく。

各種物性値をベクトル p の成分で表し、その修正量を Δp として伝達関数 $T(\omega)$ を次のように表す。

$$T(\omega, p) \doteq T(\omega, p_0) + \frac{\partial T}{\partial p} \Delta p \dots\dots\dots (34)$$

ここに、 p_0 は、はじめに仮定した物性値である。

上式の Δp は、これをパラメータとして直接計算可能であるが、ここでは固有方程式 (5) を介させ固有値問題で引用される近似法、即ち摂動法¹⁰⁾を利用した計算手法を考えていく。このとき Δp は、予め予想される修正量として与えられ、既知量の扱いとなる。いわゆる摂動であり、第 2 項全体は Δp による伝達関数の一次摂動 $\Delta T(\omega)$ である。従って $\Delta T(\omega)$ を物性値毎に計算して、次式のように線形展開の形に表現し、 ϵ の最小化を条件に展開係数を算定すれば最適な伝達関数一次摂動、即ち伝達関数の修正量が得られる。

$$T(\omega, p) \doteq T(\omega, p_0) + \sum_{n=1}^N a_n \frac{\partial T}{\partial p_n} \Delta p_n \dots\dots\dots (35)$$

ここに、 a_n は n 番目の物性値成分 p_n の摂動 Δp_n による伝達関数一次摂動 $\Delta T_n(\omega) = \partial T / \partial p_n \cdot \Delta p_n$ の展開係数である。 $\sum_{n=1}^N$ は、物性値の個数 N 個の総和を意味する。

伝達関数一次摂動は、次のように算出される。

伝達関数 $T(\omega)$ は、式 (32) よりモード定数 λ_r, u_r の関数であるから、 $\Delta T_n(\omega)$ は次のように表される。

$$\Delta T_n(\omega) = \sum_r \left(\frac{\partial T}{\partial \lambda_r} \frac{\partial \lambda_r}{\partial p_n} + \frac{\partial T}{\partial u_r} \frac{\partial u_r}{\partial p_n} \right) \Delta p_n \dots\dots\dots (36)$$

ここに、 $\Delta\lambda_{rm} = \partial\lambda_r / \partial p_n \cdot \Delta p_n$ 、 $\Delta u_{rm} = \partial u_r / \partial p_n \cdot \Delta p_n$ は、それぞれ固有値、固有ベクトルの Δp_n による一次摂動である。これらは摂動法に従い次式より算出される。

$$\Delta\lambda_{rm} = -u_r^T (\lambda_r^2 \Delta M_n + \lambda_r \Delta C_n + \Delta K_n) u_r \dots\dots\dots (37)$$

$$\Delta u_{rm} = \sum_s \alpha_{rs}^n u_s \dots\dots\dots (38)$$

$$\alpha_{rs}^n = -\frac{u_s^T (\lambda_r^2 \Delta M_n + \lambda_r \Delta C_n + \Delta K_n) u_r}{\lambda_r - \lambda_s} \quad (r \neq s)$$

$$\alpha_{rr}^n = -\frac{u_r^T (2\lambda_r \Delta M_n + \Delta C_n) u_r}{2} \dots\dots\dots (39)$$

ここに、 ΔM_n 、 ΔC_n 及び ΔK_n は、 Δp_n によって変動した質量、減衰及び剛性行列であり、次のように Δp_n について線形化した量である。

$$\Delta M_n = \frac{\partial M}{\partial p_n} \Delta p_n, \quad \Delta C_n = \frac{\partial C}{\partial p_n} \Delta p_n, \quad \Delta K_n = \frac{\partial K}{\partial p_n} \Delta p_n \dots\dots\dots (40)$$

ところで展開係数 a_n は、式 (36)~(40) のように伝達関数一次摂動 $\Delta T_n(\omega)$ を物性値の摂動 Δp_n について線形化した上で計算しているので Δp_n の係数として ϵ を最小とする摂動を与える。従ってそれらが物性値の修正量、 δp_n となり、 p_n に加算され更新される。即ち、

$$\delta p_n = a_n \Delta p_n, \quad p_n = p_{n0} + \delta p_n \quad (n=1 \sim N) \dots\dots\dots (41)$$

以上誤差の二乗和あるいは物性値修正量 δp_n の相対変化率が所定の値以下になるまで、式 (32) $T(\omega)$ → 式 (36) $\Delta T(\omega)$ → a_n → 式 (41) δp_n 及び p_n を繰り返す。

(2) 数値モデル同定解析の適用

同定解析は、式(28)から得られた伝達関数 (Fig.10, 実線) を対象にして行った。はじめに仮定した数値モデルは地盤調査から得られた密度 ρ 、剪断波速度 V_s 及び Q 値を利用して作成した有限要素法モデル (Fig.1) である。このモデルは運動方程式 (29) に従うものと仮定した。また伝達関数の誤差評価に際して観測値に対応させた数値モデルの自由度は、Fig.1 上の点 G5 の x 方向である。

平面ひずみ要素を利用した同定解析では、密度、ヤング率、ポアソン比及び減衰定数の4種類の物性値をパラメータ (摂動) として指定できるが、ここでは比較的精度良く測定される密度は固定して行った。

解析結果として固有値を固有周波数 (f (Hz)) と固有減衰定数 (h (%)) の値で Table 3 に、物性値を剪断波速度 (V_s (m/sec)), Q 値に換算して初期値と合わせて Table 4 に示す。固有周波数及び固有減衰定数は、モード解析結果に比較して1, 2次モードの固有減衰定数がやや大きい、ほぼ同値とみなせる。物性値の方は、各地層の剪断波速度及び Q 値の中でそれぞれ元の調査値に対して最も大きな変化を示した値の変化率は、剪断波速度が1割、 Q 値が2割程度である。また固有ベクトルの形状はベクトルの方向を角度 (degree, 複素平面上で実数部を x 軸、虚数部を y 軸にとり、角度は x 軸正

Table 3 Optimal estimates of modal constants

Modal Parameters (Eigen values)						
	1st mode		2nd mode		3rd mode	
	f(Hz)	h(%)	f(Hz)	h(%)	f(Hz)	h(%)
By Modal Analysis	3.561	3.22	8.016	4.39	12.832	4.32
By Identified Model	3.543	5.24	8.097	5.70	12.572	4.87

Table 4 Optimal estimates of ground constants

Material Parameters				
	Initial estimates		Final estimates	
Prop. No	V_s (m/sec)	Q	V_s (m/sec)	Q
1	120.00	10.00	109.90	7.64
2	220.00	10.00	222.76	9.22
3	310.00	10.00	303.59	8.67
4	240.00	10.00	223.28	8.31
5	305.00	10.00	279.78	8.25
6	500.00	20.00	483.19	16.61

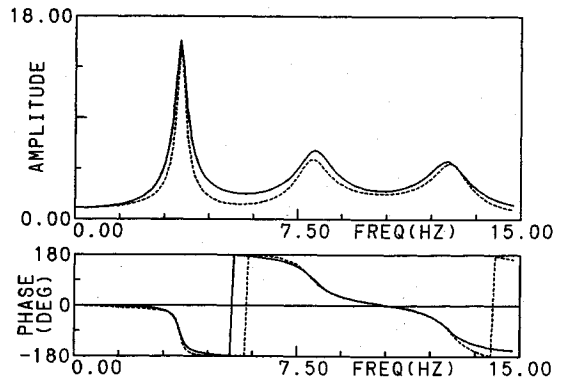


Fig.11 The result calculated by the present analysis (---) and identified model (—)

方向から反時計回りを正の値とした。このとき実数部は全て正にしている。) で示せば次のような値になる (数値の並びは、本解析結果/同定解析結果、である)。1次モードは、 $-50.4/-47.0$ 、2次モードは、 $-42.5/-46.9$ 、3次モードは、 $-56.1/-45.4$ である。これより形状はほぼ一致していると言える。伝達関数を Fig.11 に示す。点線がモード解析より得られた伝達関数を、実線が同定した数値モデルの値を表す。両者は良く一致しており良好な結果である。

以上の同定解析結果は本解析から得られた伝達関数の妥当性を示すものと言える。特に物性値は地盤調査値に対して約2割以内の変化に止まり、それを裏付ける結果である。よって本解析の結果は地震波を観測した地盤の動特性を把握するための有用な情報であると言える。

ところで同定解析では、このようにわずかな情報を利用して系の数値モデルを同定するため常に式 (35) の展

関係数 a_n の正規方程式の特異性が問題になる。その特徴は非線形問題の場合はパラメータの発散として現われるが、それは式 (35) の右辺第 2 項の線形展開を担う伝達関数一次摂動ベクトルの独立性に問題がある (全て独立であれば方程式の係数行列は正則である)。ここでは独立性の強いより大きな伝達関数一次摂動量を持つ物性値を優先的に修正していく方法を採用した。これより特異性をもたらず伝達関数一次摂動量の小さい物性値の変化が抑制され、安定した収束演算を可能にした。

また特異性に関連した解の唯一性という問題があるが、観測・試験において実際に測定可能な測点数は仮定した数値モデルの全自由度の内のわずかであり、従って同定された数値モデルはこの条件を満たしていると言いはない。しかし上述した収束演算手法は、地盤調査結果等に基づいて作成した数値モデルに対して最小の修正量を与える方法であり (正規方程式は、係数行列の逆行列を特異値分解法¹¹⁾ に基づいて計算をして解いているが、この行列は、Moore-Penrose の逆行列¹¹⁾ に同質である。) その意味で実際の系の挙動を最も良く表現する数値モデルであると言える。

8. 結 論

本論文では振動系の動特性の把握を目的とした時間領域のモード解析手法を提案し、実地震波観測データを対象とした適用例を示してその有効性を検証した。本研究によって得られた成果を要約すれば以下ようになる。

(1) 観測データに含まれるノイズを本解析手法の理論値に対する誤差として処理し、対象系の動的挙動を支配するモードを抽出し得た。同時に伝達関数を算出し、系の動特性把握に有意な結果が得られた。

(2) 本解析手法は Beck 手法とは異なり固有値をパラメータに設定し反復演算によりその最確値を求めるが、初期固有値として与える系の固有周波数及び固有減衰定数はいずれも適当な値でよく、解の収束性が実証された。

(3) 本解析理論は速度比例の粘性減衰を用いて展開

したが、本文中に示した計算例のように履歴減衰が想定される振動系についても適用可能である。またこれら 2 種類の減衰項を併せ持つ系にも適用され得る。

謝辞：本研究を進めるうえで、(財)電力中央研究所我孫子研究所の澤田義博、上島照幸両氏をはじめ、多くの方々にご検討を頂いた。また日本大学の花田和史教授、清水建設株式会社技術研究所の田蔵隆、清水勝美両氏には、種々の貴重な御助言を頂いた。ここに厚く御礼を申し上げます。

参 考 文 献

- 1) 花田和史・上島照幸：強制振動実験のデータ分析手法，電力中央研究所報告 377024，1978。
- 2) 日本機械学会編：モード解析の基礎と応用，3-8 系定数の同定，pp.86~93，丸善，1986。
- 3) J.L. Beck : Determining Models of Structures from Earthquake Records, C.I.T., Pasadena, 1987。
- 4) 安藤幸治：時間領域に対するモード解析手法について，土木学会第 42 回年次学術講演会講演概要集第 1 部動的応答解析法 (2)，1987。
- 5) Foss, K.A. : Coordinates which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Dynamic Systems, Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol.32, No.3, pp.361~364, Sept. 1958。
- 6) 吉田保夫他：JPDR (動力試験炉) を対象とした構造物—地盤系の動特性，(1) 原位置調査・試験による地盤の静的・動的物性，電力中央研究所報告 383001，1983。
- 7) 西好一他：JPDR (動力試験炉) を対象とした構造物—地盤系の動特性，(2) 室内試験による砂および砂礫の動的物性と地盤のモデル化，電力中央研究所報告 383002，1983。
- 8) 澤田義博・花田和史・岩楯敏広他：JPDR (動力試験炉) を対象とした構造物—地盤系の動特性，(3) 地震観測に基づく動特性の検討，電力中央研究所報告 383029，1983。
- 9) 花田和史・澤田義博・岩楯敏広他：JPDR (動力試験炉) を対象とした構造物—地盤系の動特性，(5) 構造物—地盤系挙動の数値模擬，電力中央研究所報告 384023，1985。
- 10) 寺沢寛一編：数学概論応用編，岩波書店，1960。
- 11) Lawson, C.L. : Solving Least Squares Problems, Prentice-Hall, 1974。

(1990. 10. 30 受付)

IDENTIFICATION OF DYNAMIC PROPERTIES OF VIBRATING SYSTEMS BY MODAL ANALYSIS IN THE TIME DOMAIN AND ITS APPLICATION

Koji ANDO and Takahiro IWATATE

This paper describes the method of modal analysis in the time domain. Which belongs to the inverse problem. It is a purpose of this analysis to determine modal parameters using the histories of response quantities measured by forced vibration tests or seismic loads which characterize dynamic properties of the system concerned. The theory is developed on the basis of assumption that the motion of vibrating systems is governed by the equation of motion. By applying this method to the observed earthquake records of the ground, the significant result was obtained which was able to represent dynamic properties of the ground. In general, such analysis is treated by the Fourier transformation. But it is not easy to understand characteristics of the ground from Fourier spectra, because earthquake records contain so many influencing noises.