

# 自由振動波形からの固有振動数の近接した 2自由度線形系のパラメータ同定

岩本政巳\*・藤野陽三\*\*

固有振動数が近接した、いわゆる closely-spaced modes 系の自由振動波形より系の動特性を推定する手法として、拡張カルマンフィルタを取り上げ、その適用性を数値シミュレーションにより検討した。2自由度線形系モデルにおける2質点の変位波形を用いれば、波形に5%程度の観測ノイズが含まれていても、かなり精度の高い推定値が得られること、1点の応答波形しか観測されない場合の同定は困難であるが、構造物-TMD系等については本研究で提案する2段階同定法が有効であることを示した。

**Keywords:** closely-spaced modes, extended Kalman filter, free vibration, identification, simulation

## 1. ま え が き

土木、建築系の構造物の風や地震による振動に対する安全性、使用性を検討するためには、構造物そのものの動特性を的確に把握しておく必要がある。このことから、起振機等による加振実験や地震時の観測などにより得られた実測データをもとに構造物の動特性を推定する、いわゆる同定問題に関する研究が近年盛んに行われ、数多くの手法が提案されている<sup>1)</sup>。

同定手法は大きく2つに分類できる。ひとつは応答波形をフーリエ変換によりスペクトルに変換して曲線適合を行う周波数領域での手法であり、もうひとつは応答波形より直接動特性を推定する時間領域での手法である。後者においては、振動系の支配方程式を仮定し、あるいはさらにそれをAR, ARMAモデル等に置き換えて、最小2乗法などの評価規範にしたがい動的パラメータを推定する、物理モデル同定法が主流である。本研究もそれに属する。

構造物の動特性の照査のために行われる振動実験としては常時微動計測、強制振動実験、自由振動実験が一般的であるが、実験の簡便さと計測データの取り扱いの容易さから、加振後の自由減衰波形を観測する自由振動実験がよく行われる。

さて、構造物の巨大化、複雑化が進むにつれ、その振動挙動も複雑さを増している。自由度の高い構造物では、非常に近接した固有振動数を持つ2つ以上のモードが存在する、すなわち closely-spaced modes 系を形成するケースが増えている。

例えば、マルチケーブル斜張橋では、桁とケーブル、あるいは2本以上のケーブルの固有振動数が近接するこ

とがある<sup>2)</sup>。制振対策として構造物にTMD等の同調型のダンパーを設置した場合も同様である<sup>3)</sup>。

このような closely-spaced modes 系の自由振動はうなりを伴うことが多く、その動特性、特に減衰を推定することは容易ではない。通常用いられる振動数領域での同定手法、たとえば強制正弦波加振のスウィープ試験結果から周波数応答関数の適合を行う手法では2つのモードを分離・区別することは非常に難しい。自由振動波形からバンドパスフィルタ等によって特定のモードを抽出して推定する手法についても同様である。

closely-spaced modes 系の自由振動波形より動特性を時間領域で推定する方法については、2, 3の研究がある。その一例として、うなりを伴う自由振動波形が2つの単純な1自由度系の自由減衰波形の和であるとして、うなりの腹、節の振幅とうなりの周期からモード固有振動数、モード減衰を簡易的に推定する方法が提案されている<sup>4), 5)</sup>。しかし、この方法ではうなりの周期、節の振幅の評価が難しく、そのため誤差が発生する可能性がある<sup>6)</sup>。また、実際の振動実験で得られるうなり波形では、うなりの周期が不明確な場合が多い。

また、うなりを伴う自由振動波形からのモード分離の手法として各質点の応答波形に重みをつけて時間軸上で重ね合わせるにより各モードの自由振動波形を求め手法が提案され、斜張橋の桁とケーブルの連成振動に応用されている<sup>2)</sup>。しかし、この手法は基本的に比例減衰系を対象としており、強い非比例性減衰を持つ系、すなわち各モードにおいて質点間に位相差がある場合に有効であるかどうかについては疑問が残る。

これらの自由振動波形から同定手法はいずれもモード固有振動数とモード減衰を求めるものであるが、それで充分かどうかについては疑問である。例えば、斜張橋での桁とケーブルの連成振動からの同定を行うときに、桁とケーブルが連成して生じるモードの動特性ではなく桁

\*工修 名古屋工業大学助手 社会開発工学科  
(〒466 名古屋市昭和区御器所町)

\*\*Ph. D. 東京大学教授 工学部土木工学科

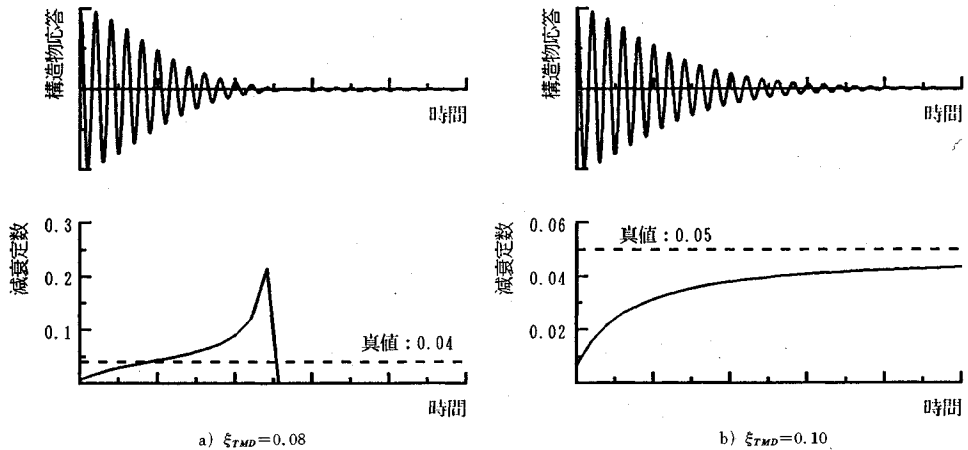


図-2 うなりを伴う波形より読み取った減衰

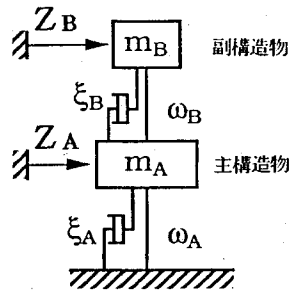


図-1 2自由度系のモデル

あるいはケーブルそのものの動特性を知りたいケースもあろう。同定結果を利用してさらに振動解析を行う場合などがそれにあたる。そのような場合には、上記の手法は適当ではないと考えられる。

本研究では、closely-spaced modes系を図-1に示すような2自由度系でモデル化し、その剛性、減衰定数を直接同定することを考える。すなわち、2自由度系の線形運動方程式  $M\ddot{Z} + C\dot{Z} + KZ = F$  ( $=0$ :自由振動)の減衰、剛性マトリックス  $C, K$ を推定する。 $C, K$ を求めることで個々の要素の動特性が得られ、またその結果をもとに固有値解析を行えばモード特性を求めることもできる。

同定手法には時間領域での手法である拡張カルマンフィルタ<sup>7)-9)</sup>を用いる。そして、あらかじめ与えられた動特性をもとに数値シミュレーションにより作成した自由振動波形より同定を行い、その精度を検証する。

## 2. 同定の必要性

closely-spaced modes系のうなりを伴う応答波形から系の動特性を推定する場合には、当然その系を2自由度系としてとらえ、しかるべき同定手法を用いる必要がある。しかし、実際の振動実験時にはそのような扱いは

あまりなされていないように見受けられる。

例えば、近年橋梁等の構造物に対して制振対策としてTMDが設置される例が多い。TMDの固有振動数は構造物のそれに同調されるため、構造物-TMD系はclosely-spaced modes系となる。TMDの制振効果の検証のために自由振動実験がしばしば行われるが、その際TMDを付加した場合にも、構造物の自由振動波形に大きなうなりが生じていない限り、1自由度系の自由減衰波形として減衰定数を求め、TMDの付加減衰として評価するのが通例である<sup>10)</sup>。

図-2に数値的に作成したTMD作動時の構造物の自由振動波形とその波形から計算機により直接読みとったモード減衰を示す。減衰値は隣あう波形のピークから求めているが、見かけ上負減衰となった時点(うなりの節)で読みとりを止めている。なお、質量比=1%、固有振動数比=1、構造物の減衰定数 $\xi_{ST} = 0$ 、TMDの減衰定数は $\xi_{TMD} = 0.08$ および0.10である。図のようにうなりがほとんどみられないような波形においても、読みとった減衰は真値と隔たりがあることがわかる。つまり、1自由度系としての推定ではTMDの減衰効果を正しく評価できない。さらに実際は線形系であるにもかかわらず、減衰が見かけ上振幅によって変化しているため、減衰の非線形性といった誤った解釈がなされる危険性すらある。

このように、構造物-TMD系のようなclosely-spaced modes系の応答波形からその動特性を推定する場合には2自由度系としての同定を行う必要がある<sup>11)</sup>。

また、1.で述べたように2自由度系の同定手法にはモード特性を求めるものと剛性、減衰マトリックス  $C, K$ を求めるものの2種類がある。よって、目的に応じてこれらを使い分ける必要がある。

### 3. 拡張カルマンフィルタによる同定

カルマンフィルタは、時々刻々与えられる観測データを用いてシステムの状態変数（信号、未知パラメータ）の最小2乗推定値を逐次的に求める時間領域での推定アルゴリズムである。カルマンフィルタは線形のシステム状態方程式（支配方程式）を基礎としているが、非線形の状態方程式に対しても基準軌跡のまわりで線形化することで同様のアルゴリズムを得る。これが拡張カルマンフィルタである。

カルマンフィルタはフィルタリング問題をはじめ同定問題、制御問題といったさまざまな推定問題に適用可能であり、事実、電気、航空、機械等の多くの分野で用いられている。土木の構造分野においても星谷ら<sup>9),12),13)</sup>によって先駆的な研究が行われ、同定手法としての有効性が確認されている。

また、文献14), 15)では動的空気力係数の同定への適用が試みられている。

本研究では、星谷らの提案したEK-WGI法（拡張カルマンフィルタ・重み付きグローバルな繰り返し法）を用いている。以下にその概要を述べる。

EK-WGI法を適用するためには、まず構造系の物理モデルと観測モデルをもとに状態方程式と観測方程式を定式化する必要がある。状態方程式は同定すべきパラメータを直列に取り込んだ状態ベクトル  $X$  に関する支配方程式（運動方程式）であり、観測方程式は観測量を要素とする観測ベクトル  $Y$  と状態ベクトル  $X$  の関係を表わす式である。

ここで用いる拡張カルマンフィルタは、次に示す非線形連続型状態方程式（式(1)）と非線形離散型観測方程式（式(2)）を基礎としている。

$$\frac{dX_k}{dt} = f(X_k, t) \dots\dots\dots (1)$$

$$Y_k = h(X_k, t_k) + v_k \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $X_k$ 、 $X_k$ ：連続型、離散型の状態ベクトル、 $Y_k$ ：離散型観測ベクトル、 $t$ 、 $t_k$ ：時刻、 $v_k$ ：観測雑音ベクトル（ガウス白色雑音）、ただし  $E[v_k \cdot v_l^T] = R(k) \delta_{kl}$ 、 $E[\cdot]$ ：期待値、 $R(k)$ ：観測雑音ベクトルの共分散行列、 $\delta_{kl}$ ：クロネッカー・デルタ関数である。

対象となる系に関する2つの式が決定すれば、それらを組み込むことで拡張カルマンフィルタのアルゴリズムは完成する。初期の状態推定ベクトル  $\hat{X}_0$ 、初期の誤差の共分散行列  $P_0$  を与えることにより、観測データを逐次的に読み込みながら状態ベクトル  $X_k$  の最適推定値  $\hat{X}_k$  を自動的に求めることができる。なお、“~”（ハット）は推定値を表す。

重み付きグローバルな繰り返し法（WGI法）は、同定結果が初期条件の影響を受けなければ安定であるとい

表-1 1自由度系の同定結果例（ノイズ：10%）

$\xi$	$\hat{\xi}$	$\omega$ (rad/s)
0.002	0.00187	2.00
0.01	0.00989	2.00
0.05	0.0500	2.00

う基本的な考え方に基づくアルゴリズムである。有限時間で観測された時刻歴データを用いて繰り返し同定（グローバルな繰り返し）を行う。対象となる構造物についての先験情報を初期値として同定を行い、以後のグローバルな繰り返しでは前回の推定値を初期値として同定を進める。この繰り返しによって推定値はある値に収束してゆく。また、各グローバルな繰り返しの開始時に誤差の共分散行列  $P$  に重み係数  $W$  を乗じることで推定値を活性化させ、収束速度の促進を図っている。

なお、星谷らの一連の研究<sup>9),12),13)</sup>ではEK-WGI法を地震や走行車両による強制振動に適用している。ここで問題としている自由振動波形にEK-WGI法をそのまま適用すると、グローバルな繰り返し時に観測ベクトルが不連続となり、同定結果の収束性に影響を及ぼす。そこで、データの終端にした（1回の繰り返しが終了した）時点で時間軸を逆転させて推定を続行する手法を用いた。また、アルゴリズムの数値的安定性を高めるために  $U-D$  分解フィルターのアルゴリズム<sup>8)</sup>を使用した。

### 4. 1自由度系の同定

2自由度系の同定に先立ち、ここでは1自由度系の自由振動波形からのEK-WGI法によるパラメータ同定の結果を述べる。

シミュレーションに用いたモデルは固有円振動数  $\omega_0 = 2$  rad/sec、減衰定数  $\xi = 0.002, 0.01, 0.05$  の3ケースとした。観測すなわち波形作成の条件は、時間刻み  $\Delta t = 0.01$  sec（約300点/1波）、継続時間  $T = 10$  sec（約3波）とした。データ数  $Nd = 10$  sec / 0.01 sec = 1000 である。初期条件として、変位=1、速度=0とした。つまり、初期変位のみを与えている。観測によって波形に混入するノイズとして、10秒間の過渡応答波形のRMS値を求め（約0.5~0.7）、その10%の標準偏差を持つ独立な正規乱数を時刻歴応答に付加し、ノイズが同定に及ぼす影響を調べた。

同定結果を表-1に示す。1自由度系においてはその振動挙動が単純であるため、10%のノイズが混入しても約3波の観測データからかなり高い精度で同定可能であることがわかる。減衰定数  $\xi$  の値の大小の影響をみると減衰の大きいケースほど同定精度は高い。定常振幅に近い小減衰の波形からその減衰定数を正確に推定するためには多くの波数を含んだデータが必要であるといえる。なお、推定値は5回程度のグローバルな繰り返しで

収束した。

### 5. 2自由度系の同定

構造物-TMD系, 斜張橋における桁-ケーブル系といた closely-spaced modes 系を対象に, 数値シミュレーションにより作成した自由振動波形からの動的パラメータ同定を行う。

#### (1) 状態方程式および観測方程式の定式化

##### a) 状態方程式

図-1 に示すような2自由度線形系の自由振動時の運動方程式は, 次のように表せる。

$$\begin{cases} m_A \ddot{z}_A + c_A \dot{z}_A + c_B (\dot{z}_A - \dot{z}_B) + k_A z_A + k_B (z_A - z_B) = 0 \\ m_B \ddot{z}_B + c_B (\dot{z}_B - \dot{z}_A) + k_B (z_B - z_A) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

ここで,  $z_A, z_B$ : 主, 副構造物の変位,  $m_A, m_B$ : 主, 副構造物の質量 (モード質量),  $c_A, c_B$ : 主, 副構造物の減衰係数,  $k_A, k_B$ : 主, 副構造物のバネ係数である。これを主, 副構造物の減衰定数  $\xi_A (= c_A / 2\sqrt{k_A m_A})$ ,  $\xi_B (= c_B / 2\sqrt{k_B m_B})$  および固有円振動数  $\omega_A (= \sqrt{k_A / m_A})$ ,  $\omega_B (= \sqrt{k_B / m_B})$  を用いて表すと次のようになる。

$$\begin{cases} \ddot{z}_A + (2\xi_A \omega_A + 2\mu \xi_B \omega_B) \dot{z}_A - 2\mu \xi_B \omega_B \dot{z}_B \\ + (\omega_A^2 + \mu \omega_B^2) z_A - \mu \omega_B^2 z_B = 0 \\ \ddot{z}_B - 2\xi_B \omega_B \dot{z}_A + 2\xi_B \omega_B \dot{z}_B - \omega_B^2 z_A + \omega_B^2 z_B = 0 \end{cases} \quad (4)$$

ここで,  $\mu$ : 質量比 ( $= m_B / m_A$ ) である。本研究では  $\omega_A, \omega_B, \xi_A, \xi_B$ , さらに場合によっては  $\mu$  も, 同定すべき未知のパラメータとする。状態ベクトル  $X$  の要素として,

$$x_1 = z_A, x_2 = z_B, x_3 = \dot{z}_A, x_4 = \dot{z}_B$$

とおき, さらに未知パラメータを次のように状態ベクトルに組み込む。

$$x_5 = \xi_A, x_6 = \xi_B, x_7 = \omega_A, x_8 = \omega_B$$

すると, 式 (4) より式 (1) の状態方程式は次のように表される。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ -\{(2x_5 x_7 + 2\mu x_6 x_8) x_3 - 2\mu x_6 x_8 x_4 \\ + (x_7^2 + \mu x_8^2) x_1 - \mu x_8^2 x_2\} \\ -\{-2x_6 x_8 x_3 + 2x_6 x_8 x_4 - x_8^2 x_1 + x_8^2 x_2\} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

さらに質量比  $\mu$  も未知であるとした場合には,  $x_9 = \mu$  として状態方程式を次のように変更する。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ -\{(2x_5 x_7 + 2\mu x_6 x_8) x_3 - 2x_6 x_8 x_4 \\ + (x_7^2 + \mu x_8^2) x_1 - x_9 x_8^2 x_2\} \\ -\{-2x_6 x_8 x_3 + 2x_6 x_8 x_4 - x_8^2 x_1 + x_8^2 x_2\} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5')$$

なお, 本研究で対象として想定している橋梁等の構造物は連続体構造物であるから, 質量  $m_A, m_B$  は多くの場合モード質量となる。モード質量は対象の設計諸元をもとに解析的に得ることができるので, 質量比  $\mu$  も求めることができる。とくに, 構造物-TMD系においては  $\mu$  は TMD の設計時に与える量であり既知量として扱うことが多い。

しかし, 吊橋等の複雑な構造物について解析的に求めたモード質量にはある程度の不確実性があると考えられる。また構造物のモード質量が既知でも同調液体ダンパー (TLD)<sup>10)</sup> のように液体の有効質量が未知である場合は  $\mu$  も未知量となる。

このように, 質量比  $\mu$  を未知として扱った方がよいと思われるケースもあるので, これを同定ケースの1つとして考えることにした。

##### b) 観測方程式

a) の状態方程式に基づき観測方程式を定式化する。構造物の変位波形が観測値  $y$  として得られるときの観測方程式は次のようになる。

$$y = [1, 0, \dots, 0] X + v \quad (6)$$

また, 構造物の速度波形あるいは TMD の変位, 速度波形が観測されるとすると, 観測方程式は各々次のようになる。

$$\begin{aligned} y &= [0, 1, 0, \dots, 0] X + v \\ y &= [0, 0, 1, 0, \dots, 0] X + v \\ y &= [0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0] X + v \end{aligned} \quad (6')$$

2種類以上の応答波形が同時に得られる場合には, 観測値  $y$  を要素とする観測ベクトル  $Y$  についての観測方程式を式 (6), (6') の組み合わせによって次のように定式化すればよい。

$$Y = HX + v \quad (7)$$

#### (2) シミュレーションに用いたモデル

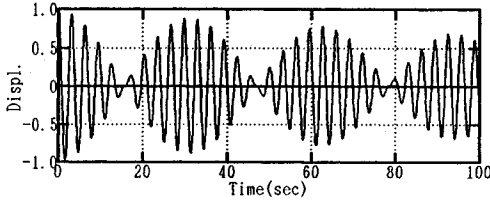
本研究で用いたシミュレーションモデルを表-2 に示す。構造物-TMD系, 斜張橋における桁-ケーブル系を念頭においてモデルを決定した。質量比は  $\mu = 0.01$  と小さい値とし, 主, 副構造物の固有振動数比は1とした。ちなみに, 式 (4) において無減衰 ( $\xi_A = \xi_B = 0$ ) とし

表—2 2自由度系のシミュレーションモデル

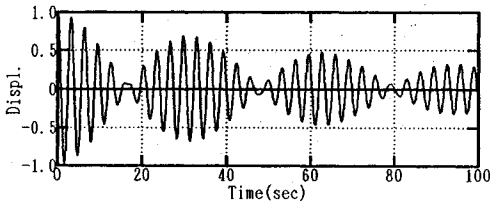
ケース	$\xi_A$	$\xi_B$	$\omega_A$	$\omega_B$	$\mu$
1	0.002	0.002	2.0	2.0	0.01
2		0.01			
3		0.05			

表—3 パラメータの推定値及び誤差の共分散行列の初期値  
(2自由度系, 主, 副構造物の変位波形からの同定)

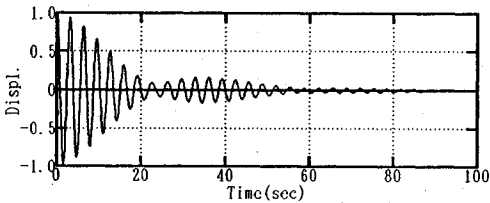
$\hat{x}_6(t_0 t_0)$	$\hat{x}_8(t_0 t_0)$	$\hat{x}_7(t_0 t_0)$	$\hat{x}_9(t_0 t_0)$	$\hat{x}_0(t_0 t_0)$
0.0	0.01	1.0	1.0	0.0
$P_{ij}(t_0 t_0)$ $i \neq j$	$P_{ii}(t_0 t_0)$ $i=1 \sim 4$	$P_{ii}(t_0 t_0)$ $i=5, 6$	$P_{ii}(t_0 t_0)$ $i=7, 8$	$P_{ii}(t_0 t_0)$ $i=9$
0.0	0.01	1.0E-8	0.01	1.0E-8



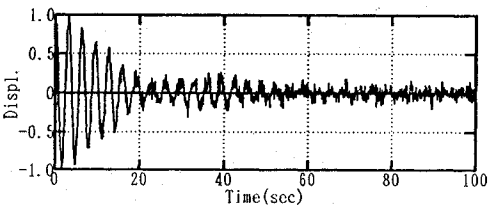
a)  $\xi_B=0.002$  (ノイズなし)



b)  $\xi_B=0.01$  (ノイズなし)



c)  $\xi_B=0.05$  (ノイズなし)



d)  $\xi_B=0.05$  (ノイズ:10%)

図—3 シミュレートした主構造物の応答波形

たとき、系が closely-spaced modes 系となる。すなわち連成によって生じる2つのモードの固有振動数がほぼ等しくなるための条件が、質量比が非常に小さく ( $\mu \ll 1$ )、かつ主、副構造物の固有振動数がほぼ等しい ( $\omega_A \approx \omega_B$ )、であることは容易に導ける。主構造物の減衰定数  $\xi_A$  は 0.002 とかなり小さい値とした。副構造物の減衰定数  $\xi_B$  については、小さい値 (0.002) がケーブル等を、大きい値 (0.05) が TMD を想定している。シミュレートした応答波形例を図—3 に示す。  $\xi_B$  の違いにより波形の減衰特性に差があることがわかる。波形の初期値は  $z_A = z_B = 1, \dot{z}_A = \dot{z}_B = 0$ 、すなわち初期変位のみ

を与えるケースとした。また、観測時のノイズとして、4. と同様に 10 秒間 (約 3 周期分) の過渡応答波形との RMS 値の比で 1, 5, 10 % の正規乱数を波形に付加した。なお、10 秒間の変位応答波形の RMS 値は主構造物で約 0.6, 副構造物で約 2.7~3.6 であった。

同定精度は時刻歴応答の観測 (波形作成) の条件、すなわちサンプリング間隔  $\Delta t$ 、サンプリング継続時間  $T$  (またはデータ数  $Nd = T/\Delta t$ ) によっても変化する。明らかに  $\Delta t$  が小さい (細かいデータ) ほど、 $T$  が大きい (長いデータ) ほど同定精度は高い。しかし、細かく長いデータをとるとデータ数  $Nd$  は非常に大きくなり、計算に要する時間も長くなる。

そこで、適切な観測条件の目安を知るために、 $\Delta t, T$  を変化させて同定を行い、その影響を調べることにした。本研究ではデータ数  $Nd$  を一定とし、サンプリング間隔  $\Delta t = 0.01$  (細かい、約 300 点/1 波), 0.02, 0.05, 0.10 sec ( $T = 10$  (約 3 波), 20, 50, 100 sec) の 4 ケースについて同定を行った。

## 6. 同定結果

### (1) 主、副構造物の変位波形が得られている場合

まず、主、副構造物の変位波形からの同定を行った。データ数  $Nd = 1000$  である。未知パラメータの推定値の初期値  $\hat{X}_0$  および誤差の共分散行列の初期値  $P_0$  は表—3 のように設定した。式 (7) の観測雑音ベクトルの  $v$  の共分散行列は  $R = 0.01 E$  ( $E$ : 単位行列) と仮定し、重み係数  $W = 100$  とした。

質量比  $\mu$  が既知のときの同定結果例 ( $\Delta t = 0.01$  sec) を表—4 に示す。固有円振動数  $\omega_A, \omega_B$  はすべてのケースで正確に推定されているが、減衰定数  $\xi_A, \xi_B$  についてはノイズのために比較的大きな同定誤差が生じている。

誤差の傾向は  $\xi_B$  の大小により異なっている。  $\xi_B$  の小さいケース (表—4 a) では  $\xi_A, \xi_B$  ともに同程度の誤差が生じている。一方、  $\xi_B$  が大きくなると (表—4 b, c)  $\xi_B$  の推定誤差はかなり小さくなる。  $\xi_B = 0.05$  のケースでは 10 % のノイズが波形に混入しても  $\xi_B$  の推定誤差は 1 % 以下である。つまり、TMD のような減衰定数の大きな副構造物についてはその動特性をかなり正確に推定できるといえる。

観測条件 ( $\Delta t, T$ ) の変化による影響を表—5 に示す。

表一4 主, 副構造物の変位波形からの同定結果 (ノイズの影響)

a)  $\xi_B=0.002, \mu$ : 既知,  $\Delta t=0.01$

ノイズ	$\hat{\xi}_A$	$\hat{\xi}_B$	$\hat{\omega}_A$	$\hat{\omega}_B$
1	0.00193	0.00196	2.00	2.00
5	0.00166	0.00183	2.00	2.00
10	0.00132	0.00169	2.00	2.00

b)  $\xi_B=0.01, \mu$ : 既知,  $\Delta t=0.01$

ノイズ	$\hat{\xi}_A$	$\hat{\xi}_B$	$\hat{\omega}_A$	$\hat{\omega}_B$
1	0.00193	0.00998	2.00	2.00
5	0.00165	0.00989	2.00	2.00
10	0.00131	0.00981	2.00	2.00

c)  $\xi_B=0.05, \mu$ : 既知,  $\Delta t=0.01$

ノイズ	$\hat{\xi}_A$	$\hat{\xi}_B$	$\hat{\omega}_A$	$\hat{\omega}_B$
1	0.00194	0.0500	2.00	2.00
5	0.00168	0.0502	2.00	2.00
10	0.00137	0.0504	2.00	2.00

表一5 主, 副構造物の変位波形からの同定結果 (観測条件の影響)

a)  $\xi_B=0.002, \mu$ : 既知, ノイズ: 10%

$\Delta t$ (sec)	T(sec)	$\hat{\xi}_A$	$\hat{\xi}_B$	$\hat{\omega}_A$	$\hat{\omega}_B$
0.01	10	0.00132	0.00169	2.00	2.00
0.02	20	0.00176	0.00182	2.00	2.00
0.05	50	0.00202	0.00222	2.00	2.00
0.10	100	0.00200	0.00187	2.00	2.00

b)  $\xi_B=0.01, \mu$ : 既知, ノイズ: 10%

$\Delta t$ (sec)	T(sec)	$\hat{\xi}_A$	$\hat{\xi}_B$	$\hat{\omega}_A$	$\hat{\omega}_B$
0.01	10	0.00131	0.00981	2.00	2.00
0.02	20	0.00148	0.00957	2.00	2.00
0.05	50	0.00184	0.0104	2.00	2.00
0.10	100	0.00228	0.00930	2.00	2.00

c)  $\xi_B=0.05, \mu$ : 既知, ノイズ: 10%

$\Delta t$ (sec)	T(sec)	$\hat{\xi}_A$	$\hat{\xi}_B$	$\hat{\omega}_A$	$\hat{\omega}_B$
0.01	10	0.00137	0.0504	2.00	2.00
0.02	20	0.00119	0.0495	2.00	2.00
0.05	50	0.00152	0.0507	2.00	2.00
0.10	100	0.00007	0.0475	2.01	2.00

$\Delta t$ を変化させることにより  $\xi_A, \xi_B$  の同定精度が変化すが,  $\xi_B$  の大小によりその傾向が異なることがわかる。 $\xi_B$  が小さいケース ( $\xi_B=0.002$ , 表一5 a) では  $\Delta t$  が大きくなるにつれ精度は高くなっているが,  $\xi_B$  が大きいケース (表一5 c) ではむしろ逆の傾向がみられる。これは図3の応答波形の減衰特性に関連が深いと考えられる。つまり,  $\xi_B$  が小さい場合には応答波形の減衰が小さく振幅はほとんど減少しない。このような波形から同定を行う場合は, 多少サンプリングを粗く ( $\Delta t$  を大きく) してでも継続時間  $T$  を長くとした方が精度は高くなる。要するに, ある程度の減衰の情報を含んだ波形を用いる必要がある。

表一6 主, 副構造物の変位波形からの同定結果 (ノイズの影響)

a)  $\xi_B=0.002, \mu$ : 未知,  $\Delta t=0.05$

ノイズ	$\hat{\xi}_A$	$\hat{\xi}_B$	$\hat{\omega}_A$	$\hat{\omega}_B$	$\hat{\mu}$
1	0.00200	0.00202	2.00	2.00	0.00999
5	0.00200	0.00210	2.00	2.00	0.00997
10	0.00202	0.00219	2.00	2.00	0.00993

b)  $\xi_B=0.01, \mu$ : 未知,  $\Delta t=0.05$

ノイズ	$\hat{\xi}_A$	$\hat{\xi}_B$	$\hat{\omega}_A$	$\hat{\omega}_B$	$\hat{\mu}$
1	0.00199	0.0100	2.00	2.00	0.0100
5	0.00197	0.0101	2.00	2.00	0.00998
10	0.00194	0.0103	2.00	2.00	0.00996

c)  $\xi_B=0.05, \mu$ : 未知,  $\Delta t=0.05$

ノイズ	$\hat{\xi}_A$	$\hat{\xi}_B$	$\hat{\omega}_A$	$\hat{\omega}_B$	$\hat{\mu}$
1	0.00189	0.0501	2.00	2.00	0.0100
5	0.00147	0.0503	2.00	2.00	0.0101
10	0.00100	0.0506	2.00	2.00	0.0102

質量比  $\mu$  を未知とした場合の同定結果の例 ( $\Delta t=0.05$  sec) を表一6 に示す。同定精度は  $\mu$  が既知のケースに比べ若干劣るものの大きな差はなく, 観測条件の変化による影響も同様の傾向がみられた。表一6 を表一4 と比較すると, サンプリング間隔  $\Delta t$  を大きくとることにより  $\xi_B$  の小さいケースの同定精度が高くなっていることがわかる。 $\mu$  は  $\Delta t$  が 0.01 sec 以外のケースではかなり正確に推定できている。

同定の安定性はすべてのケースで高く,  $\mu$  の既知, 未知によらず 10 回程度のグローバルな繰り返しで推定値は収束した。

(2) 主構造物の変位波形のみが観測される場合

主, 副構造物からなる 2 自由度系の自由振動実験時に, 主構造物の応答波形しか計測しないことが往々にしてある。例えば, 構造物-TMD 系においては TMD の応答を計測しない場合がある。また, 前述の TLD (液体同張ダンパー) では, 液面変位を測定したとしても, それが直接  $z_B$  の測定値というわけにはいかない。

これらのことを考慮し, 主構造物の変位波形のみを用いて同定を行った。しかし, 情報量が少なすぎるためノイズがまったくない波形を用い, 未知パラメータの初期値に真値を用いて同定を行っても推定値は収束しなかった。

そこで, 変位波形をデジタル微分フィルタ<sup>17)</sup>により微分することで速度波形を求め, 変位, 速度の 2 つの波形を用いて同定を行うことにした。

この方法は (1) の主, 副構造物の応答波形からの同定に比べ困難であるため, データ数  $Nd=2000$  とした。微分フィルタにより波形の前後端で損失するデータの数は 100 と設定した。よって, 実際の同定に用いるデータの数は 1800 となる。未知パラメータの推定値の初期値

表一 誤差の共分散行列の初期値 (2自由度系)  
(主構造物の変位波形とその数値微分による速度波形からの同定)

$p_{i,j}(t_0 t_0)$ $i \neq j$	$p_{i,i}(t_0 t_0)$ $i=1 \sim 4$	$p_{i,i}(t_0 t_0)$ $i=5, 6$	$p_{i,i}(t_0 t_0)$ $i=7, 8$	$p_{i,i}(t_0 t_0)$ $i=9$
0.0	0.01	1.0E-10	1.0	1.0E-6

表一 主構造物の変位波形とその数値微分による速度波形からの同定結果 (ノイズの影響)

a)  $\xi_B=0.002, \mu$ : 既知,  $\Delta t=0.01$

ノイズ	$\hat{\xi}_A$	$\hat{\xi}_B$	$\hat{\omega}_A$	$\hat{\omega}_B$
1	0.00519	-0.00159	2.00	2.00
5	0.00350	0.00366	2.04	1.96
10	0.00568	0.00500	2.06	1.95

b)  $\xi_B=0.01, \mu$ : 既知,  $\Delta t=0.01$

ノイズ	$\hat{\xi}_A$	$\hat{\xi}_B$	$\hat{\omega}_A$	$\hat{\omega}_B$
1	0.00543	0.00741	2.02	1.98
5	0.00980	0.00258	2.02	1.98
10	0.0171	0.00420	2.06	1.94

c)  $\xi_B=0.05, \mu$ : 既知,  $\Delta t=0.01$

ノイズ	$\hat{\xi}_A$	$\hat{\xi}_B$	$\hat{\omega}_A$	$\hat{\omega}_B$
1	0.00151	0.0493	2.01	2.00
5	-0.00054	0.0496	2.01	2.00
10	-0.0270	0.0437	2.07	2.00

$\hat{\mathbf{X}}_0$ は(1)と同様(表一)とし、誤差の共分散行列の初期値  $\mathbf{P}_0$ は表一のように設定した。観測雑音ベクトルの  $\mathbf{v}$ の共分散行列は  $\mathbf{R}=0.01 \mathbf{E}$ と仮定し、重み係数  $W=100$ とした。

質量比  $\mu$ を既知としたときの同定結果の例を表一に示す。同定に用いたデータの数  $N_d$ は大きいにもかかわらず同定精度は(1)の結果に比べて低い。(1)ではほとんど誤差のなかった固有円振動数についてもノイズにより2, 3%の誤差が発生している。減衰定数  $\xi_A, \xi_B$ のうち値の小さいものについては1%のノイズに対しても大きな誤差が生じている。

また、 $\xi_B$ の大きいケース(表一b)において  $\hat{\xi}_A$ と  $\hat{\xi}_B$ を入れ換えれば真値に近い結果となるケースがみられる。これは、1点(主構造物)のみの応答波形から同定を行ったことに起因するものと考えられる。

すなわち、主構造物の応答波形のみから  $\omega_A, \omega_B, \xi_A, \xi_B$ の動的パラメータ(もしくは減衰、剛性マトリクス  $\mathbf{C}, \mathbf{K}$ )を一意的に求めることは、本来理論的に不可能である。理由は、主構造物の応答は単なる2つの独立なモードの自由減衰波形の和にすぎないからである。よって、一意的に得ることができるのはモードの固有振動数および減衰のみであり、 $\omega_A, \omega_B, \xi_A, \xi_B$ を一義的に決めるためにはさらにモード形状の情報が必要となる。しかし、ここでは1点の測定結果からの同定を想定している。そ

の結果、 $\omega_A, \omega_B, \xi_A, \xi_B$ の値が異なってもモードの固有振動数、減衰が同一であれば、それはある意味では1つの真値となる。closely-spaced modes系において  $\xi_A, \xi_B$ の値を交換しても得られるモードの固有振動数、減衰はほぼ一致する。拡張カルマンフィルタ・アルゴリズムにおいては  $\mathbf{X}, \mathbf{P}$ の初期値等の先験情報に基づき推定値を修正してゆくため、場合によっては想定した値とは別の解、すなわちほぼ  $\xi_A$ と  $\xi_B$ とが逆転した値に収束することになる。

観測条件 ( $\Delta t, T$ ) の変化による同定精度への影響は(1)と同様で、 $\xi_B$ の大きいケースでは  $\Delta t$ が小さい方が精度は高く、 $\xi_B$ の小さいケースでは逆の傾向を示している。ただし、同定の安定性は  $\Delta t$ が大きくなると悪くなり、推定値の発散が生じやすい。よって、 $\xi_B$ の小さいケースでは、 $\Delta t$ を小さくした上で  $T$ を長く、つまり  $N_d$ の大きいデータを用いないと正確で安定した同定は困難であるといえる。

同定の安定性は(1)に比べ総じて低く、100回以上のグローバルな繰り返しでも推定値は収束しないケースがいくつかあった。また、誤差の共分散行列の初期値  $\mathbf{P}_0$ により安定性は敏感に変化し、前述の  $\xi_A, \xi_B$ の逆転あるいは推定値の発散が生じた。本研究でも表一の値に落ちつくまで何回かの試行錯誤を行っている。

質量比  $\mu$ を未知としたときにはノイズがまったくない波形からでも推定値が収束しなかった。

### (3) 2段階同定法

(2)で述べた不安定性を補うために2段階同定法を考案した。TMDやTLD等の副構造物は主構造物に対し付加的にあとから設置される。よって、副構造物設置前は系を1自由度系として扱うことができる。また、副構造物が主構造物に固定可能なもの(たとえばTMD)であれば、固定時には同じく系を1自由度系と見なせる。

そこで、まず第1段階として、この状態で計測した主構造物の自由振動波形を用いて1自由度系としての同定を行い、主構造物の動特性を求める。すでに述べたように1自由度系の同定は比較的容易であり、その精度も高いことを確認している。

次に第2段階として、副構造物を付加(作動)した状態で自由振動実験を実施し、主構造物の変位および数値微分による速度波形からの同定を行う。その際、第1段階で主構造物の動特性をすでに得られているので、これを既知、すなわち定数とする。これにより、同定すべき未知パラメータは副構造物の動特性のみとなる。また、主構造物の動特性を既知とすることで(2)でみられた  $\xi_A$ と  $\xi_B$ の逆転の問題は解消され、一意的に副構造物の動特性を得ることができる。

(2)と同様  $N_d=2000$ とし、 $\mathbf{X}, \mathbf{P}$ の初期値、 $\mathbf{R}$ および  $W$ もすべて(2)と同一で同定を行った。なお、

表一9 主構造物の変位波形とその数値微分による速度波形からの同定結果(2段階法, ノイズの影響)

a)  $\xi_B=0.002, \mu$ : 既知,  $\Delta t=0.01$

ノイズ	$\xi_A$	$\hat{\xi}_B$	$\omega_A$	$\hat{\omega}_B$
1	0.002	0.00196	2.0	2.00
5		0.00179		2.00
10		0.00157		2.00

b)  $\xi_B=0.01, \mu$ : 既知,  $\Delta t=0.01$

ノイズ	$\xi_A$	$\hat{\xi}_B$	$\omega_A$	$\hat{\omega}_B$
1	0.002	0.00996	2.0	2.00
5		0.00978		2.00
10		0.00955		2.00

c)  $\xi_B=0.05, \mu$ : 既知,  $\Delta t=0.01$

ノイズ	$\xi_A$	$\hat{\xi}_B$	$\omega_A$	$\hat{\omega}_B$
1	0.002	0.0500	2.0	2.00
5		0.0498		2.00
10		0.0495		2.01

表一10 主構造物の変位波形とその数値微分による速度波形からの同定結果(2段階法, ノイズの影響)

a)  $\xi_B=0.002, \mu$ : 未知,  $\Delta t=0.01$

ノイズ	$\xi_A$	$\hat{\xi}_B$	$\omega_A$	$\hat{\omega}_B$	$\hat{\mu}$
1	0.002	0.00131	2.0	2.00	0.00981
5		-0.00356		2.00	0.00797
10		-0.0302		2.01	0.00001

b)  $\xi_B=0.01, \mu$ : 未知,  $\Delta t=0.01$

ノイズ	$\xi_A$	$\hat{\xi}_B$	$\omega_A$	$\hat{\omega}_B$	$\hat{\mu}$
1	0.002	0.00911	2.0	2.00	0.00979
5		-0.00059		2.00	0.00734
10		-0.0273		2.01	0.00001

c)  $\xi_B=0.05, \mu$ : 未知,  $\Delta t=0.01$

ノイズ	$\xi_A$	$\hat{\xi}_B$	$\omega_A$	$\hat{\omega}_B$	$\hat{\mu}$
1	0.002	0.0465	2.0	2.00	0.00950
5		-0.0148		2.00	0.00001
10		発散			

ここでは第2段階での同定精度をみるために, 第1段階では推定誤差は生じなかったと仮定している。つまり, 主構造物の動特性  $\omega_A, \xi_A$ には真値を用いている。

$\mu$ が既知のときの同定結果(第2段階)を表一9に示す。未知パラメータの数が減ることで同定の安定性はかなり高くなる。10回程度のグローバルな繰り返しで推定値は収束している。また, (1)の主, 副構造物の変位波形からの同定ケースと同程度の精度が得られた。

2段階法を用いると,  $\mu$ が未知のケースでも推定値は収束する(表一10)。しかし, ノイズによって精度はかなり低下する。ノイズがまったくなければ正確な推定が可能だが, 1%のノイズに対してもかなり大きな誤差が生じている。

## 7. 結 論

橋梁等の構造物において一般的に行われる自由振動実験を想定し, 数値的にシミュレートした closely-speded modes 系の自由振動波形からの同定を行い, その精度を検討した。同定手法には時間領域での手法である拡張カルマンフィルタ(EK-WGI法)を用いた。得られた知見を以下にまとめる。

(1) closely-speded modes 系といえども主, 副構造物の変位波形が得られていれば, 多少の観測ノイズ(5%程度)が混入してもかなり正確に動特性が推定でき, 同定の安定性も高い。この場合, 質量比  $\mu$ が未知であっても同定は可能である。

(2) 応答波形の減衰特性, すなわち副構造物の減衰定数  $\xi_B$ の大小により, 高い精度を得るための観測条件( $\Delta t, T$ )が異なる。TMDのように副構造物の減衰が大きい場合は, 細かいデータ(約300点/1波)をとることで3波程度の波形より良好な結果が得られた。一方, ケーブル等の減衰の小さい副構造物を持つ系では, 逆に粗いサンプリング(30点/1波程度)であっても波数の多いデータが必要である。

(3) 主構造物の変位波形のみから同定を行うと, 動特性の推定値は収束しなかった。しかし, デジタル微分フィルタを用いて変位波形より速度波形を得, 変位, 速度の2つの波形を用いることにより, 質量比  $\mu$ が既知の場合は同定が可能となる。ただし, 同定の安定性は低く, また情報量不足のため一意的に推定値を得るとはできない。

(4) (3)の不安定性を補うために, 2段階同定法を考案した。これは, 構造物-TMD系のように副構造物が主構造物に対し付加的に設置される, あるいは固定可能な場合にのみ有効な手法であるが, 主構造物の応答波形からでも安定した推定値が一意的に得られる。さらに, この手法を用いればノイズレベルが低い場合(1%程度)には  $\mu$ が未知でも推定値は収束する。

### 参 考 文 献

- 1) 鈴木浩平: 構造物の動特性同定に関する研究(最近の研究動向と一手法の提案), 日本機械学会論文集(C編)54巻, 501号, pp.1035~1040, 1988.5.
- 2) 大田 亨・勝地 弘: 檜石島橋実橋振動実験, 本四技報 Vol.13, No.48, pp.12~21, 1988.10.
- 3) 成瀬輝男他: 主塔制振装置の開発, 石川島播磨技報第25巻6号, pp.393~398, 1985.11.
- 4) 柴田 碧・原 亮一: うなりをとまなう減衰波形の解析法, 生産研究第17巻 第8号, pp.208~210, 1965.
- 5) 譜岐康博他: Beating 波形からの各単振動の対数減衰率算出法, 第2回橋梁振動に関するコロキウム論文報告集, pp.109~114, 1989.8.
- 6) 大島弘義: 2自由度系システムの動的パラメータ同定



- について, 東京大学修士論文, 1990. 3.
- 7) 有本 卓: カルマン・フィルター, 産業図書, 1979.
  - 8) 片山 徹: 応用カルマンフィルタ, 朝倉書店, 1983.
  - 9) 星谷 勝・斉藤悦郎: 拡張カルマンフィルターを用いた同定問題の各種振動系への応用, 土木学会論文報告集 第 339 号, pp. 59~67, 1983. 11.
  - 10) 藤野陽三: 構造物の制振対策 (土木分野), (解説論文), 日本風工学会誌第 44 号, pp. 54~68, 1990. 7.
  - 11) 藤野陽三・阿部雅人: 自励振動に対する TMD の設計とその制振効果に関する 2, 3 の考察, 第 11 回風工学シンポジウム論文集, pp. 107~112, 1990. 12.
  - 12) 星谷 勝・斉藤悦郎: 線形多自由度系の動特性の推定, 土木学会論文報告集 第 344 号 / I-1, pp. 289~298, 1984. 4.
  - 13) 丸山・斉藤・星谷: 移動荷重-はり系の動特性推定, 土木学会論文報告集 第 368 号 / I-5, pp. 283~292, 1986. 4.
  - 14) 山田・宮田・市川: 橋桁に作用する連成空気力推定に関する研究, 第 11 回風工学シンポジウム論文集, pp. 55~60, 1990. 12.
  - 15) 吉田・岩本・藤野・伊藤: 自由振動波形を用いた桁に作用する動的空気力の同定, 土木学会第 46 回学術講演会講演概要集, pp. 450~451, 1991. 9.
  - 16) 藤野陽三他: TMD アナロジーをベースにした TLD の特性の理解, 構造工学論文集 Vol. 36A, 土木学会, pp. 577~590, 1990. 3.
  - 17) R. W. Hamming: デジタル・フィルタ, 宮川, 今井訳, 科学技術出版社, 1980.

(1991. 10. 9 受付)

## IDENTIFICATION OF DYNAMIC PARAMETERS IN CLOSELY SPACED 2DOF LINEAR SYSTEM FROM FREE VIBRATION DATA

Masami IWAMOTO and Yozo FUJINO

The extended Kalman filter (EK-WGI method) was employed to identify dynamic parameters of closely-spaced 2DOF linear system from free vibration data. Its applicability was examined through numerical simulations. It is found that accurate and stable estimation is applicable when displacement records of both degrees of the model are available, even in the presence of 5% noise. Results show that the identification from data of only one degree response is difficult, while the 2-stage estimation method suggested in this paper is effective in the structure-TMD system.