

変位と面外応力を仮定する層状性複合構造の一般化高次理論

根岸嘉和*・平島健一**

層状性複合構造の静的・動的挙動を解析するための一般化高次近似理論を構築し、数値例を提示して理論特性と精度特性を明かにする。ここでは、各層ごとの変位と面外応力を層厚座標の無限級数で展開仮定し、混合型の変分原理に基づいて理論を定式化する。本理論は、上下表面ならびに層接合面での境界条件・連続条件を満足し、従来の理論の問題点を改善した高精度な理論であることが示される。

Keywords: laminated composite, general higher-order theory, mixed assumption, continuity condition.

1. まえがき

本研究においては、層状性複合構造をもった平板、はりおよび連続体を解析対象とする。それらは、巨視的には均質異方性材料とみなせる薄層を多重積層した構造や、表層と核層からなるサンドイッチ構造等の層状性をもつ構造ならびに要素である。層状性複合構造は、一般に異方性を示す異種の層を重ね合わせることによって、単一材料では得られないすぐれた機能や性質をもつ材料を作り出そうとしたものであり、各種の新素材を強化材として用いた繊維強化複合材料¹⁾などの開発に伴い急速な発展を遂げつつある。

こうした趨勢に呼応し、層状性複合構造あるいは層状性複合材料の力学的挙動を解明するための解析理論の提案と、それらに基づく解析例の報告が、多くの異なった分野から盛んになされてきた。著者らは、層状性複合構造を巨視力学的立場から捉えた理論を中心に、各種理論・研究を系統的に分類し、整理位置づけを行って、この類の研究の歴史的経緯と現状を明らかにした²⁾。

これらの理論は定式化の出発点における物理量の仮定によって、変位仮定型、応力仮定型および混合仮定型に分割されると同時に、全層にわたって一体化した仮定を設けた理論と、層ごとに異なった仮定を設けた理論に大別される。このうち、全層にわたって一体化した仮定を設けた理論は、Loらの理論³⁾ならびに著者らが先に提案した理論⁴⁾(第5章で述べる)のように、変位仮定型理論に限定される。これらはいずれも厚さ方向変位分布が滑らかなものとなるため、たとえかなり高次の成分まで考慮しても、層が移るとき分布形が急激な折れ曲がりの変化を呈する現象を表すことができず、また面外応力が層

接合面で不連続になり、上下表面での境界(荷重)条件を満足しないため、一般に精度の高い解が得られにくい。他方、層ごとに異なった仮定を設ける理論においては、変位仮定、混合仮定、応力仮定の各種理論が存在し得る。このうち変位仮定型理論⁵⁾には面外応力が層境界での連続条件・境界条件を満たさない欠点があり、混合仮定型理論⁶⁾には未知量の数が多くなるという問題点がある。また応力仮定型理論⁷⁾は一般に扱いにくく、特に動的問題の解析に関して困難な問題を内在している。また、層ごとに異なった仮定を設ける理論では、いずれも層数の増大と共に未知量の数が増大することから、各層内での物理量の厚さ方向変化は1次⁸⁾あるいは2次⁸⁾分布程度までを考慮したものとなっており、一般的な高次化はなされていない。なお、一体化の仮定と層ごとの仮定を併用した理論^{9), 11)}もあるが、解析精度の本質的改良には結び付いていない。このように層状性複合構造の解析理論に関しては、構造の特性を十分に考慮し精密な解析が可能な工学理論が完全に確立された段階にはいたっていないように思われる。

そこで本研究においては、各層ごとに変位と面外応力成分を、無次元化層厚座標の多項式(Legendre多項式を積分したもの)で展開仮定し、新たに定式化した混合型の動的変分原理を用いて、層状性複合構造に関する混合仮定型の静的・動的な一般化高次理論を構築する。また、静的ならびに動的な解析例を提示して精度の検証を行う。ここで定式化する理論は、各層の変位と面外応力を仮定する理論であるため、上下表面の境界条件が応力(荷重)、変位のどちらを規定している場合でも、それらを完全に満足し、層接合面での変位と面外応力の連続条件をともに満足するという混合仮定型の利点を保持しながら、全ての応力成分と変位を仮定する理論に比べ、従属変数の数を少なく抑えられるという特長を有するものである。この系統における高次理論定式化の試みは、

* 正会員 工修 福島工業高等専門学校助教授 土木工学科 (〒970 いわき市平上荒川字長尾 30)

** 正会員 工博 山梨大学教授 工学部土木環境工学科

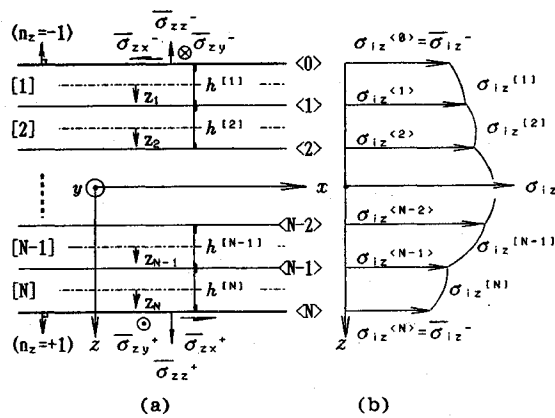


図-1 層状性複合構造と座標系ならびに面外応力の仮定

静的問題に関して、ある特殊な多項式を用い、限られた次数までに限定した形で幾つか⁹⁾⁻¹¹⁾なされているに過ぎなかったが、本研究は、これらを含し一般化した静的・動的理論を構築しようとしたものである。

2. 混合型の動的変分原理

本研究において対象とする層状性複合構造の形状と座標系を図-1 (a) に示す。この構造は任意厚さの異方性層が任意数積層されたもので、側端面は層に直交する曲面あるいは平面とする。上下表面の境界条件は、一般に図中に示すように応力(荷重)： $\bar{\sigma}_{iz}$, $\bar{\sigma}_{iz}$ で与えられるが、変位： \bar{u}_i , \bar{u}_i で与えられる場合も同様に解析可能である。また座標系は、上下表面ならびに層境界面に平行な方向に x 軸, y 軸をとり、これらに直交する方向を z 軸とする。なお $x-y$ 平面は、ある層の中央平面に一致しているものとし、第 k 層の層厚座標を z_k ; $k=1, 2, \dots, N$ で表す。

なお以降の諸式において、 x, y, z 以外のラテン添字は x, y, z をそれぞれとり、ギリシャ添字は面内座標 x, y をとるものとする。またコンマ(,)の後の添字はその座標に関する偏微分を表し、繰り返し添字は総和規約に従うものとする。さらにドット(・)は時間 t に関する偏微分を表す。添字の番号 $[k]$; $k=1, 2, \dots, N$ は層番号を、 $\langle k \rangle$; $k=0, 1, 2, \dots, N$ は境界面番号を表し、層厚 $h^{[k]}$ のように用いる。

各層の材料は層面に平行な一つの弾性対称面を有する Monoclinic 弾性体とし、次の構成関係式を用いる。

(面内応力の幾何-構成関係式)：

$$\sigma_{\alpha\beta} = \bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{r,\delta} + \frac{C_{\alpha\beta\gamma z}}{C_{zzzz}} \sigma_{zz} \dots (1)$$

(面外ひずみの構成関係式)：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \frac{C_{zz\gamma\delta}}{C_{zzzz}} u_{r,\delta} + \frac{1}{C_{zzzz}} \sigma_{zz} \\ 2\varepsilon_{\alpha z} &= S_{\alpha z\gamma} \sigma_{r\gamma} \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

ただし、 u_i は変位成分、 σ_{ij} は応力テンソル、 ε_{ij} はひずみテンソルであり、 C_{ijkl} 等は材料定数である。なお、上式ならびに以下の式の誘導においては、次式の面内ひずみの幾何学的関係式を用いている。

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha})/2 \dots (3)$$

この層状性複合構造の動的な支配方程式ならびに境界条件式を得るため、次式のような変分原理を用いる。

$$\left. \begin{aligned} &\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_V \left\{ U_\alpha(u_\alpha) + \frac{1}{2} \sigma_{iz} (u_{i,z} + u_{z,i}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - W(u_\alpha, \sigma_{iz}) \right\} dV \right. \\ &\quad \left. - \int_V f_i u_i dV - \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV \right. \\ &\quad \left. - \int_{S_\sigma} \bar{t}_i u_i dS - \int_{S_u} r_i (u_i - \bar{u}_i) dS \right] dt = 0; \\ &W(\sigma_{iz}, u_\alpha) = \sigma_{iz} \varepsilon_{iz} - \{ U(u_\alpha, \sigma_{iz}) - U_\alpha(u_\alpha) \}. \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

また、付帯条件は次式のような変位に関する Hamilton 原理の初期値・終値条件である。

$$\delta u_i = 0; t = t_1, t_2 \dots (5)$$

ここに $U_\alpha(u_\alpha) = U_\alpha(\varepsilon_{\alpha\beta})$ はひずみエネルギー密度関数 $U(\varepsilon_{ij})$ のうち面内ひずみ $\varepsilon_{\alpha\beta}$ の 2 次形式で表される部分である。また f_i は物体力、 ρ は質量密度であり、 r_i は Lagrange の未定乗数である。 V は構造の内部領域を、 S_σ は作用表面力 \bar{t}_i が規定された応力境界、 S_u は変位 \bar{u}_i が規定された変位境界をそれぞれ表す。

本変分原理は、以下に示すように Hamilton 原理¹²⁾あるいは Hellinger-Reissner 原理¹²⁾から導かれる。

まず、次式の Hamilton 原理：

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_V U(\varepsilon_{ij}) dV - \int_V f_i u_i dV - \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV - \int_{S_\sigma} \bar{t}_i u_i dS \right] dt = 0 \dots (6)$$

付帯条件：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \\ \delta u_i &= 0 \quad ; \quad \text{on } S_u, \\ \delta u_i &= 0 \quad ; \quad t = t_1, t_2. \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

からの誘導は次のように行われる。すなわち、ひずみエネルギー密度関数 $U(\varepsilon_{ij})$ を面内ひずみのみに関する部分 $U_\alpha(\varepsilon_{\alpha\beta})$ と面外ひずみを含む部分 $U_z(\varepsilon_{iz}, \varepsilon_{\alpha\beta})$ に分け、付帯条件式 (7)₁ のうち面外ひずみの幾何学的関係式は Lagrange 乗数 σ_{iz} を乗じて変分原理式中で考慮し、残る面内ひずみの幾何学的関係式を用いて $\varepsilon_{\alpha\beta}$ を面内変位 u_α で表す。さらに変分の結果 σ_{iz} の物理的意味が面外応力となることを踏まえつつ、式 (4)₂ の定義に従うエネルギー関数 $W(\sigma_{iz}, u_\alpha)$ を導入して次式を得る。

$$\int_V U(\varepsilon_{ij}) dV = \int_V [U_\alpha(\varepsilon_{\alpha\beta}) + U_z(\varepsilon_{iz}, \varepsilon_{\alpha\beta}) + \sigma_{iz} \{ (u_{i,z} + u_{z,i})/2 - \varepsilon_{iz} \}] dV$$

$$= \int_V [U_\alpha(u_\alpha) + \sigma_{iz}(u_{i,z} + u_{z,i})/2 - W(\sigma_{iz}, u_\alpha)] dV \dots\dots\dots (8)$$

この結果を用いて式(6)の $U(\varepsilon_{ij})$ を書き換え、同時に付帯条件式(7)₂の変位境界条件にLagrange乗数 r_i を乗じたものを考慮することによって式(4)が得られる。

他方、動弾性学における混合型変分原理である次式のHellinger-Reissner原理:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i}) - U^c(\sigma_{ij}) dV - \int_V f_i u_i dV - \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV - \int_{S_\sigma} \bar{t}_i u_i dS - \int_{S_u} r_i (u_i - \bar{u}_i) dS \right] dt = 0 \dots\dots\dots (9)$$

からの本変分原理の誘導は次のようである。まず補足ひずみエネルギー密度関数 $U^c(\sigma_{ij})$ をLegendre変換によりひずみエネルギー密度関数 $U(\varepsilon_{ij})$ で書き換えた後、前述のようにこれを $U_\alpha(\varepsilon_{\alpha\beta})$ と $U_z(\varepsilon_{iz}, \varepsilon_{\alpha\beta})$ に分離する。ここで面内ひずみの幾何学的関係式を仮定することにより面内ひずみを変位で表し、前述のような混合型のエネルギー関数 $W(\sigma_{iz}, u_\alpha)$ を導入すると次式

$$U^c(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - U(\varepsilon_{ij}) = \sigma_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} + \sigma_{iz} \varepsilon_{iz} - \{U_\alpha(\varepsilon_{\alpha\beta}) + U_z(\varepsilon_{iz}, \varepsilon_{\alpha\beta})\} = \sigma_{\alpha\beta} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha})/2 - U_\alpha(u_\alpha) - W(\sigma_{iz}, u_\alpha) \dots\dots\dots (10)$$

が得られる。これを用いて式(9)を書き換えることによって式(4)が導かれる。

以上のように本変分原理はHamilton原理とHellinger-Reissner原理の双方から導かれ、両者の中間に位置する原理である。同時に本変分原理はReissnerの新しい混合型の変分原理¹³⁾に運動エネルギーを考慮した動弾性学の変分原理となっている。なお本変分原理は、ここで定式化する層状性複合構造の解析理論をはじめ、一般の平板、はり、シェル等の静的・動的解析理論の構築に好適な原理である。なぜなら、変位と面外応力成分を独立変量に採っていることから、本変分原理に基づいて定式化される理論は、動的項の考慮もたやすく、また変位と面外応力の境界条件・連続条件を満たすことも容易であると同時に、混合型でありながら、他の混合型の原理すなわちHellinger-Reissner原理、Hu-Washizu原理¹²⁾に基づく理論に比べて、独立変量(未知量)の数が少ないという利点を有するものとなるからである。

さて、式(4)の変分操作として独立変量を u_i, σ_{iz} ならびに r_i にとった演算を実施した後、Gaussの発散定理を用いて体積積分を行い、同時に時間 t に関する部分積分を実施する。その結果を付帯条件ならびに、変分の結果得られる r_i の物理的意味: $r_i = n_j \sigma_{ij}$ を考慮して

整理し、さらにこれを積層構造に関する式として表現すると最終的に次式を得る。

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_A \left[\sum_{k=1}^N \int_{h^{(k)}} (\delta u_\alpha (\sigma_{\alpha\beta,\beta} + \sigma_{zz,z} + f_\alpha - \rho \ddot{u}_\alpha) + \delta u_z (\sigma_{z\beta,\beta} + \sigma_{zz,z} + f_z - \rho \ddot{u}_z) + \delta \sigma_{\alpha z} (2\varepsilon_{\alpha z} - [u_{\alpha,z} + u_{z,\alpha}]) + \delta \sigma_{zz} (\varepsilon_{zz} - u_{z,z})) \right]^{(k)} dx dy - \oint_{(S_\sigma)} \left[\sum_{k=1}^N \int_{h^{(k)}} (\delta u_i (n_j \sigma_{ij} - \bar{t}_i)) \right]^{(k)} dz ds - \oint_{(S_u)} \left[\sum_{k=1}^N \int_{h^{(k)}} (n_j \delta \sigma_{ij} (u_i - \bar{u}_i)) \right]^{(k)} dz ds \right] dt = 0 \dots\dots\dots (11)$$

上式中の $\sigma_{\alpha\beta}, \varepsilon_{iz}$ は、独立変量である変位と面外応力を用いて式(1)、(2)で表される面内応力成分ならびに面外ひずみ成分である。式(11)の体積積分中の δu_i に関する停留条件から運動方程式が、また $\delta \sigma_{iz}$ に関する停留条件から面外ひずみの幾何学的関係式が得られる。同時に S_σ 上での u_i ならびに S_u 上での $n_j \sigma_{ij}$ の停留条件より境界条件式が得られることになる。

3. 理論の定式化

本章では2章で導いた混合型の変分原理を用いて、層状性複合構造の一般化高次理論を定式化する。

理論構築の出発点として、無次元化した層厚座標 $\zeta(\zeta = z_k/c^{(k)}, c^{(k)} = h^{(k)}/2)$ に関する無限多項式 $R_m(\zeta)$ ¹⁴⁾ を用意する。これはLegendre多項式 $P_m(\zeta)$ を ζ で一回積分した多項式であり、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} R_m(\zeta) &= \int P_m(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^{m-1}}{d\zeta^{m-1}} (\zeta^2 - 1)^m \\ &= \frac{1}{(2m+1)} \{P_{m+1}(\zeta) - P_{m-1}(\zeta)\}; \\ R_0(\zeta) &= \zeta, R_1(\zeta) = \frac{1}{2}(\zeta^2 - 1), R_2(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta(\zeta^2 - 1), \\ R_3(\zeta) &= \frac{1}{8}(\zeta^2 - 1)(5\zeta^2 - 1), \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

多項式 $R_m(\zeta)$ は $m \geq 1$ において $R_m(\pm 1) = 0$ となる。この性質を利用することにより、各層の境界・連続条件を最初から満足させた変位と面外応力の仮定が可能となる。

すなわち、まず式(12)の $R_m(\zeta)$ に定数項を補った多項式を用いて、各層 ($k=1, 2, \dots, N$) ごとの変位と面外応力の成分を展開した仮定を設ける。次に各成分の低次の2項を上下表面および層接合面での面外応力 $\sigma_{iz}^{<k>}$ ならびに変位 $u_i^{<k>}$ で表すことにより、層接合面での連続条件を満足する次式のような変位と面外応力を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u_i^{[k]} &= \frac{1}{2}(1-\zeta)u_i^{<k-1>} + \frac{1}{2}(1+\zeta)u_i^{<k>} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} u_i^{[k(m)]} R_m(\zeta), \\ \sigma_{iz}^{[k]} &= \frac{1}{2}(1-\zeta)\sigma_{iz}^{<k-1>} + \frac{1}{2}(1+\zeta)\sigma_{iz}^{<k>} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{iz}^{[k(m)]} R_m(\zeta). \end{aligned} \right\} \dots\dots (13)$$

さらに境界 (荷重) 条件を満足させるため、上下表面での面外応力係数を次式のように規定応力 $\bar{\sigma}_{iz}$ 、 $\bar{\sigma}_{iz}^{\dagger}$ に一致させる。

$$\sigma_{iz}^{>0} = \bar{\sigma}_{iz}, \sigma_{iz}^{>N} = \bar{\sigma}_{iz}^{\dagger} \dots\dots (14)$$

このようにして境界・連続条件を満足させた面外応力 σ_{iz} の厚さ方向分布の概念図を図-1 (b) に示した。なお、表面の境界条件が変位で与えられる場合には、上下表面での変位係数を規定変位 \bar{u}_i^- 、 \bar{u}_i^+ に一致させればよい。

以上の変位、面外応力の仮定に基づき理論の定式化を行う。式 (13) を式 (1) に代入して面内応力の級数表示式を得た後、式 (12) を考慮して変分式 (11) の層厚方向積分を形式的に実施すると、変位係数 $u_i^{<k>}$ 、 $u_i^{[k(m)]}$ および面外応力係数 $\sigma_{iz}^{<k>}$ 、 $\sigma_{iz}^{[k(m)]}$ の変分の係数式として次式が得られる。なお δ_{ij} は Kronecker のデルタであり、ダッシュ (') は ζ に関する偏微分を表す。

(運動方程式) : $\delta u_i^{<k>}$ 、 $\delta u_i^{[k(m)]}$ の係数式

$$\left. \begin{aligned} (1-\delta_{k0})c^{[k]}(\sigma_{i\beta}^{(+)} + \sigma_{i\beta}^{(-)} + f_i^{(+)} - \rho \ddot{u}_i^{(+)})^{[k]} \\ + (1-\delta_{kN})c^{[k+1]}(\sigma_{i\beta}^{(-)} \\ + \sigma_{i\beta}^{(+)} + f_i^{(-)} - \rho \ddot{u}_i^{(-)})^{[k+1]} = 0, \\ c^{[k]}(\sigma_{i\beta}^{(m)} + \sigma_{i\beta}^{(m)} + f_i^{(m)} - \rho \ddot{u}_i^{(m)})^{[k]} = 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots (15)$$

(幾何学的関係式) : $\delta \sigma_{iz}^{<k>}$ 、 $\delta \sigma_{iz}^{[k(m)]}$ の係数式

$$\left. \begin{aligned} c^{[k]}(\varepsilon_{iz}^{(+)} - [u_{i,z}^{(+)} + u_{z,i}^{(+)}]/2)^{[k]} \\ + c^{[k+1]}(\varepsilon_{iz}^{(-)} - [u_{i,z}^{(-)} + u_{z,i}^{(-)}]/2)^{[k+1]} = 0, \\ c^{[k]}(\varepsilon_{iz}^{(m)} - [u_{i,z}^{(m)} + u_{z,i}^{(m)}]/2)^{[k]} = 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots (16)$$

また、側端面上での境界条件として次式が得られる。

(境界条件) : $(m = -, +, 1, 2, \dots, 2M-2)$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^N c^{[k]} \{n_{\alpha} \sigma_{i\alpha}^{(m)}\}^{[k]} = \sum_{k=1}^N c^{[k]} \{ \bar{t}_i^{(m)} \}^{[k]}, \\ \text{or} \\ \sum_{k=1}^N c^{[k]} \{u_i^{(m)}\}^{[k]} = \sum_{k=1}^N c^{[k]} \{ \bar{u}_i^{(m)} \}^{[k]}. \end{aligned} \right\} \dots\dots (17)$$

上式および後出の式において用いられる各成分の重み付き断面積分量は各々次式で与えられる量である。

$$\{ \square^{(-)}; \square^{(+)}; \square^{(m)} \} = \int_{-1}^{+1} \square \times \left\{ \frac{1}{2}(1-\zeta); \frac{1}{2}(1+\zeta); R_m(\zeta) \right\} d\zeta \dots\dots (18)$$

これらの具体的表示式は、重み付き積分の実施に際し $R_m(\zeta)$ が、定義式 (12) からわかる通り次式の直交性に準ずる性質 ($m, n \geq 1$ の場合のみ示す) :

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_n^m &= \int_{-1}^{+1} R_n(\zeta) R_m(\zeta) d\zeta \\ &= \begin{cases} \frac{2(3\delta_{nm}-1)}{(m+n-1) \cdot (m+n+1) \cdot (m+n+3)} \\ 0 \end{cases} \\ &: \begin{cases} m=n \\ m=n \pm 2 \end{cases} \\ &: \text{その他}, \\ \\ \Lambda_n^m &= \int_{-1}^{+1} P_n(\zeta) R_m(\zeta) d\zeta \\ &= \begin{cases} \frac{2(\delta_{n,m+1} - \delta_{n,m-1})}{(2n+1) \cdot (2m+1)} & : m=n \pm 1 \\ 0 & : \text{その他.} \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots\dots (19)$$

を示すことを利用し、連成項が少なく比較的簡潔な式として得られるが、それらは紙面の都合上省略する。

これらの断面積分量を式 (15)、(16) の基礎方程式に代入すると、未知変位係数 $u_i^{<k>}$ 、 $u_i^{[k(m)]}$ および未知応力係数 $\sigma_{iz}^{<k>}$ 、 $\sigma_{iz}^{[k(m)]}$ に関する支配方程式が得られる。

まず運動方程式の例として、 x 方向の運動方程式すなわち $\delta u_x^{<k>}$ と $\delta u_x^{[k(m)]}$ の係数式を示す。

$$\begin{aligned} (1-\delta_{k0})[(D_{i1}^{[k]} - D_{i1}^{[k]})\{(u_x^{<k-1>} + 2u_x^{<k>} - u_x^{[k]}) \\ - u_x^{[k]}/5\} + D_{i6}^{[k]}\{(u_y^{<k-1>} + 2u_y^{<k>} - u_y^{[k]}) - u_y^{[k]}/5\} \\ - \{3(-\sigma_{zz}^{<k-1>} - \sigma_{zz}^{<k>}) - 2\sigma_{zz(1)}^{[k]}\} + D_{i3}^{[k]}\{(\sigma_{zz}^{<k-1>} \\ + 2\sigma_{zz}^{<k>}) - \sigma_{zz(1)}^{[k]} - \sigma_{zz(2)}^{[k]}/5\} + 3c^{[k]}f_x^{[k]}] \\ + (1-\delta_{kN})[(D_{i1}^{[k+1]} - D_{i1}^{[k+1]})\{(2u_x^{<k>} + u_x^{<k+1>}) \\ - u_x^{[k+1]} + u_x^{[k+1]}/5\} + D_{i6}^{[k+1]}\{(2u_y^{<k>} + u_y^{<k+1>}) \\ - u_y^{[k+1]} + u_y^{[k+1]}/5\} - \{3(\sigma_{zz}^{<k>} - \sigma_{zz}^{<k+1>}) \\ + 2\sigma_{zz(1)}^{[k+1]} + D_{i3}^{[k+1]}\{(2\sigma_{zz}^{<k>} + \sigma_{zz}^{<k+1>}) - \sigma_{zz(1)}^{[k+1]} \\ + \sigma_{zz(2)}^{[k+1]}/5\} + 3c^{[k]}f_x^{[k]}] = 0. \dots\dots (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D_{i1}^{[k]} - D_{i1}^{[k]})\{(\delta_{m1} - \delta_{m2}/5)u_x^{<k-1>} \\ + (\delta_{m1} + \delta_{m2}/5)u_x^{<k>} - 3(\Gamma_{m-2}^m u_x^{[k](m-2)} + \Gamma_m^m u_x^{[k](m)} \\ + \Gamma_{m+2}^m u_x^{[k](m+2)})\} + D_{i6}^{[k]}\{(\delta_{m1} - \delta_{m2}/5)u_y^{<k-1>} \\ + (\delta_{m1} + \delta_{m2}/5)u_y^{<k>} - 3(\Gamma_{m-2}^m u_y^{[k](m-2)} + \Gamma_m^m u_y^{[k](m)} \\ + \Gamma_{m+2}^m u_y^{[k](m+2)})\} - \{\delta_{m1}(\sigma_{zz}^{<k-1>} - \sigma_{zz}^{<k>}) \\ + 3(\Lambda_{m-1}^m \sigma_{zz(m-1)}^{[k]} + \Lambda_{m+1}^m \sigma_{zz(m+1)}^{[k]})\} \\ + D_{i3}^{[k]}\{(\delta_{m1} - \delta_{m2}/5)\sigma_{zz}^{<k-1>} + (\delta_{m1} + \delta_{m2}/5)\sigma_{zz}^{<k>} \\ - 3(\Gamma_{m-2}^m \sigma_{zz(m-2)}^{[k]} + \Gamma_m^m \sigma_{zz(m)}^{[k]} + \Gamma_{m+2}^m \sigma_{zz(m+2)}^{[k]})\} \\ + 2\delta_{m1}c^{[k]}f_x^{[k]} = 0. \dots\dots (21) \end{aligned}$$

上式中の微分演算子はそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} D_{11}^{[k]} &= c^{[k]} [\bar{C}_{xxxx}^{[k]} \partial_{xx} + 2\bar{C}_{xxyy}^{[k]} \partial_{xy} + \bar{C}_{xyxy}^{[k]} \partial_{yy}], \\ D_{16}^{[k]} &= c^{[k]} [\bar{C}_{xxxy}^{[k]} \partial_{xx} + (\bar{C}_{xxyy}^{[k]} + \bar{C}_{xyxy}^{[k]}) \partial_{xy} + \bar{C}_{yyxy}^{[k]} \partial_{yy}], \\ D_{13}^{[k]} &= c^{[k]} \left[\frac{C_{xyzz}^{[k]}}{C_{zzzz}^{[k]}} \partial_x + \frac{C_{yzzz}^{[k]}}{C_{zzzz}^{[k]}} \partial_y \right], \\ D_{ii}^{[k]} &= c^{[k]} \rho^{[k]} \partial_{ii}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

また、これらの式ならびに以下の各式においては式(19)で定義した断面積分量を導入している。

なお、前述のように上下表面の面外応力係数 $\sigma_{iz}^{<0>}$, $\sigma_{iz}^{<N>}$ は表面の作用荷重により式(14)のように表されることを考慮し、 $\delta u_x^{<0>}$ の係数式すなわち式(20)の $k=0$ の場合を具体的に示せば次式のようなになる。

$$\begin{aligned} & (D_{11}^{[1]} - D_{11}^{[n]}) \{ (2u_x^{<0>} + u_x^{<1>}) - u_{x(1)}^{[1]} + u_{x(2)}^{[n]} / 5 \} \\ & + D_{16}^{[1]} \{ (2u_y^{<0>} + u_y^{<1>}) - u_{y(1)}^{[1]} + u_{y(2)}^{[n]} / 5 \} + D_{13}^{[1]} \{ \sigma_{zz}^{<1>} \\ & - \sigma_{zz(1)}^{[1]} + \sigma_{zz(2)}^{[n]} / 5 \} + \{ 3\sigma_{zz}^{<1>} - 2\sigma_{zz(1)}^{[1]} \} \\ & + 3c^{[1]} f_x^{[1]} = 3\bar{\sigma}_{zz} - 2D_{13}^{[1]} \bar{\sigma}_{zz}. \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

他の式における荷重項も同様にして与えられる。

以上が x 方向の運動方程式であり、 y 方向についても同形の式が得られる。さらに z 方向の運動方程式も同じようにして得られるがそれらは省略する。

次に、幾何学的関係式の例として面外せん断ひずみ ϵ_{xz} の幾何-構成関係に基づく式すなわち $\delta\sigma_{xz}^{<k>}$ および $\delta\sigma_{zz}^{[k(m)]}$ の係数式を示す。

$$\begin{aligned} & (1 - \delta_{k0}) \{ \{ (3/2)(u_x^{<k-1>} - u_x^{<k>}) - u_{x(1)}^{[k]} \} \\ & - c^{[k]} \{ (u_z^{<k-1>} + 2u_z^{<k>}) - u_{z(1)}^{[k]} - u_{z(2)}^{[k]} / 5 \},_x \\ & + c^{[k]} a_{55}^{[k]} \{ (\sigma_{zz}^{<k-1>} + 2\sigma_{zz}^{<k>}) - \sigma_{zz(1)}^{[k]} - \sigma_{zz(2)}^{[k]} / 5 \} \\ & + c^{[k]} a_{45}^{[k]} \{ (\sigma_{yz}^{<k-1>} + 2\sigma_{yz}^{<k>}) - \sigma_{yz(1)}^{[k]} - \sigma_{yz(2)}^{[k]} / 5 \} \\ & + (1 - \delta_{kN}) \{ \{ (3/2)(u_x^{<k>} - u_x^{<k+1>}) + u_{x(1)}^{[k+1]} \} \\ & - c^{[k+1]} \{ (2u_z^{<k>} + u_z^{<k+1>}) - u_{z(1)}^{[k+1]} + u_{z(2)}^{[k+1]} / 5 \},_x \\ & + c^{[k+1]} a_{55}^{[k+1]} \{ (2\sigma_{zz}^{<k>} + \sigma_{zz}^{<k+1>}) - \sigma_{zz(1)}^{[k+1]} + \sigma_{zz(2)}^{[k+1]} / 5 \} \\ & + c^{[k+1]} a_{45}^{[k+1]} \{ (2\sigma_{yz}^{<k>} + \sigma_{yz}^{<k+1>}) - \sigma_{yz(1)}^{[k+1]} \\ & + \sigma_{yz(2)}^{[k+1]} / 5 \} \} = 0. \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{ \delta_{m1} (u_x^{<k-1>} - u_x^{<k>}) + 3(A_{m-1}^m u_{x(m-1)}^{[k]} + A_{m+1}^m u_{x(m+1)}^{[k]}) \} \\ & - c^{[k]} \{ -(\delta_{m1} - \delta_{m2} / 5) u_z^{<k-1>} + (\delta_{m1} + \delta_{m2} / 5) u_z^{<k>} \\ & - 3(\Gamma_{m-2}^m u_{z(m-2)}^{[k]} + \Gamma_{m-1}^m u_{z(m-1)}^{[k]} + \Gamma_{m+1}^m u_{z(m+1)}^{[k]}) \},_x \\ & + c^{[k]} a_{55}^{[k]} \{ (\delta_{m1} - \delta_{m2} / 5) \sigma_{zz}^{<k-1>} + (\delta_{m1} + \delta_{m2} / 5) \sigma_{zz}^{<k>} \\ & - 3(\Gamma_{m-2}^m \sigma_{zz(m-2)}^{[k]} + \Gamma_{m-1}^m \sigma_{zz(m-1)}^{[k]} + \Gamma_{m+1}^m \sigma_{zz(m+1)}^{[k]}) \} \\ & + c^{[k]} a_{45}^{[k]} \{ (\delta_{m1} - \delta_{m2} / 5) \sigma_{yz}^{<k-1>} + (\delta_{m1} + \delta_{m2} / 5) \sigma_{yz}^{<k>} \\ & - 3(\Gamma_{m-2}^m \sigma_{yz(m-2)}^{[k]} + \Gamma_{m-1}^m \sigma_{yz(m-1)}^{[k]} + \Gamma_{m+1}^m \sigma_{yz(m+1)}^{[k]}) \} = 0. \end{aligned} \dots\dots\dots (25)$$

上式中の弾性係数は、それぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} a_{55}^{[k]} &= C_{yzyz}^{[k]} / \Omega^{[k]}, a_{45}^{[k]} = -C_{xyyz}^{[k]} / \Omega^{[k]}, \\ \Omega^{[k]} &= C_{yzyz}^{[k]} C_{zzzz}^{[k]} - (C_{yzxz}^{[k]})^2. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

同時に、 ϵ_{yz} の構成関係に基づく式が添字を $(x \leftrightarrow y, 4 \leftrightarrow 5)$ のように置き換えた同形の式として得られ、また ϵ_{zz} の幾何-構成関係に基づく式も得られるが、それらは省略する。

4. 項打ち切りの実施による各次数の理論

本理論は変位と面外応力をそれぞれ独立に無限次数まで考慮できる形に定式化されているため、これらに適切な項打ち切りを実施することによって、低次から高次にいたる各種の理論式を得ることができる。ここではそのうちの典型的な項採用法を用い、 M 次理論における変位と面外応力の成分の項採用次数を次式のように設定する。

$$\left. \begin{aligned} u_i^{[k]} &= \frac{1}{2} (1 - \zeta) u_i^{<k-1>} + \frac{1}{2} (1 + \zeta) u_i^{<k>} \\ & + \sum_{m=1}^{2(M-1)} u_i^{[k(m)]} R_m(\zeta), \\ \sigma_{iz}^{[k]} &= \frac{1}{2} (1 - \zeta) \sigma_{iz}^{<k-1>} + \frac{1}{2} (1 + \zeta) \sigma_{iz}^{<k>} \\ & + \sum_{m=1}^{2(M-1)} \sigma_{iz}^{[k(m)]} R_m(\zeta). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

N 層構造の場合、上下表面での面外応力係数 $\sigma_{iz}^{<0>}$, $\sigma_{iz}^{<N>}$ は表面の作用荷重により式(14)のように表されることを考慮した全未知量の数は次の通りである。

1次理論：式(27)の低次2項すなわち上下表面と層接合面での値のみを採用し、各物理量が各層内で厚さ方向に直線変化するとした場合で、全未知量数は $6N$ 個。

M 次理論 ($M \geq 2$)：上述の1次理論での採用項に加え、各層内での高次の成分を偶数次、奇数次各1項の計2項ずつ採用していくもので、 $6N + 12N(M-1)$ 個が全未知量数。

なお本理論は、Murakamiらの層状板の静的解析に関する幾つかの理論⁹⁾⁻¹¹⁾を、一般化した動的解析理論にもなっている。

5. 数値計算例

3章で定式化した一般化理論式に、4章に示した規則に従う項打ち切りを実施した各次数の理論式を用いて、厳密解の存在する層状複合構造の静的ならびに動的問題を解析し、各次数の理論の解析精度について検証する。

(1) 静的解析例

まず静的解析例として、図-2に示すような横等方性材料よりなる3層のクロスプライ直交異方性層状板に正弦分布荷重 $q = q_0 \sin(\pi x/L)$ が作用した問題¹⁷⁾を、本理論の1次理論から3次理論を用いて解析し、厳密解¹⁵⁾、古典理論による解¹⁶⁾および全層を通じて一体化した変位

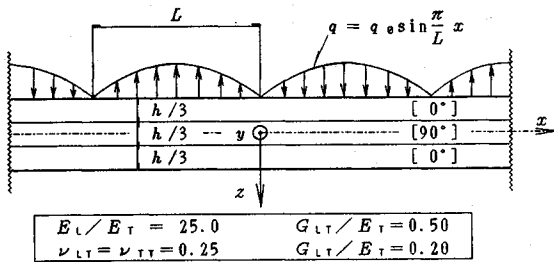


図-2 正弦波荷重を受ける無限長クロスプライ3層板

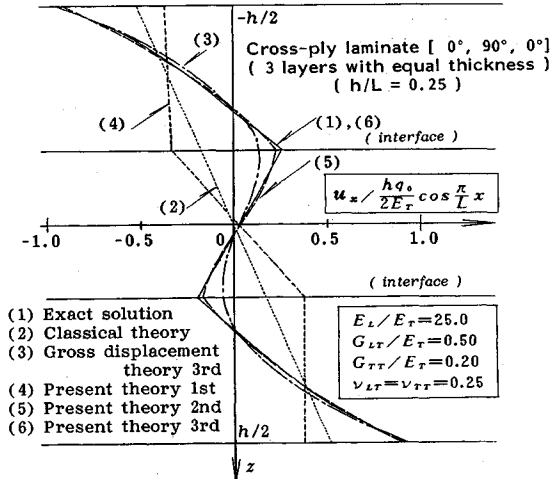


図-3 図-2の系における面内変位 (u_x) の厚さ方向分布

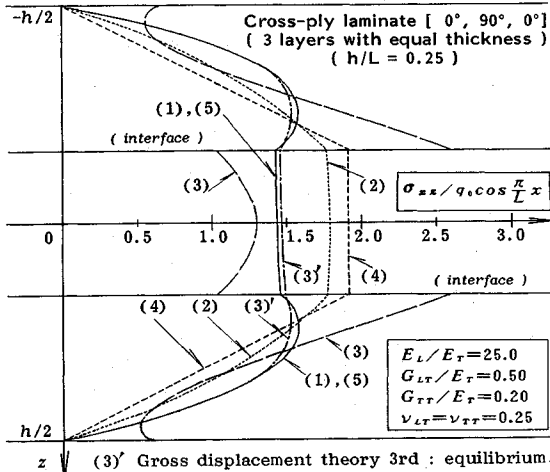


図-4 図-2の系における面外せん断応力 (σ_{zz}) の厚さ方向分布

仮定を設けた著者らの一般化高次理論⁴⁾(以下、一体化変位理論: Gross displacement theory と呼ぶ)の結果と比較したものを図-3と図-4に示す。これらは、問題の周期性の条件を考慮して、各理論次数ごとの変位係数ならびに応力係数をそれぞれ次のように仮定し、

$$\left. \begin{aligned} & \{u_x^{<k>}; u_{z(m)}^{[k]}; \sigma_{zz}^{<k>}; \sigma_{zz(m)}^{[k]}\} \\ & = \{U^{<k>}; U_{(m)}^{[k]}; X^{<k>}; X_{(m)}^{[k]}\} \cos(\pi x/L), \\ & \{u_x^{<k>}; u_{z(m)}^{[k]}; \sigma_{zz}^{<k>}; \sigma_{zz(m)}^{[k]}\} \\ & = \{W^{<k>}; W_{(m)}^{[k]}; Z^{<k>}; Z_{(m)}^{[k]}\} \sin(\pi x/L). \end{aligned} \right\} \dots\dots (28)$$

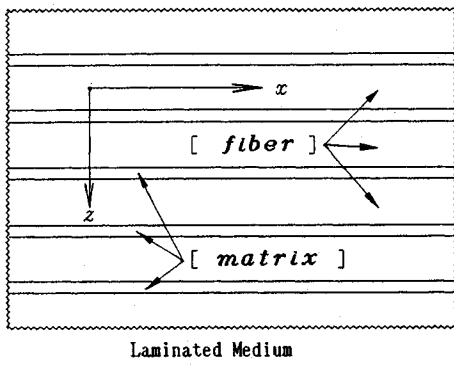
上式を支配式 (20), (21), (24), (25) 等に代入して得られる連立1次方程式を解いた解のうち、板厚 (h) と荷重周期幅 (L) の比が $h/L=0.25$ の場合の層状板各位置での変位ならびに応力成分の板厚方向分布を示したものである。

まず、図-3は面内変位 (u_x) の結果であるが、これに関して次のような性質が指摘できる。

- ① 厳密な変位はわずかに対称成分を含み、上下層と中間層とで変位の傾きが反転したジグザグな分布となるが、2次理論の結果はかなりこれに近似し、3次理論では厳密解の線と一致している。なお、このような解の収束傾向は面外変位 u_z ならびに曲げ応力 σ_{xx} についても同様であり、ともに3次理論で厳密解の線に一致している。
- ② 1次理論の結果は層ごとに独立した変位を仮定していることから、各層での変化の平均値を通るような折れ線となるが、高次理論に比べ精度はかなり劣っている。
- ③ 古典理論の結果は厳密な値の逆対称成分の全体的な平均値に相当する全層共通の直線変化を与えており、やはり精度的に不十分な値となっている。
- ④ 一体化変位理論の3次理論 (5次項まで採用) の結果は、滑らかな連続関数であるため上下層と中間層での折れ曲がり挙動が表現できず、接合面近傍での誤差が大きくなっている。

図-4は面外せん断応力 (σ_{zz}) の解析結果である。図中に示す古典理論の値および2種の一体化変位理論のうち (3)'の値は、つり合い法 (面内応力の結果に基づき、つり合い方程式を用いて面外応力成分を求める方法) により得たものである。これらより次の性質が指摘できる。

- ① 1次理論の結果は大きな誤差を伴うものとなるが、2次理論では飛躍的な精度改善がなされて、厳密解に収束している。なおこの傾向は面外直応力 σ_{zz} に関しても同様である。このように面外応力に関して良好な精度の解が得られることは、本高次理論の特徴の一つに挙げられよう。
- ② 古典理論の値は、つり合い法の結果2次曲線の連なりで与えられ、折れ線となる1次理論の結果よりも多少良好な解ではあるが、かなり大きな誤差を含んでおり、修正理論による解析が必要であることを示唆している。
- ③ 一体化変位理論のうち (3) の値は、通常の方法 (得られた変位に基づいて幾何-構成関係式から面外応力を求める方法) による解であり、層接合面での連続条件を満足せず、全般に精度の低いものとなっている。これに



[fiber] : G_f, ρ_f, ν_f	h_f
$\left(\begin{matrix} G_f/G_m=100, & \nu_f=0.30 \\ \rho_f/\rho_m=3.0, & \nu_m=0.35 \\ h_f/h_m=4.0 \end{matrix} \right)$	
[matrix] : G_m, ρ_m, ν_m	h_m

図-5 等方性2層の多重積層構造の形状と材料定数

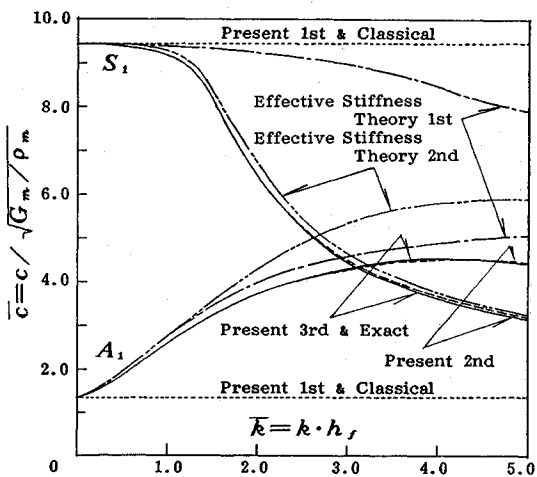


図-6 最低次の逆対称モード (A1) と対称モード (S1) の波動の分散曲線: 波数 (\bar{k}) に対する位相速度 (\bar{c})

対し、つり合い法により求めた (3)'の値は、著しく改善され精度が向上しているが、それでも明らかな誤差がある。

以上より、本理論の精度特性として、1次理論は古典理論とほぼ同程度であるが、2次理論では飛躍的な改善がなされ、3次理論で実質的に充分な精度が得られることから、精密化が可能なる理論であることが検証された。

(2) 動的解析例

動的解析の例として、図-5に示すような2種の等方性層: ファイバー層 (f層), マトリックス層 (m層) が交互に多重積層された無限積層体中を、層に平行な

(x-軸) 方向に伝播する平面調波 (波数 k , 位相速度 c) の分散関係の解析を行う。なお、ここでは従来の研究に比べかなり高次のモードまでの解析を、大きな波数の領域にわたって実施する。

各記号は G_i :せん断弾性係数, ν_i :ポアソン比, ρ_i :質量密度, h_i :層厚を表す。なお、添字 i は, $i=f, m$ で層の種別を表している。

まず現象の周期性を考慮して2層の単位構造を取り出し、次式のような連続条件:

$$\{u_x^{<0>}; u_z^{<0>}; \sigma_{xz}^{<0>}; \sigma_{zz}^{<0>}\} = \{u_x^{<2>}; u_z^{<2>}; \sigma_{xz}^{<2>}; \sigma_{zz}^{<2>}\} \dots (29)$$

を満足する解を次式 ($j=x, z$) のように仮定し、

$$\{u_j^{<k>}; u_{j(m)}^{<k>}; \sigma_{jz}^{<k>}; \sigma_{jz(m)}^{<k>}\} = \{U_j^{<k>}; U_{j(m)}^{<k>}; S_{jz}^{<k>}; S_{jz(m)}^{<k>}\} \exp(ik(x-ct)) \dots (30)$$

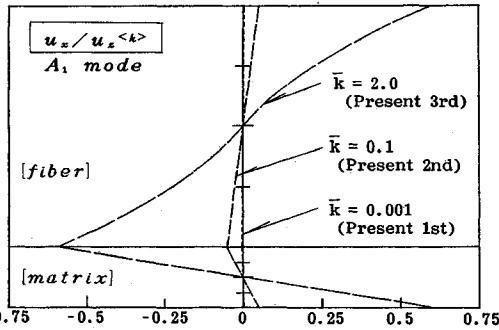
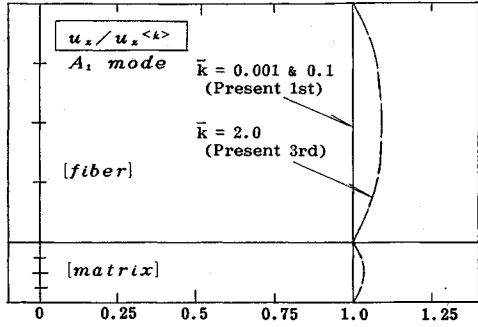
各支配式に代入して得られる分散方程式の固有値解析を行った。これらの結果の一部を図-6から図-9に示す。

はじめに、図-6は逆対称波動の1次モード (A1と略記) と対称波動の1次モード (S1と略記) の分散曲線を本理論の1次理論から3次理論を用いて解析した結果を厳密解¹⁸⁾ならびに古典解¹⁹⁾と比較すると同時に、他の解析理論の代表として Effective Stiffness Theory (E. S. T.と略称) を取り上げ、その1次理論²⁰⁾ならびに2次理論²¹⁾による解析結果との比較を試みたものである。図の横軸 \bar{k} は波動の波数 k を無次元化した波数パラメータ ($\bar{k}=k \cdot h_f$) であり、縦軸 \bar{c} は位相速度振動数 c を無次元化した位相速度パラメータ ($\bar{c}=c/\sqrt{G_m/\rho_m}$) を表している。

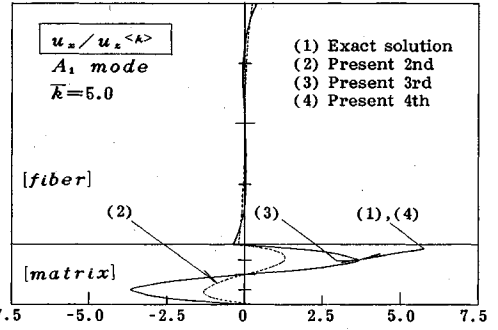
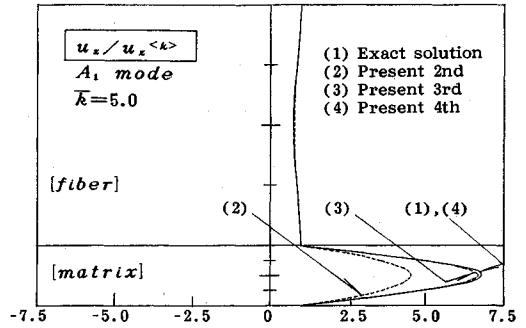
図より次のような性質が指摘できる。

- ① 本理論の1次理論ではA1, S1モードのみ解析可能であるが、これらの結果はともに古典理論の解と等しく、 $\bar{k} \rightarrow 0$ の極限での厳密な \bar{c} の値に一致する一定値を与える。
- ② 2次理論の値は著しく精度が向上し、A1, S1ともにほぼ厳密解に近い値を与え、3次理論で厳密解の線に一致している。
- ③ E. S. T. の1次理論の解は、A1では良好でかなり厳密解に近い値を与えるが、S1に関しては古典理論の改良程度の解となっている。
- ④ E. S. T. の2次理論では、S1はやはり改善され高精度な解となるが、本理論の2次理論よりも劣り、 $\bar{k} \rightarrow 0$ ではむしろ古典理論の解に漸近している。さらにA1に関しては1次理論より逆に大きな誤差をともなった解を与えている。

次に図-7は逆対称の1次の波動 (A1) の面外変位 u_z , 面内変位 u_x の層厚モードを $\bar{k}=0.001, 0.1, 2.0$ の3ケースについて解析し、厳密解に収束した理論次数とその解を示したものである。なお、これらの値は層接面



図一七 厳密な A1 モードの面外変位 (u_z)・面内変位 (u_x) と本理論の収束解の次数 ($\bar{k}=0.001, 0.1, 2.0$)



図一八 本理論の各次数の理論による A1 モードの面外変位 (u_z)・面内変位 (u_x) の層厚モード ($\bar{k}=5.0$)

における面外変位の値を単位量 ($u_z^{<k>}=1$) とする基準化を実施した場合の値である。そのため各物理量の層厚モードが相似であっても、相対的サイズの比が一致していない場合は同一の線とはならず、通常行われるような各物理量ごとにそれらの最大値で基準化する場合に比べ、厳しい精度判定基準が適用されていると言える。

これらの図より次のような性質が指摘できる。

① 波数の増大と共に各層厚モードは大きな値を示すようになり、それらの厚さ方向の分布形も非直線性が増し複雑になっていく。このため、 $\bar{k}=0.001$ ($\neq 0$) の場合は、古典的理論と同一の解を与える 1 次理論でも厳密解の線に一致したモードが得られるが、波数の増大と共に高次理論の適用が必要となる。

② 概ね $\bar{k}=0.1$ では 2 次理論、 $\bar{k}=2.0$ では 3 次理論で厳密解に収束する。

次に、図一八は同じく逆対称 1 次の波動 (A1) の $\bar{k}=5.0$ における面外および面内変位の各次数の理論による解析結果を示している。これらからは次の性質が指摘できる。

① ここに示したように大きな波数になると 3 次理論でも誤差を生じるが、4 次理論では厳密解に収束している。

② これらの層厚モードは図一七に示した $\bar{k}=0.001 \sim 2.0$ における A1 の層厚モードとは性状が異なり、逆対称の 2 次モード (A2) の層厚モードと類似した形となっている。これは後述する格子状のモード変化の一端を表

わしている。

③ この波形の性状は、それ以降 $\bar{k}=10.0$ に至ってもそれほど変化しないが、波数が増大するに従い m 層の相対的変位が増大し、 f 層が相対的にほとんど変位しなくなる。したがって前述のような基準化の結果として、近似解の誤差も m 層内で大きくなっているが、この場合でも 4 次理論で厳密な層厚モードに収束している。ただし、これらも各変位の最大値で基準化すれば、2 次理論の解もほぼ厳密解と同じ線で表されるようになることを付記しておく。

最後に、図一九は逆対称モードを例にとり、その 1 次 (A1) から 6 次 (A6) までの波動 (第 i 番目の固有値に対応する波動をそれぞれ A_i と略記する) について、本理論の 1 次、3 次および 5 次の各次数の理論式を用いて解析した結果を厳密解と比較したものである。ここでは $\bar{k}=0 \sim 10$ という極めて広い範囲にわたった解析を実施しているが、この図より次の性質が指摘できる。

① 1 次理論 (A1 のみ解析可能) は、古典的な Effective Modulus Theory¹⁹⁾ の結果と同じく、A1 の $\bar{k}=0$ での極限の値に一致する一定値を与える。

② 3 次理論は、A1, A2, A3 の 3 つのモードに関し、図示の全域にわたって厳密解に一致した分散曲線を与える。

③ さらに高次のモードに対する 3 次理論の結果は、 $\bar{k} \approx 6$ 付近まで A4 の値を与え、それ以降 A5 の値を与え

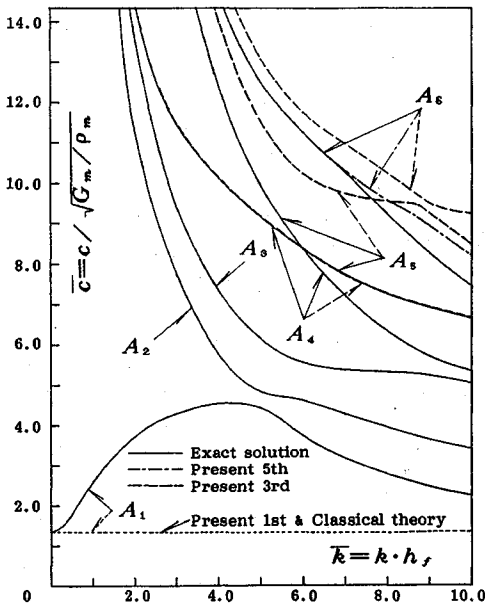


図-9 本理論の1次, 3次, 5次理論で解析した逆対称モードの波動(1次: A1~6次: A6)に関する分散関係

る曲線がほぼ厳密解に一致したものとなることから、A4モードの $\bar{k} \approx 6$ まで良好な精度の解となっているが、A5, A6についてはかなり誤差を含んでいる。

④ 5次理論はA6モードの $\bar{k} \approx 7$ 以降を除き、領域内の各モードについて厳密解に一致した分散曲線を与えている。

⑤ なおここでは省略したが、2次理論は3次理論の結果に近く、A1からA3まで概ね良好な精度の解を与える。また、4次理論は5次理論の結果に近く、A6モードの値が $\bar{k} \approx 5$ 以降過大となる以外はほぼ厳密解に一致した値を与える。さらに、対称モード(Si)に関しての6次まで解析した結果は、逆対称モードより多少誤差は大きくなるものの、やはりこれらと同様の傾向を示し、5次理論ではほぼ厳密な分散曲線が得られている。

以上の分散曲線および各層厚モードに関する検討の結果、次のようなことが明らかとなった。本積層体の各次数の分散曲線は、上下に隣接する次数の曲線と交差しそうになると、互いに他の曲線の傾きに沿う方向に背反し折れ曲がる現象を繰り返す。その結果、それらが交差する位置で順次高次あるいは順次低次の分散曲線を連ねた崩絡線は格子状をなし、この崩絡線上に乗る各分散曲線の波動は、異なった次数の波動でもそれらの層厚モードが類似の形を示す。また、本理論は同じ崩絡線の上に乗る分散曲線の波動に対しては、異なった次数の波動においても同程度の精度の解を与える理論である。

以上を総括して、本理論は理論の高次化に伴う従属変数はかなり増えるものの、それに応じた解析精度の向上

がみられ、従来の層状性複合構造の動的理論では扱えなかった、高次モードについても、かなりの高周波領域まで含め解析可能な理論であることが検証できた。

6. あとがき

本論文においてはHamilton原理¹²⁾あるいはHellinger-Reissnerの原理¹²⁾を書き換えることにより、Reissnerの新しい変分原理¹³⁾の動的原理への拡張に当たる混合型変分原理を誘導した。またこの変分原理に基づき、各層の変位と面外応力成分の層厚方向分布を仮定する任意の層状性複合構造の静的・動的解析理論を、一般化高次近似理論として構築した。さらに静的・動的解析例を提示して、本混合仮定型理論の精度特性を詳細に検証した。

得られた成果ならびに確認された事項を以下に挙げる。

① 本論文での定式化に用いた変分原理は、ひずみエネルギー関数と補足ひずみエネルギー関数の融合型のポテンシャルに基づく混合型の変分原理であり、前者に基づくHamilton原理と後者に基づくHellinger-Reissner原理の中間に位置するものである。

② 本理論ならびに他の幾つかの平板理論⁹⁾⁻¹¹⁾で見受けられるような、変位と面外応力成分を独立未知量とする考え方は、各種の境界条件の問題に対応でき、層状板のように連続条件を満足させたい場合にも支障がなく、混合仮定であるための従属変数の増加もある程度抑えられる点などを考慮すると、理論の構築に適している。

③ 本理論の解析精度特性についてみると、表面ならびに層接合面での値のみを従属変数とする1次理論は古典理論^{16), 19)}と大差ない解しか与えないものであるが、これに層内部の変化を順次考慮していく高次理論の精度は良好で、通常の高次理論の適用を必要とする問題に対しては2次理論でかなり満足のいく結果を与え、3次理論では厳密解^{15), 18)}にほぼ一致した値を与える。

④ 静的問題においては、上下表面の境界条件ならびに層接合面での連続条件を完全に満たす形で、層ごとの物理量を求める理論であるために、全層にわたり一体化した変位仮定に基づく理論^{3), 4)}に比べ、層ごとに分布形が折れ曲がる挙動を容易に解析でき、特にそれらの一体化理論では精密な解析が不可能であった多層板の解析等において有効性を発揮する理論となっている。

⑤ 動的解析における特性としては、Effective Stiffness Theory^{20), 21)}等に比べ、理論次数の増大とともに未知量はかなり増大するものの、高次のモードに関しても、それらとは比較にならないほど広範囲な領域にわたって固有値ならびにモードの精密な解析が可能な理論となっている。

参 考 文 献

- 1) 福田博・邊吾一：複合材料の力学序説，古今書院，pp.1～8, 1988.
- 2) 根岸嘉和・平島健一：層状性複合構造の解析における各種の変位仮定型修正理論の位置づけ，山梨大学工学部研究報告，No.38, pp.85～100, 1987. 以下同じく No.39, pp.134～149, 1988, No.41, pp.161～179, 1990.
- 3) Lo, K.H., Christensen, R.M. and Wu, E.M. : Stress solution determination for high order plate theory, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.14, pp.655～662, 1978.
- 4) 平島健一・根岸嘉和：数種の平板理論の動特性（自由振動と分散特性）に関する研究，土木学会報告論文集，No.333, pp.21～34, 1983.
- 5) Seide, P. : An improved approximate theory for the bending of laminated plates, *Mechanics Today*, Vol.5, pp.451～466, 1979.
- 6) Reissner, E. : Finite deflections of sandwich plates, *J. Aeronautical Sci.*, pp.435～440, 1948.
- 7) Badaliane, R., Sih, G.C. and Chen, E.P. : Through cracks in multilayered plates, *Mechanics of Fracture 3—Plates and Shells with Cracks*, Noordhoff, pp.85～115, 1977.
- 8) Dong, S.B. and Nelson, R.B. : On natural vibrations and waves in laminated orthotropic plates. *J. Appl. Mech.*, Vol.39, pp.739～745, 1972.
- 9) Murakami, H. : Laminated composite plate theory with improved in-plane responses, *J. Appl. Mech.*, Vol.53, pp.661～666, 1986.
- 10) Toledano, A. and Murakami, H. : A composite plate theory for arbitrary laminated configurations, *J. Appl. Mech.*, Vol.54, pp.181～189, 1987.
- 11) Toledano, A. and Murakami, H. : A high-order laminated plate theory with improved in-plane responses, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.23, pp.111～131, 1987.
- 12) Washizu, K. : *Variational Methods in Elasticity&Plasticity—Third edition*, Pergamon Press, pp.446～455, 1982.
- 13) Reissner, E. : On a certain mixed variational theorem and proposed application, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.20, pp.1366～1368, 1984.
- 14) 平島健一・根岸嘉和：応力および変位仮定に基づく平板の一般化高次理論の定式化，土木学会論文集，No.350/I-2, pp.351～354, 1984.
- 15) Pagano, N.J. : Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending, *J. Comp. Mat.*, Vol.3, pp.398～411, 1969.
- 16) Reissner, E. and Stavsky, Y. : Bending and stretching of certain types of heterogeneous anisotropic elastic plates, *J. Appl. Mech.*, Vol.28, pp.402～408, 1961.
- 17) 平島健一・根岸嘉和：板厚方向にフーリエ級数展開した高次平板理論，土木学会論文報告集，No.341, pp.163～172, 1984.
- 18) Sun, C.T., Achenbach, J.D. and Herrmann, G. : Time-harmonic waves in a stratified medium propagating in the direction of the layering, *J. Appl. Mech.*, Vol.35, pp.408～411, 1968.
- 19) Postoma, G.W. : Wave propagation in a stratified medium, *Geophysics*, Vol.20, pp.780～806, 1955.
- 20) Sun, C.T., Achenbach, J.D. and Herrmann, G. : Continuum theory for a laminated medium, *J. Appl. Mech.*, Vol.35, pp.467～475, 1968.
- 21) Drumheller, D.S. and Bedford, A. : On a continuum theory for a laminated medium, *J. Appl. Mech.*, Vol.40, pp.527～532, 1973.

(1991. 11. 25 受付)

GENERAL HIGHER-ORDER THEORY OF LAMINATED COMPOSITE STRUCTURES ASSUMING DISPLACEMENTS AND OUT-OF-PLANE STRESSES

Yoshikazu NEGISHI and Ken-ichi HIRASHIMA

General higher-order approximation theory to analyze static and/or dynamic behaviors of laminated composite structures is established. Theoretical and accurate characteristics of the theory are made clear by numerical examples. The theory is established by using a mixed type variational principle after expanding displacements and out-of-plane stresses of each layers using infinite series of the thickness coordinate. It is shown that the present theory satisfies boundary and continuity conditions on the surfaces or interfaces, and improves the defects of the previous theories.