

応力境界と変位境界を2ヶ所ずつ有する 平面弾性混合境界値問題の解法

長谷部宣男*・上田 稔**・児島清隆***
中村卓次****

応力境界と変位境界が2ヶ所ずつ存在する平面弾性混合境界値問題の解法を、複素応力関数と分数式の和の形の写像関数を用いて示す。この解法は写像関数の表す形状に対し厳密解を閉じた形で与え、線形破壊力学におけるクラックやはく離の問題解析にも適用可能である。解析例として2ヶ所の対称なはく離のあるく形剛体介在物を有する無限板の応力解析を一樣引張荷重や一樣圧縮荷重のもとで行い、応力分布やはく離先端のはく離の応力の強さを求めてその破壊メカニズムについて考察する。

Keywords : mixed boundary value problem, plane elasticity, mapping function, complex stress function, rhombic rigid inclusion, debonding

1. ま え が き

数理弾性平面問題は、その境界条件の与え方により、応力境界値問題、変位境界値問題、単純支持型境界値問題さらに以上の各種境界が存在する混合境界値問題に大別される。これら各種境界値問題の簡単な問題については、Kolosoov, Muskhelishvili らにより導入された複素関数を用いる方法により¹⁾、いく人かの著者によってまとめられている²⁾⁻⁴⁾。Muskhelishvili は解析に写像関数を用いて、写像関数が有理型であれば積分方程式を解くことなく閉じた解が得られることを示した。即ち有理写像関数の表す形状に対し厳密解が得られる。著者らは、比較的任意の形状に対して精度のよい形状を与える分数式の和の形の写像関数を用い、いろいろの形状の問題の解を求めている⁵⁾⁻⁷⁾。混合境界値問題の解析は単一の境界値問題に比べ数学的にかなりむずかしくなるが、応力境界と変位境界が1ヶ所ずつ存在する混合境界値問題の解析も行い、破壊力学への問題に応用している⁸⁾⁻¹⁰⁾。

本研究は上記研究をさらに発展させ応力境界と変位境界が2ヶ所ずつ存在する平面弾性混合境界値問題に分数式の和の形の写像関数を適用し、その一般解を示すものである。すでになされている応力境界と変位境界が2ヶ所ずつ存在する平面弾性問題の解析としては、2ヶ所の界面はく離が存在する円形剛体¹¹⁾、楕円形剛体^{12), 13)}の問題と2ヶ所のはく離が存在する円形弾性体の解析¹⁴⁾が見当る程度で任意の形状に対する解析はなされていないようである。これらの解析においては複素応力関数が用いられ、楕円形剛体の解析には写像関数が用いられてい

るが、形状は幾何学的な特異性をもたない円弧状のものに限られている。本報告における解析法はこれら円形、楕円形に対する解を包括するだけでなく、比較的任意形状の解析を可能とする。さらに①混合境界の接点、即ち応力境界と変位境界の接点である特異点と②隅角点やクラックなど幾何形状による特異点が混在する問題に対し解を得ることができる。上記①の特異点が互いに、または②の特異点が互いに、そして①と②の特異点が互いに近くに存在したり、特別の場合として隅角点が境界条件の接点である場合のように、①と②の特異点が一致する複雑な応力場に対する解析も容易に行うことができる。

解析例として2ヶ所のはく離を有するく形剛体介在物の解析を行なう。応力分布の他はく離先端ではく離の応力の強さを求めはく離の進展等について考察する。材料の強度において母材と介在物の界面はく離の問題は重要であり、その破壊メカニズムの解明が材料の強度・変形特性の把握をより明確にするものと期待される。実際の介在物には角を有する形状のものも多く存在し、その隅角点近傍における引張応力の集中により、優先的に角のある界面からはく離が発生する例が多いと考えられる。1ヶ所のはく離を有する長方形剛体介在物の解析が複合材料の強度解析の必要性からもなされているが¹⁵⁾、まだく形状の介在物の解析は多くはないようである。特に2ヶ所はく離の解析は著者らの知る限り見当たらない。

2. 解 法

(1) 一般解

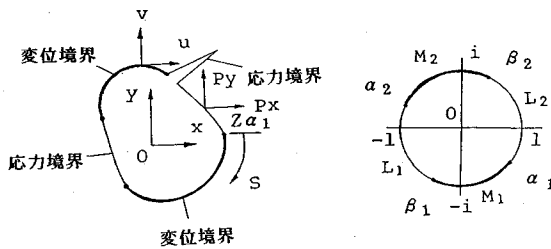
図-1に示すように、解析領域(z -平面)を単位円外(ζ -平面)に写像する有理写像関数が、一般に分数式の和の次式の形で表わされる⁶⁾。

* 正会員 工博 名古屋工業大学教授 工学部 社会開発工学科 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)

** 正会員 工修 中部電力(株)電力技術研究所

*** 正会員 工修 石川島播磨重工業(株)

**** 正会員 工修 名古屋工業大学助教授 工学部 社会開発工学科



図一 解析領域 (Z-平面) と単位円 (zeta-平面)

$$h(\sigma) = \begin{cases} i \int (P_x + iP_y) ds & L_1, L_2 \text{ 上} \\ \frac{2G}{\kappa}(u + iv) & M_1, M_2 \text{ 上} \end{cases}$$

$\chi(\zeta)$ はブレメリ関数で $\chi(\zeta) = (\zeta - \alpha_1)^m (\zeta - \beta_1)^{1-m} (\zeta - \alpha_2)^m (\zeta - \beta_2)^{1-m}$ で、ここに $m = 0.5 - i \ln(\kappa) / 2\pi$, $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ は単位円上の L_1, M_1, L_2, M_2 境界の接続点の座標を表わす (図一)。ブレメリ関数の指数は、接続点で応力が不連続、変位が連続となるように決められる。

$\chi(\zeta)$ の分岐は、 $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} [\chi(\zeta) / \zeta^2] = 1$ となるようにとられる。 $G(\zeta)$ は任意の有理関数で $\phi(\zeta)$ が単位円外で正則となるように決定される。

以下では上記の一般解に対し応力自由境界が2ヶ所、剛境界が2ヶ所で、一樣引張荷重を受ける問題を例にして解を誘導する。応力境界で外力が零、変位境界で変位が零として与えられる。

(2) 任意方向一樣引張荷重に対する解

境界条件は、境界 s に沿う外力の積分の始点を単位円上の α_1 に対応する点 Z_{α_1} とし、解析領域を左側みる方向に積分すると (図一)、

$$\left. \begin{aligned} i \int (P_x + iP_y) ds &= C_1 && L_1 \text{ 上} \\ i \int (P_x + iP_y) ds &= 0 && L_2 \text{ 上} \\ \frac{2G}{\kappa}(u + iv) &= 0 && M_1, M_2 \text{ 上} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

となる。ここで C_1 は境界 M_1 上の合力 ($iX - Y$) (X, Y はそれぞれ x, y 方向合力を表わす) を意味する。求めたい複素応力関数 $\phi(\zeta), \psi(\zeta)$ を、 x 軸に対し角度 α 方向の一樣引張を表す複素応力関数

$$\phi_1(\zeta) = \frac{P}{4}\omega(\zeta), \phi_2(\zeta) = -\frac{P}{2}e^{-2\alpha i}\omega(\zeta) \dots \dots \dots (9)$$

と、これらに対し境界条件を満足するように複素応力関数 $\phi_2(\zeta), \psi_2(\zeta)$ の和、即ち

$$\phi(\zeta) = \phi_1(\zeta) + \phi_2(\zeta) \dots \dots \dots (10)$$

$$\psi(\zeta) = \psi_1(\zeta) + \psi_2(\zeta) \dots \dots \dots (11)$$

として表わす。

一般解の式 (5), (6) に式 (10), (11) を代入するとそれぞれ

$$\phi_2^+(\sigma) - \phi_2^-(\sigma) = C_1 \quad L_1 \text{ 上} \dots \dots \dots (12)$$

$$\phi_2^+(\sigma) - \phi_2^-(\sigma) = 0 \quad L_2 \text{ 上} \dots \dots \dots (13)$$

$$\kappa \phi_2^+(\sigma) + \phi_2^-(\sigma) = -(\kappa + 1) \frac{P}{4} \omega(\sigma) \quad M_1, M_2 \text{ 上} \dots \dots \dots (14)$$

となる。式 (12), (13), (14) の解は、

$$\phi_2(\zeta) = \frac{\chi(\zeta)}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{C_1}{\chi(\sigma)(\sigma - \zeta)} d\sigma$$

$$Z = \omega(\zeta) = E_0 \zeta + \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} + E_{-1} \dots \dots \dots (1)$$

ここに $E_0, E_k, E_{-1}, \zeta_k$ は定数で、 ζ_k は単位円内の点である。この写像関数は隅角点やクラックを有する形状に対しても精度のよい形状を与え、応力拡大係数の解析にも適用できる⁵⁾⁻⁹⁾。

いま、境界条件が外力で与えられる境界を L_1, L_2 , 変位で与えられる境界を M_1, M_2 とする。単位円外で正則な求めたい複素応力関数を $\phi(\zeta), \psi(\zeta)$ とすると、単位円上の $\zeta = \sigma$ で応力境界条件式は、

$$\phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\phi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = i \int (P_x + iP_y) ds \dots \dots \dots (2)$$

と表わされる¹⁾。ここに $\overline{}$ は復素共役を、 P_x, P_y は境界上のそれぞれ x, y 方向の外力を、 s に関する積分は境界線に沿う積分を表わす (図一)。

変位境界条件式は、

$$\kappa \phi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\phi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} = 2G(u + iv) \dots \dots \dots (3)$$

と表わされる¹⁾。ここに κ はポアソン比 ν の関数で、 $\kappa = 3 - 4\nu$ (平面ひずみ状態)、 $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ (一般化された平面応力状態)、 G はせん断弾性係数、 u, v はそれぞれ x, y 方向の変位である。

外力の作用していない境界が存在すると、解析接続の原理より $\phi(\zeta)$ は、

$$\phi(\zeta) = -\overline{\phi(1/\bar{\zeta})} - \frac{\omega(1/\bar{\zeta})}{\omega'(\bar{\zeta})} \overline{\phi'(\zeta)} \dots \dots \dots (4)$$

と得られる。式 (4) を用いると、式 (2), (3) はそれぞれ次式のように得られる。

$$\phi^+(\sigma) - \phi^-(\sigma) = i \int (P_x + iP_y) ds \dots \dots \dots (5)$$

$$\kappa \phi^+(\sigma) + \phi^-(\sigma) = 2G(u + iv) \dots \dots \dots (6)$$

式 (5), (6) はリーマン-ヒルベルト問題であり、その解は次式で与えられる¹⁾。

$$\phi(\zeta) = \frac{\chi(\zeta)}{2\pi i} \int_{L+M} \frac{h(\sigma)}{\chi(\sigma)(\sigma - \zeta)} d\sigma + \chi(\zeta) G(\zeta) \dots \dots \dots (7)$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 & + \chi(\zeta) \int_{M_1+M_2} \frac{-\kappa+1}{2\pi i} \frac{P}{\chi(\sigma)(\sigma-\zeta)} \omega(\sigma) d\sigma + \chi(\zeta) G(\zeta) \\
 & = \frac{C_1}{2\pi i} F(\zeta) - \frac{P}{4} \omega(\zeta) \\
 & + \chi(\zeta) \frac{P}{4} \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k-\zeta)} + \chi(\zeta) G(\zeta) \dots\dots\dots(15)
 \end{aligned}$$

となる。上式右辺の2番目の積分は、 M_1, M_2 を周る周回積分に変形し、留数定理を用いて行われる。また1番目の積分項を、

$$F(\zeta) = \chi(\zeta) \int_{L_1} \frac{d\sigma}{\chi(\sigma)(\sigma-\zeta)} \dots\dots\dots(16)$$

と表している。以下式(15)の $G(\zeta)$ を複素応力関数 $\phi_2(\zeta)$ が単位円外で正則となるように決定する。式(4)に式(10)、(11)を代入すると、

$$\begin{aligned}
 \phi_2(\zeta) & = -\overline{\phi_2(1/\bar{\zeta})} - \frac{\omega(1/\bar{\zeta})}{\omega'(\zeta)} \phi_2'(\zeta) \\
 & - \frac{P}{2} \overline{\omega(1/\bar{\zeta})} + \frac{P}{2} e^{-2\alpha i} \omega(\zeta) \dots\dots\dots(17)
 \end{aligned}$$

式(17)の右辺第2項を、単位円外の点 $\zeta_k \equiv 1/\bar{\zeta}_k$ で正則な項と不正則な項に分けて書くと

$$\begin{aligned}
 \frac{\omega(1/\bar{\zeta})}{\omega'(\zeta)} \phi_2'(\zeta) & = - \sum_{k=1}^n \frac{A_k \bar{B}_k \zeta_k^2}{\zeta_k - \zeta} \\
 & + (\zeta = \zeta_k \text{で正則な項}) \dots\dots\dots(18)
 \end{aligned}$$

ここに、 $A_k = \phi_2'(\zeta_k)$ 、 $B_k = E_k/\omega'(\zeta_k)$ と表している。

式(17)に式(15)、(18)、(1)を代入し、 $\phi_2(\zeta)$ が $\zeta = \zeta_k$ 及び $\zeta = \infty$ で不正則となる項のみ取り出すと($\phi(\zeta)$ の $\zeta = \infty$ でのふるまいは $\phi_1(\zeta)$ が表わす)、次式のように表わされる。

$$\begin{aligned}
 & - \overline{\chi(1/\bar{\zeta})} G(1/\bar{\zeta}) + \frac{P}{4} \sum_{k=1}^n \frac{\bar{E}_k \zeta_k^2}{\zeta_k - \zeta} \\
 & + \frac{P}{4} \sum_{k=1}^n \frac{\chi(1/\bar{\zeta}) \bar{E}_k \zeta_k^2}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k - \zeta)} + \sum_{k=1}^n \frac{A_k \bar{B}_k \zeta_k^2}{\zeta_k - \zeta} + \frac{P}{2} e^{-2\alpha i} E_0 \zeta \\
 & \dots\dots\dots(19)
 \end{aligned}$$

式(19)において、

$$\overline{G(1/\bar{\zeta})} = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{q}_k \zeta_k \zeta}{\zeta_k - \zeta} + \bar{q}_0 \zeta$$

とおき、 $\zeta = \zeta_k$ と $\zeta = \infty$ で不正則な項が打ち消されるように q_k と q_0 を決定すると、

$$G(\zeta) = - \sum_{k=1}^n \frac{\bar{A}_k B_k + \frac{P}{2} E_k}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k - \zeta)} + \frac{P e^{2\alpha i} \bar{E}_0}{2\chi(0)\zeta} \dots\dots\dots(20)$$

と求まる。

式(20)を式(15)に代入すると、

$$\begin{aligned}
 \phi_2(\zeta) & = \frac{C_1}{2\pi i} F(\zeta) - \frac{P}{4} \omega(\zeta) \\
 & + \chi(\zeta) \left[\frac{P e^{2\alpha i} \bar{E}_0}{2\chi(0)\zeta} - \sum_{k=1}^n \frac{\bar{A}_k B_k + P E_k/4}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k - \zeta)} \right] \dots\dots\dots(21)
 \end{aligned}$$

となる。

次に式(21)の未定数 C_1 を決定する。式(21)において $F(\zeta)$ 即ち式(16)の積分は困難であるが、その一階微分 $F'(\zeta)$ を ζ に関する積分を含まない形で求めることができる。この誘導については付録Iに記す。そこで式(21)を一階微分し、 $\zeta = \infty$ での $\phi'(\zeta)$ のふるまいは $\phi_1'(\zeta)$ が表わすことから $\phi_2'(\zeta) = 0$ となる条件より未定数 C_1 を決定する。このことは $\phi_2'(\zeta)$ により $\zeta = \infty$ で応力成分を生じないことを意味する。式(21)の両辺を微分し $\zeta = \infty$ の極限操作を行うと、

$$\begin{aligned}
 \frac{C_1 I(0)}{\pi \chi(1)} - \frac{P}{4} E_0 + \frac{P e^{2\alpha i} \bar{E}_0}{2\chi(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{\bar{A}_k B_k + P E_k/4}{\chi(\zeta_k)} = 0 \\
 \dots\dots\dots(22)
 \end{aligned}$$

となる。上式より C_1 を求めることができる。式(22)の $I(0)$ についても付録Iに記す。

よって式(21)において両辺を微分して $\zeta = \zeta_k (k=1 \sim n)$ を代入し、 $\phi_2'(\zeta_k) = A_k$ を用いて得られる A_k と \bar{A}_k の実部、虚部に関する $2n$ 個の連立方程式を解くことにより A_k が決定される。

以上より式(21)の一階微分 $\phi_2'(\zeta)$ が、よって式(10)より $\phi'(\zeta)$ が求まる。

(3) 一様せん断荷重に対する解

任意方向一様引張荷重の場合と同様の手順で解く導くことができる。ここでは結果のみ記す。

求めたい複素応力関数 $\phi(\zeta)$ 、 $\phi(\zeta)$ を、式(10)、(11)の形で表わす。ただし $\phi_1(\zeta)$ 、 $\phi_1(\zeta)$ は一様せん断応力場を表わす複素応力関数で、

$$\phi_1(\zeta) = 0, \phi_1(\zeta) = -P i \omega(\zeta) \dots\dots\dots(23)$$

である。境界条件を満足するように複素応力関数 $\phi_2(\zeta)$ 、及び C_1 が次のように決められる。

$$\begin{aligned}
 \phi_2(\zeta) & = \frac{C_1}{2\pi i} F(\zeta) + \chi(\zeta) \left[- \frac{P i \bar{E}_0}{\chi(0)\zeta} - \sum_{k=1}^n \frac{\bar{A}_k B_k}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k - \zeta)} \right] \\
 & \dots\dots\dots(24)
 \end{aligned}$$

$$\frac{C_1 I(0)}{\pi \chi(1)} - \frac{P i \bar{E}_0}{\chi(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{\bar{A}_k B_k}{\chi(\zeta_k)} = 0 \dots\dots\dots(25)$$

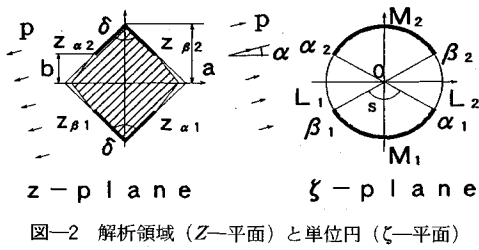
$\phi(\zeta)$ は式(4)で与えられる。

3. 解析例

(1) 解析モデルと写像関数

解析例としてく形剛体介在物に2ヶ所の対称なはく離が発生した状態の応力解析を行う。介在物を剛体することについては、介在物が母材より十分硬いときの近似を与えること、また介在物が母材に比べ硬く介在物と母材の接着性が弱い場合、母材と介在物の連成挙動が小さい低荷重段階ではく離進展が生じるため、比較的良好近似を与えると考えられる。

はく離の生じたく形剛体介在物周辺の弾性領域を単位円外に写像する等角写像関数は、Schwarz-Christoffelの変換公式を用いて無理関数の形で得られ、それを用い



て式 (1) で表わされる分数式の和の形の写像関数を作成する¹⁶⁾。境界条件は、弾性体とく形の剛体が接合している境界を変位のない境界 (M_1, M_2)、はく離が生じ弾性体とく形の剛体が離れている境界を応力自由境界 (L_1, L_2) とする。応力自由境界と剛境界の接点を表すパラメーター $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ を変えることにより、はく離の大きさを変えることができる。写像関数に含まれるパラメーターを変えることによりく形剛体介在物の隅角部角度を変えることができる。荷重条件は x 軸方向一様引張の場合 (図-2 の $\alpha=0^\circ, P>0$) と y 軸方向一様圧縮の場合 ($\alpha=90^\circ, P<0$) に対して解析を行う。

(2) 応力分布

写像関数式 (1) が表す曲線座標に関する応力成分は次式で求められる。

$$\sigma_\theta + \sigma_r = 4Re[\phi'(\zeta)/\omega'(\zeta)]$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = \frac{2\zeta^2}{|\zeta|^2\omega'(\zeta)} \times \left[\overline{\omega(\zeta)} \left\{ \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right\}' + \phi'(\zeta) \right]$$

ここに $Re[\]$ は、 $[\]$ の実部を表す。

正方形剛体介在物 (図-2 の $\delta=90^\circ$) に対して $\kappa=2$ (平面ひずみの場合はポアソン比 $\nu=0.25$, 一般化された平面応力状態の場合は $\nu=1/3$) で荷重条件が x 軸方向一様引張の場合と y 軸方向一様圧縮の場合に対し、それぞれはく離発生前 ($b/a=0$, 図-3, 4) とはく離発生後 ($b/a=0.5$, 図-5, 6) の応力分布を示す。図中の σ_r, σ_θ は境界での法線および接線方向の応力を、 $\tau_{r\theta}$ は接線方向のせん断応力を表す。 σ_x, σ_y はそれぞれ x, y 方向の応力を表す。応力の大きさは境界上、 x 軸上、 y 軸上で法線方向の長さで示されている。応力の符号はせん断応力を除いて圧縮が負、引張が正である。せん断応力は、反時計方向に回転させようとする応力が正である。なおはく離が生じていない剛境界上の σ_r と σ_θ には $\sigma_\theta/\sigma_r = (3-\kappa)/(1+\kappa)$ の関係がある³⁾。図-3 よりはく離発生前の、引張荷重の場合は荷重方向に面する隅角部 (S 点) 近傍に急激な引張応力の集中が、図-4 の圧縮荷重の場合には荷重方向と直交する隅角部 (S 点) 近傍に引張応力の集中がみられ、界面のはく離が発生しやすいことがわかる。図-5, 6 よりはく離発生後は、はく離先端で急激な応力集中がみられる。

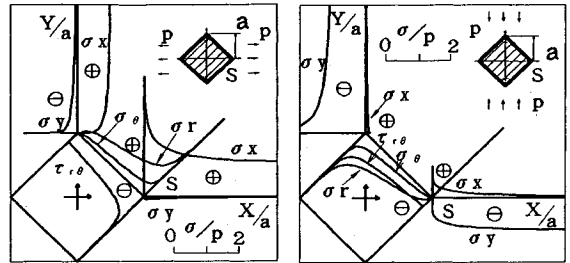


図-3 はく離発生前 ($b/a=0.0$) の応力分布 (x 軸方向一様引張)

図-4 はく離発生前 ($b/a=0.0$) の応力分布 (y 軸方向一様圧縮)

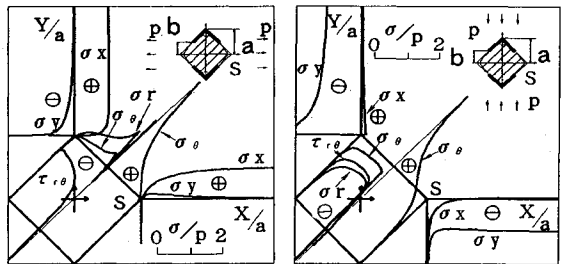


図-5 はく離発生後 ($b/a=0.5$) の応力分布 (x 軸方向一様引張)

図-6 はく離発生後 ($b/a=0.5$) の応力分布 (y 軸方向一様圧縮)

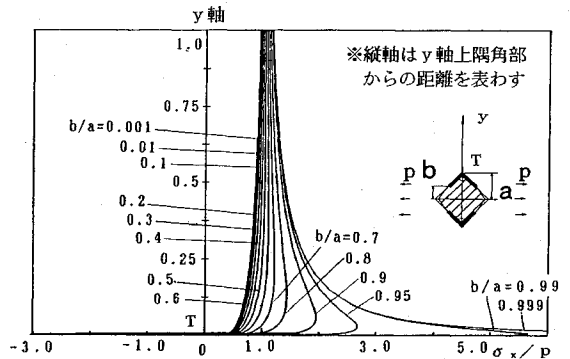


図-7 y 軸上の x 方向の応力分布 σ_x/p (σ_x ははく離域の大きさ b/a による変化)

図-7 に x 軸方向一様引張荷重の場合に対して、はく離域の大きさ b/a ごとに y 軸上の x 方向の応力分布 σ_x を示す。隅角部 (T 点) 近傍には負の応力集中がみられる。また、はく離が進展するにつれて隅角部近傍に正の応力集中が発生している。そしてこの応力集中の大きさ (極大値) は、はく離が進展するにつれて大きくなり、その位置は隅角部に近づいていくことがわかる。これははく離が進展するにつれて隅角部から離れた位置での応力分布は正方形孔の場合の応力分布に近づくが、隅角部近傍では接着域が小さくなくても、あくまで剛な隅角部近傍の応力分布特性を示すためであると考えられる。介在物を起点とする疲労き裂の発生機構として、介在物の

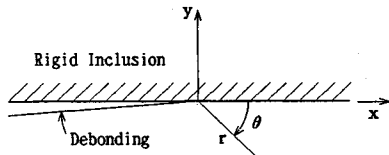


図-8 はく離先端の座標系

周りのはく離が発生すると、介在物から少し離れた母材中に微小欠陥が形成され、その微小欠陥の成長が介在物からのき裂となることが報告されている¹⁷⁾。今回の応力解析結果の、はく離が進展するにつれて発生する隅角部近傍の応力集中はその原因の1つであると考えられる。

以上示したとおり、本解析法によれば単にはく離先端近傍や隅角部近傍のみならず、隅角点にはく離先端が接近した場合の隅角点近傍など複雑な応力場の解析が可能である。

(3) はく離の応力の強さ

複素応力関数 $\phi(\zeta)$ の微分を用いて、はく離の応力の強さを求めることができ、その結果を示す。

図-8 に示すように、はく離先端を原点にとり、はく離の進展方向 x 軸、これに直交する方向を y 軸とした場合、はく離先端近傍の界面上の応力はクラック先端近傍の応力場と同様、はく離先端からの距離 r に対して -0.5 乗の特異性をもち次式で表わされる¹⁰⁾。

$$\sigma_y = \frac{1+\kappa}{r^{0.5}} |\beta_0| \cos(\theta_0 + \lambda \cdot \ln(r))$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1+\kappa}{r^{0.5}} |\beta_0| \sin(\theta_0 + \lambda \cdot \ln(r))$$

$$\sigma_x = \frac{3-\kappa}{r^{0.5}} |\beta_0| \cos(\theta_0 + \lambda \cdot \ln(r))$$

ここに、 $\lambda = \ln \kappa / (2\pi)$ 、 $\theta_0 = \arg(\beta_0)$ である。クラックの応力拡大係数と区別して本論文では、上式における特異性の大きさを示す値 $|\beta_0|$ をはく離の応力の強さと称することにす。 β_0 は次式により求められる。

$$\beta_0 = \frac{|\omega'(\beta_1)(\beta_1 - a_1)|^m g(\beta_1)}{\omega'(\beta_1)(\beta_1 - \alpha_1)} e^{-im(\pi - s/2)}$$

ここに、

$$g(\beta_1) = [g(\zeta)]_{\zeta=\beta_1} = [\phi'(\zeta)(\zeta - \alpha_1)^{1-m}(\zeta - \beta_1)^m]_{\zeta=\beta_1}$$

$m = 0.5 - i\lambda$ 、 α_1, β_1 は単位円のはく離先端に対応する点、 s は図-2 の ζ -平面において $s = \arg(\alpha_1) - \arg(\beta_1)$ である。ここでは次式で無次元化した値を用いる。

$$F = |\beta_0| / (P\sqrt{a})$$

無次元化したはく離先端のはく離の応力の強さ F 値とはく離の大きさを示す値 b/a ($0 \leq b/a \leq 1$) の関係を、 δ 形剛体介在物の角度 δ (図-1) ごとに、 $\kappa = 2$ で荷重条件として x 軸方向一様引張の場合と、 y 軸方向一様圧

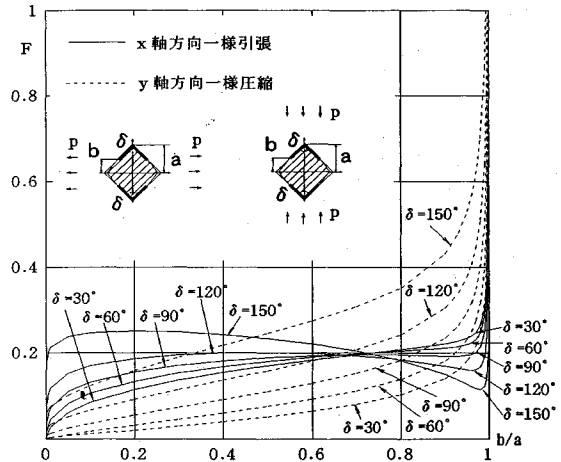


図-9 はく離先端のはく離の応力の強さ

縮の場合を 図-9 に示す。 x 軸方向一様引張の場合、 F 値は $\delta = 120^\circ \sim 150^\circ$ の場合は極値を有し、あるはく離の大きさではく離の進展が止まる可能性があるが、 $\delta = 30^\circ \sim 90^\circ$ の場合 F 値は単調増加し、一旦はく離が発生すると介在物の全周にわたってはく離が進展することがわかる。 y 軸方向一様圧縮の場合は δ の大きさにかかわらず F 値は単調増加している。はく離の進展に関しては、はく離の応力の強さの破壊靱性値を適当に選ぶことによってある長さの初期はく離以下のはく離の進展を押さえることができる。

F 値について y 軸方向圧縮荷重の場合と x 軸方向引張荷重の場合を比較すると、圧縮荷重の場合は、はく離が進展するにつれて徐々に F 値が大きくなるのに対し、引張荷重の場合は比較的小さなはく離で F 値が急になくなっており、このことは隅角部角度 δ が大きいほど大きい。このことから引張荷重の場合、圧縮荷重の場合に比べ初期欠陥としての母在と介在物の界面の非接着部が比較的小さくても、界面のはく離進展ひいては材料の強度に及ぼす影響が大きいと考えられる。

4. 結 語

応力境界と変位境界がそれぞれ 2ヶ所ずつ存在する、平面弾性混合境界値問題の解法を示した。得られた解は有理写像関数の表わす形状に対して厳密である。応力境界と変位境界が 1ヶ所ずつ存在する問題に比べその解は複雑であり、1つの変位境界上の合力を表わす定数 C_1 を決定する必要がある。本論文で解析した孔を有する無限領域の場合は、複素応力関数の無限遠でのふるまいにより決定できる。また複素応力関数の荷重項には、プレメリ関数を含む積分形が現れこの積分はできないが、その一次導関数を誘導した。その一次導関数は積分の中に ζ を含まない。したがって A_k の決定や応力成分の計算

は容易になる。本解析法では応力自由境界の解析接続の原理を用いたが、剛境界での解析接続の原理を用いても解析可能である。介在物が円形の場合の解は式(1), (21), (24)において $E_k=0 (k=1, 2, \dots, n)$, 楕円形の場合は $E_1 \neq 0, E_k=0 (k=2, \dots, n), \zeta_k=0 (k=1, 2, \dots, n)$, として得られる。本論文では無限平面に対する解を求めたが、半平面や有限領域に対する解、薄板の曲げ問題に対しての解も本論文に示した方法により導かれる。

本解析法は比較的任意形状の混合境界値問題に適用可能であり、線形破壊力学におけるクラックやはく離の問題も扱うことができる。はく離の応力の強さ $|\beta_0|$ を用いることにより、はく離進展に関する振舞いを知ることができる。本解析例は対称なはく離を扱ったが、非対称はく離や、く形以外の介在物の形状をかえた解析、二軸応力状態に対する解析など破壊力学、材料力学の問題に本解析法が適用される。

付録 I $F(\zeta)$ の一次導関数の誘導

式(16)の一次導関数を求める。まず、一般の積分範囲 (a, b) として次式を考える。

$$F(\zeta) = \chi(\zeta) \int_a^b \frac{d\sigma}{\chi(\sigma)(\sigma-\zeta)} \quad (26)$$

次式の $y(\zeta)$ を導入する。

$$y(\zeta) = \frac{\chi(\zeta)}{(\zeta-\alpha_1)(\zeta-\beta_1)(\zeta-\alpha_2)(\zeta-\beta_2)} \quad (27)$$

ここで、次の微分を考える。

$$\frac{d}{d\sigma} \left[\frac{1}{\sigma-\zeta} \frac{y(\sigma)}{\sigma-\zeta} \right] = \frac{\left[\frac{1}{y(\sigma)} \right]'}{\sigma-\zeta} - \frac{1}{y(\sigma)(\sigma-\zeta)^2} \quad (28)$$

上式に $d\sigma$ を乗じ、 a から b まで積分とすると、式(28)の左辺は、

$$\text{左辺} = \left[\frac{1}{\sigma-\zeta} \frac{y(\sigma)}{\sigma-\zeta} \right]_a^b = \frac{1}{b-\zeta} \frac{y(b)}{\sigma-\zeta} - \frac{1}{a-\zeta} \frac{y(a)}{\sigma-\zeta} = g_1(\zeta) \quad (29)$$

式(28)の右辺は、

$$\begin{aligned} \text{右辺} = & - \left(\frac{m}{\zeta-\alpha_1} + \frac{1-m}{\zeta-\beta_1} + \frac{m}{\zeta-\alpha_2} + \frac{1-m}{\zeta-\beta_2} \right) \\ & \times (\zeta-\alpha_1)(\zeta-\beta_1)(\zeta-\alpha_2)(\zeta-\beta_2) f(\zeta) \\ & - (\zeta-\alpha_1)(\zeta-\beta_1)(\zeta-\alpha_2)(\zeta-\beta_2) f'(\zeta) - g_2(\zeta) \end{aligned} \quad (30)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} f(\zeta) &= \int_a^b \frac{d\sigma}{\chi(\sigma)(\sigma-\zeta)} \\ f'(\zeta) &= \int_a^b \frac{d\sigma}{\chi(\sigma)(\sigma-\zeta)^2} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

とおいている。また $g_2(\zeta)$ は $f(\zeta), f'(\zeta)$ を含まない項で次式で表わされる。

$$g_2(\zeta) = i(0) \{ (1-m)(\zeta-\alpha_1)(\zeta-\alpha_2) + m(\zeta-\beta_1)(\zeta-\beta_2) - m\alpha_1\alpha_2 - (1-m)\beta_1\beta_2 \} + i(1) \{ m(\alpha_1+\alpha_2) + (1-m)(\beta_1+\beta_2) \} - i(2) \quad (32)$$

ここで、 $i(0), i(1), i(2)$ は、

$$i(k) = \int_a^b \frac{\sigma^k}{\chi(\sigma)} d\sigma \quad (33)$$

を表わす。

式(29), (30)より、式(28)は

$$f'(\zeta) + S(\zeta)f(\zeta) + T(\zeta) = 0 \quad (34)$$

の微分方程式となる。ここで、

$$S(\zeta) = \frac{m}{\zeta-\alpha_1} + \frac{1-m}{\zeta-\beta_1} + \frac{m}{\zeta-\alpha_2} + \frac{1-m}{\zeta-\beta_2} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} T(\zeta) &= \frac{1}{(\zeta-\alpha_1)(\zeta-\beta_1)(\zeta-\alpha_2)(\zeta-\beta_2)} \\ &\times \{ g_1(\zeta) + g_2(\zeta) \} \end{aligned} \quad (36)$$

式(34)の一般解は、

$$\exp \left[\int S(\zeta) d\zeta \right] f(\zeta) + \int T(\zeta) \exp \left[\int S(\zeta) d\zeta \right] d\zeta = \text{Const} \quad (37)$$

となり、また、上式中の \exp の項は、式(35)を用いて、

$$\exp \left[\int S(\zeta) d\zeta \right] = E_1 \chi(\zeta) \quad (38)$$

となる。 E_1 は定数である。式(37)の左辺第2項の積分は求められないが、式(37)に式(38)を代入し微分すると、

$$\frac{d}{d\zeta} [E_1 \chi(\zeta) f(\zeta)] + E_1 T(\zeta) \chi(\zeta) = 0 \quad (39)$$

さらに、式(26), (27), (31), (36)より上式は

$$F'(\zeta) = -y(\zeta) \{ g_1(\zeta) + g_2(\zeta) \} \quad (40)$$

となる。

以上より、式(40)として $F'(\zeta)$ が求められる。 $g_2(\zeta)$ は式(33)で示される積分 $i(k)$ を含むが、この被積分項には ζ を含まないため、 $F'(\zeta)$ は ζ に関する積分を含まない閉じた形で得られる。

式(16)の積分範囲として以下に $a=\beta_1, b=\alpha_2$ の場合の計算を示す。このとき $g_1(\zeta)$ は式(29), (27)より次式となる。

$$g_1(\zeta) = 0 \quad (41)$$

今、式(33)の積分を実変数の積分に置き換える。このため、単位円 (σ) を実軸 (t) に写像する一次変換を用いる。即ち、

$$t = -i \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \quad (42)$$

式(33)により $i(0), i(1), i(2)$ は、

$$i(0) = \frac{-2i}{\chi(1)} I(0) \quad (43)$$

$$i(1) = \frac{-2i}{\chi(1)} I(0) + \frac{4}{\chi(1)} f(i) \quad (44)$$

$$i(2) = \frac{-2i}{\chi(1)}I(0) + \frac{8}{\chi(1)}f_i(i) + \frac{8i}{\chi(1)}f'_i(i) \dots (45)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} I(0) &= \int_{t_{\beta_1}}^{t_{\alpha_2}} \frac{dt}{\chi_i(t)} \\ f_i(Z) &= \int_{t_{\beta_1}}^{t_{\alpha_2}} \frac{dt}{(t-Z)\chi_i(t)} \\ f'_i(Z) &= \frac{df_i(Z)}{dZ} \end{aligned} \right\} \dots (46)$$

$$\chi_i(t) = (t-t_{\alpha_1})^m(t-t_{\beta_1})^{1-m}(t-t_{\alpha_2})^m(t-t_{\beta_2})^{1-m} \dots (47)$$

$$\left. \begin{aligned} t_{\alpha_1} &= -i\frac{1+\alpha_1}{1-\alpha_1}, t_{\beta_1} = -i\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1} \\ t_{\alpha_2} &= -i\frac{1+\alpha_2}{1-\alpha_2}, t_{\beta_2} = -i\frac{1+\beta_2}{1-\beta_2} \end{aligned} \right\} \dots (48)$$

である。式 (43), (44), (45) を式 (32) に代入して、 $f'(i)$ 及び $f_i(i)$ を含む項に対して式 (39) と同様の関係式を用いると、次式を得る。

$$\begin{aligned} F'(\zeta) &= -\frac{i}{2} \cdot \frac{y(\zeta)}{y(1)} \left[\frac{-4I(0)}{(1-\alpha_1)(1-\beta_1)(1-\alpha_2)(1-\beta_2)} \right. \\ &\quad \left. \{ (1-m)(\zeta-\alpha_1)(\zeta-\alpha_2) + m(\zeta-\beta_1)(\zeta-\beta_2) \} \right. \\ &\quad \left. + I(0) \cdot \left\{ \frac{m(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)}{(1-\beta_1)(1-\alpha_2)} + \frac{(1-m)(1+\beta_1)(1+\beta_2)}{(1-\beta_1)(1-\beta_2)} \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2iI(1) \left(1 - \frac{m}{1-\alpha_1} - \frac{1-m}{1-\beta_1} - \frac{m}{1-\alpha_2} - \frac{1-m}{1-\beta_2} \right) - I(2) \right] \end{aligned} \dots (49)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} I(1) &= \int_{t_{\beta_1}}^{t_{\alpha_2}} \frac{t}{\chi_i(t)} dt \\ I(2) &= \int_{t_{\beta_1}}^{t_{\alpha_2}} \frac{t^2}{\chi_i(t)} dt \end{aligned} \right\} \dots (50)$$

であり、 $I(0)$, $I(1)$, $I(2)$ は実変数 t の積分であり、数値積分により求められる (付録Ⅱ参照)。

付録Ⅱ

式 (46), (50) の $I(k)$ を数値積分に便利な形に誘導する。 $I(k)$ は対称性から次式となる。

$$\begin{aligned} I(k) &= -\int_{-t_{\beta_1}}^{t_{\beta_1}} \frac{t^k}{\chi_i(t)} dt \\ \chi_i(t) &= -\sqrt{R(t)} \exp(-i\lambda\theta(t)) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} R(t) &= (t_{\alpha_1}^2 - t^2)(t_{\beta_1}^2 - t^2) \\ \theta(t) &= \ln \frac{t_{\alpha_1} - t}{t_{\alpha_1} + t} \cdot \frac{t_{\beta_1} + t}{t_{\beta_1} - t} \end{aligned}$$

$R(t)$, $\cos\{\lambda\theta(t)\}$ は偶関数、 $\sin\{\lambda\theta(t)\}$ は奇関数であることを考慮し、 $t=t_{\beta_1}x$ で置換すると、

$$\begin{aligned} I(0) &= \frac{1}{t_{\alpha_1}} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_i^2x^2)}} \\ &\quad \cos \left\{ \lambda \cdot \ln \frac{(1+x)(1-k_ix)}{(1-x)(1+k_ix)} \right\} dx \\ I(1) &= ik_i \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_i^2x^2)}} \\ &\quad \sin \left\{ \lambda \cdot \ln \frac{(1+x)(1-k_ix)}{(1-x)(1+k_ix)} \right\} dx \\ I(2) &= t_{\alpha_1} k_i^2 \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_i^2x^2)}} \\ &\quad \cos \left\{ \lambda \cdot \ln \frac{(1+x)(1+k_ix)}{(1-x)(1+k_ix)} \right\} dx \end{aligned}$$

ここに、 $k_i = t_{\beta_1}/t_{\alpha_1}$ であり数値積分により $I(0)$, $I(1)$, $I(2)$ を求めることができる。

参考文献

- 1) Muskhelishvili, N.I. : Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed., Noordhoff, Netherlands, 1963.
- 2) Mikhlin, S.G. : Integral Equations and Their Applications to Certain Problems in Mechanics, Mathematical Physics and Technology, 2nd ed., Pergamon Press, Oxford, 1964.
- 3) Miline-Thomson, L.M. : Plane Elastic Systems. 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1968.
- 4) England, A.H. : Complex Variable Methods in Elasticity, Wiley-Interscience, London, 1971.
- 5) 長谷部直男・上田稔 : 段付き半無限板の隅角部から発生したクラック, 日本機械学会論文集, 46巻, 407号, pp. 739-744, 1979.
- 6) Hasebe, N. and Ueda, M. : Crack Originating from a Corner of a Square Hole, Engng. Fract. Mech., Vol.13, No.4, pp.913-923, 1980.
- 7) Hasebe, N., Matsuura, S. and Kondo, N. : Stress Analysis of a Strip with a Step and a Crack, Engng. Fract. Mech., Vol.20, No.3, pp.447-462, 1984.
- 8) Hasebe, N. : Uniform Tension of a Semi-Infinite Plate with a Crack at an End of a Stiffened Edge, Ingenieur-Archiv, Vol.48, pp.129-141, 1979.
- 9) Hasebe, N., Ueda, M., Ito, Y. and Nakamura, T. : A Crack Initiating from Rhombic Rigid Inclusion, J. of Engng. Mech., ASCE, Vol.115, No.12 pp.2738-2748, 1989.
- 10) Hasebe, N., Tsutsui, S. and Nakamura, T. : Debonding at a Semielliptic Rigid Inclusion of the Rim of a Half Plane, J. of Appl. Mech., ASME, Vol.55, pp.574-579, 1988.
- 11) Viola, E. and Piva, A. : Two Arc Cracks around a Circular Rigid Inclusion, Mechanica 15, pp.166-176, 1980.
- 12) Viola, E. and Piva, A. : Fracture Behavior by Two Cracks around an Elliptic Rigid Inclusion, Engng. Frac. Mech., Vol.15, No.3-4 pp.303-325, 1981.
- 13) 中西博・馬川省吾・鈴木恵 : だ円形剛体介在物の界面き裂の応力拡大係数, 日本機械学会論文集 (A編), 55巻, 516号, pp.1756-1762, 1989.

-
- 14) 中西博・馬川省吾・赤崎智康・鈴木恵：円形介在物の界面はく離の応力拡大係数，日本機械学会論文集（A編），52巻，479号，pp.1655~1662，1986.
- 15) 石川晴男・河野好秀：長方形剛体介在物の界面き裂の応力拡大係数，日本機械学会論文集（A編），58巻，545号，pp.64~71，1992.
- 16) Hasebe, N. and Iida, J. : Intensity of Corner and Stress Concentration Factor, J. of Engrg. Mech., ASCE, Vol.109, No.1. pp.346~356, 1983.
- 17) 村上敬直・清水真佐男：疲労強度に及ぼす介在物，微小欠陥，微小き裂の影響，日本機械学会論文集（A編），54巻，499号，pp.413~425，1988.
- (1991.7.31 受付)
-

A MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH TWO STRESS AND TWO DISPLACEMENT BOUNDARIES FOR A PLANE ELASTICITY

Norio HASEBE, Minoru UEDA, Kiyotaka KOJIMA and Takuji NAKAMURA

An analytical method is presented for the plane elastic mixed boundary problem with two stress and two displacement boundaries. A rational mapping function which is formed as a sum of fractional expression is used. This method gives a closed form and an exact solution for a shape represented by the rational mapping function. The solutions are obtained under uniform tension in the arbitrary direction and pure shear. The solution can be applied for a crack and debonding problems in linear fracture mechanics. In this paper, a rhombic rigid inclusion with two symmetrical debondings is analyzed as an example of analysis. Uniform tension and compression are considered as the loading conditions. Stress distributions and singular values at a debonded tip are investigated.
