土木学会論文集 No.450／I-20, pp.95~101, 1992.7

# 節点プリズム法による3次元応力解析

林　正*・小林亨市**

従来の有限プリズム要素に節点自由度を付加して，長い3次元弾性体を解析するための節点プリズム法を提案する．このプリズム要素は隅角点に8個の節点と，稜線上に4本，内部に2本の節線を有し，これらの節線自由度を簡単な多項式を用いて級数展開する．本解析法は，形状の単純な構造物では有限要素法よりもかなり少ない自由度数で精度のよい応力を求めることができる．

*Keywords* : *finite node-prism method, three-dimensional stress analysis*

## 1. 緒　言

連続体の3次元応力解析は，有限要素法(FEM)で比較的容易に計算できるが，解析の対象物が少し大きくなると全自由度数は急激に増大して，計算可能な問題の大きさに制約が生じる．FEMによる3次元応力解析ではソリッド要素が用いられており[1),2)]，種々のアイソパラメトリック立体要素が開発されている[3)]．また，1次元方向に変位をフーリエ級数展開し，関数の直交性を利用して3次元問題を2次元問題に変換する手法も用いられており，軸対称問題などの解析に応用されている[1)]．

長大構造物の解析に適している有限帯板法(FSM)では，3次元問題に対して拡張された有限プリズム法(FPM)や層要素を用いる解法(Finite layer method)が開発されている[4)]．有限プリズム要素や有限帯板要素では，要素は長手方向の要素境界線(節線)に沿って結合されるので，変位の連続性が節線上で完全に満足されることから，有限要素に比べて長大要素を使用することができる．また，長大要素であるにも拘わらず，FEMよりも応力の精度がよい長所がある．

しかし，FSMやFPMでは，節線方向に要素分割できないことや要素の形状に対する制約があるために汎用性に欠ける．また，境界条件に応じた固有関数を用いて変位を級数展開するために，剛性行列などの解式やプログラムが繁雑になる．このために，近年，FSMを改良する研究が行われており，種々の帯板要素が開発されている[5)~15)]．本文では，節点帯板法(NSM)[10)~13)]を3次元応力解析に拡張して，新しく開発した節点プリズム法について報告する．

節点帯板要素は平板や薄肉円筒シェルの解析のために提案した2次元要素で[10),11)]，従来の帯板要素に節点自由度を付与したことにより，2方向の要素分割を可能にして，種々のFEM要素との結合や中間支点などの境界条件の処理を容易にした．この解析法を大型薄肉構造物や補剛円筒シェルの解析に適用した結果から，FSMの長所を有することを確かめた[12),13)]．

節点プリズム要素も同様な手法により，有限プリズム要素[4)]の隅角点に節点自由度を付与した3次元ソリッド要素である．本文で提案する要素の開発では，数値計算の効率性を考慮して，変位関数に用いる形状関数にはできるだけ簡単な式の採用を試みた．そこで，級数展開に用いる展開関数には，固有関数の代わりに多項式を用いることにし[14)]，かつ，変位成分や境界条件に拘わらず同一の関数を使用する．また，プリズム要素の横断面内の変位分布を表す形状関数には1次多項式を用いるが，応力の精度をよくするためにバブル節線(内部節線)を併用する．このような節点自由度を有する有限プリズム要素を用いる解析法を，節点プリズム法(NPM)と呼ぶことにする．

## 2. 節点プリズム要素

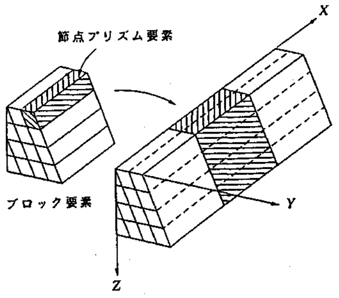
### (1) 節点プリズム要素

節点プリズム法では，図-1に示すように，構造物を長手方向(X軸方向)にX軸に垂直な断面でブロック要素に分割する．さらに，ブロック要素を断面内で三角柱または四角柱などのプリズム要素に分割する．

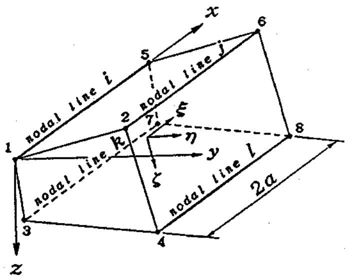
このような要素分割を行うために，節点プリズム要素には，図-2に示すように隅角点に8個の節点と，X軸に平行な稜線上に4本の節線 $i, j, k, \ell$ を設ける．

任意な断面形状の節点プリズム要素を用いるために，要素座標系として直交デカルト座標系 $(x, y, z)$ と，正規化された座標系 $(\xi, \eta, \zeta)$ を使用する．ここに，$x$ 軸は全体座標系のX軸と平行に選ぶものとし，$\xi$ 軸は要素の長さ $2a$ で正規化したものである．また，$(\xi, \eta, \zeta)$ の定義域は $-1 \sim 1$ で，その原点は，写像前の親要素の重心点に一

*正会員　工博　長岡技術科学大学教授　建設系
(〒940-21 長岡市上富岡町1603-1)
**正会員　工修　(株)CRC総合研究所




図－1　要素分割




図－2　節点プリズム要素

致させる.

（2） 一般化変位

要素の自由度として，節点および節線上の $(x, y, z)$ 軸方向の並進変位の3成分 $u, v, w$ を用いる．したがって，節点に関する一般化変位は24自由度となり，これを列ベクトル $\boldsymbol{d}_0$ で表す.

$$\boldsymbol{d}_0 = \{\ u_1,\ v_1,\ w_1,\ u_2,\ v_2,\ w_2,\ u_3,\ v_3,\ w_3,\ u_4,\ v_4,\ w_4,\ u_5,\ v_5,\ w_5,\ u_6,\ v_6,\ w_6,\ u_7,\ v_7,\ w_7,\ u_8,\ v_8,\ w_8\ \}^T \quad (1)$$

ここに，$^T$ は転置記号である.

節線に関する一般化変位は，各節線上の変位 $(u, v, w)$ を級数展開したときの係数である．ここで，解析精度を高めるために，先の4本の節線に加えて，2本の内部節線 (bubble mode) $b_1, b_2$ を用いる．したがって，節線の第 $m$ 項に関する一般化変位は18自由度となり，これをベクトル $\boldsymbol{d}_m$ で表す.

$$\boldsymbol{d}_m = \{\ u_{im},\ v_{im},\ w_{im},\ u_{jm},\ v_{jm},\ w_{jm},\ u_{km},\ v_{km},\ w_{km},\ u_{\ell m},\ v_{\ell m},\ w_{\ell m},\ u_{b1m},\ v_{b1m},\ w_{b1m},\ u_{b2m},\ v_{b2m},\ w_{b2m}\ \}^T \quad (2)$$

（3） 変位関数

親要素内の任意点 $(\xi, \eta, \zeta)$ の変位は，節点と節線に関する変位の和によって表されるものとする[10].

$$\left.\begin{aligned} u(\xi,\eta,\zeta) &= u_0 + u_1 \\ v(\xi,\eta,\zeta) &= v_0 + v_1 \\ w(\xi,\eta,\zeta) &= w_0 + w_1 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ここで，添字$_0$は節点の変位による成分，添字$_1$は節線の変位による成分を表す.

式(1)，(2)の一般化変位ベクトル $\boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{d}_m$ を用いると，式(3)の各変位成分は，次式のように表される.

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \{\boldsymbol{f}_{01}(\xi,\eta,\zeta)\}^T \boldsymbol{d}_0 \\ v_0 &= \{\boldsymbol{f}_{02}(\xi,\eta,\zeta)\}^T \boldsymbol{d}_0 \\ w_0 &= \{\boldsymbol{f}_{03}(\xi,\eta,\zeta)\}^T \boldsymbol{d}_0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \{\boldsymbol{f}_{11}(\eta,\zeta)\}^T \sum U_m(\xi) \boldsymbol{d}_m \\ v_1 &= \{\boldsymbol{f}_{12}(\eta,\zeta)\}^T \sum V_m(\xi) \boldsymbol{d}_m \\ w_1 &= \{\boldsymbol{f}_{13}(\eta,\zeta)\}^T \sum W_m(\xi) \boldsymbol{d}_m \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

ここで，$\boldsymbol{f}_{01}, \boldsymbol{f}_{02}, \boldsymbol{f}_{03}$ は節点変位に対する形状関数ベクトル，$\boldsymbol{f}_{11}, \boldsymbol{f}_{12}, \boldsymbol{f}_{13}$ は節線変位に対する形状関数ベクトルであり，$U_m, V_m, W_m$ はそれぞれの変位成分に対する第 $m$ 項目の展開関数である．また，$\sum$ は級数項に関する総和 $(m = 1, 2, \cdots)$ を表す.

式(3)に式(4)，(5)を代入して，次式の節点プリズム要素の変位関数が得られる.

$$\left.\begin{aligned} u &= \boldsymbol{f}_{01}^T \boldsymbol{d}_0 + \boldsymbol{f}_{11}^T \sum U_m \boldsymbol{d}_m \\ v &= \boldsymbol{f}_{02}^T \boldsymbol{d}_0 + \boldsymbol{f}_{12}^T \sum V_m \boldsymbol{d}_m \\ w &= \boldsymbol{f}_{03}^T \boldsymbol{d}_0 + \boldsymbol{f}_{13}^T \sum W_m \boldsymbol{d}_m \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

（4） 形状関数

式(4)の形状関数ベクトル $\boldsymbol{f}_{0i}$ は次式のようになる.

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{f}_{01} = \{\ & N_1,\ 0,\ 0,\ N_2,\ 0,\ 0,\ N_3,\ 0,\ 0,\ N_4,\ 0,\ 0,\ N_5,\ 0,\ 0,\ N_6,\ 0,\ 0,\ N_7,\ 0,\ 0,\ N_8,\ 0,\ 0\ \}^T \\ \boldsymbol{f}_{02} = \{\ & 0,\ N_1,\ 0,\ 0,\ N_2,\ 0,\ 0,\ N_3,\ 0,\ 0,\ N_4,\ 0,\ 0,\ N_5,\ 0,\ 0,\ N_6,\ 0,\ 0,\ N_7,\ 0,\ 0,\ N_8,\ 0\ \}^T \\ \boldsymbol{f}_{03} = \{\ & 0,\ 0,\ N_1,\ 0,\ 0,\ N_2,\ 0,\ 0,\ N_3,\ 0,\ 0,\ N_4,\ 0,\ 0,\ N_5,\ 0,\ 0,\ N_6,\ 0,\ 0,\ N_7,\ 0,\ 0,\ N_8\ \}^T \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

ここに，$N_i$ はFEMの6面体1次要素の形状関数である.

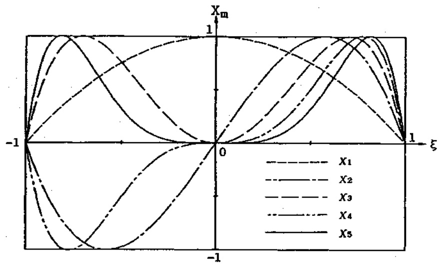
$$N_i(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{8}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(1+\zeta_0) \quad (i = 1 \sim 8) \quad (8)$$

式(8)中の $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$ は，節点 $i$ の正規座標値 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ を用いて，

$$\xi_0 = \xi_i\,\xi, \quad \eta_0 = \eta_i\,\eta, \quad \zeta_0 = \zeta_i\,\zeta \quad (9)$$

式(5)の形状関数ベクトル $\boldsymbol{f}_{1i}$ は次式で与えられる.

$$\boldsymbol{f}_{11} = \{\ f_i,\ 0,\ 0,\ f_j,\ 0,\ 0,\ f_k,\ 0,\ 0,\ f_\ell,\ 0,\ 0,\ f_{b1},\ 0,\ 0,\ f_{b2},\ 0,\ 0\ \}^T \quad (10a)$$




図－3　$X_m$のモード図

$$\boldsymbol{f}_{12} = \{\ 0,\ f_i,\ 0,\ 0,\ f_j,\ 0,\ 0,\ f_k,\ 0,\ 0,\ f_\ell,\ 0,\ 0,\ f_{b1},\ 0,\ 0,\ f_{b2},\ 0\ \}^T \quad \cdots\cdots (10b)$$

$$\boldsymbol{f}_{13} = \{\ 0,\ 0,\ f_i,\ 0,\ 0,\ f_j,\ 0,\ 0,\ f_k,\ 0,\ 0,\ f_\ell,\ 0,\ 0,\ f_{b1},\ 0,\ 0,\ f_{b2}\ \}^T \quad \cdots\cdots (10c)$$

$$\left.\begin{array}{lcl} f_i(\eta,\zeta) &=& \frac{1}{4}(1-\eta)(1-\zeta) \\ f_j(\eta,\zeta) &=& \frac{1}{4}(1+\eta)(1-\zeta) \\ f_k(\eta,\zeta) &=& \frac{1}{4}(1-\eta)(1+\zeta) \\ f_\ell(\eta,\zeta) &=& \frac{1}{4}(1+\eta)(1+\zeta) \\ f_{b1}(\eta) &=& 1-\eta^2 \\ f_{b2}(\zeta) &=& 1-\zeta^2 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

（5） 展開関数

展開関数には2次以上の多項式を全成分に対して共通に用いる．

$$X_m(\xi) = (1-\xi^2)\xi^{m-1} \quad (m=1,2,\cdots) \cdots\cdots (12)$$

$$U_m = V_m = W_m \equiv X_m \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

第5項までの$X_m$の形状を図－3に示す．

## 3. 節点プリズム法の定式化

（1） ひずみ成分

要素内の任意点のひずみ成分は，式(6)の変位成分を用いて，次式で与えられる．

$$\left.\begin{array}{ll} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (14)$$

これらのひずみ成分を次のようにベクトル表示する．

$$\begin{array}{lcl} \boldsymbol{\varepsilon} &=& \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T \\ &\equiv& \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}^T \cdots\cdots\cdots\cdots (15) \end{array}$$

式(15)に式(6)を代入すれば，各ひずみ成分を一般化変位を用いて次式のように表すことができる．

$$e_i = \boldsymbol{b}_{0i}^T \boldsymbol{d}_0 + \sum \boldsymbol{b}_{mi}^T \boldsymbol{d}_m \quad (i = 1 \sim 6) \cdots\cdots\cdots (16)$$

式(16)の$\boldsymbol{b}_{0i}$, $\boldsymbol{b}_{mi}$はひずみベクトルであり，形状関数ベクトルを用いて次式で表される．

$$\left.\begin{array}{lcl} \boldsymbol{b}_{01} &=& \boldsymbol{f}'_{01} \\ \boldsymbol{b}_{02} &=& \boldsymbol{g}_{02} \\ \boldsymbol{b}_{03} &=& \boldsymbol{h}_{03} \\ \boldsymbol{b}_{04} &=& \boldsymbol{g}_{01} + \boldsymbol{f}'_{02} \\ \boldsymbol{b}_{05} &=& \boldsymbol{h}_{02} + \boldsymbol{g}_{03} \\ \boldsymbol{b}_{06} &=& \boldsymbol{f}'_{03} + \boldsymbol{h}_{01} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

$$\left.\begin{array}{lcl} \boldsymbol{b}_{m1} &=& U'_m \boldsymbol{f}_{11} \\ \boldsymbol{b}_{m2} &=& V_m \boldsymbol{g}_{12} \\ \boldsymbol{b}_{m3} &=& W_m \boldsymbol{h}_{13} \\ \boldsymbol{b}_{m4} &=& U_m \boldsymbol{g}_{11} + V'_m \boldsymbol{f}_{12} \\ \boldsymbol{b}_{m5} &=& V_m \boldsymbol{h}_{12} + W_m \boldsymbol{g}_{13} \\ \boldsymbol{b}_{m6} &=& W'_m \boldsymbol{f}_{13} + U_m \boldsymbol{h}_{11} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (18)$$

ここで，プライム(′)は$x$に関する微分を表し，$\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}$は次式で示される$y, z$に関する導関数ベクトルである．

$$\left.\begin{array}{ll} \boldsymbol{g}_{0i} = \dfrac{\partial \boldsymbol{f}_{0i}}{\partial y}, & \boldsymbol{g}_{1i} = \dfrac{\partial \boldsymbol{f}_{1i}}{\partial y} \\ \boldsymbol{h}_{0i} = \dfrac{\partial \boldsymbol{f}_{0i}}{\partial z}, & \boldsymbol{h}_{1i} = \dfrac{\partial \boldsymbol{f}_{1i}}{\partial z} \end{array}\right\} \quad (i=1,2,3) \cdots\cdots (19)$$

また，写像変換のために，要素座標系$(y,z)$と正規座標系$(\eta,\zeta)$との微分関係を与えるヤコビ行列$\boldsymbol{J}$と，その逆行列$\boldsymbol{I}$を次のように表す．

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \cdots\cdots (20)$$

式(20)を式(19)に用いて，正規座標$(\eta,\zeta)$の微分で表すと，次式のようになる．

$$\left.\begin{array}{lcl} \boldsymbol{g}_{0i} &=& I_{11}\dfrac{\partial \boldsymbol{f}_{0i}}{\partial \eta} + I_{12}\dfrac{\partial \boldsymbol{f}_{0i}}{\partial \zeta} \\ \boldsymbol{h}_{0i} &=& I_{21}\dfrac{\partial \boldsymbol{f}_{0i}}{\partial \eta} + I_{22}\dfrac{\partial \boldsymbol{f}_{0i}}{\partial \zeta} \\ \boldsymbol{g}_{1i} &=& I_{11}\dfrac{\partial \boldsymbol{f}_{1i}}{\partial \eta} + I_{12}\dfrac{\partial \boldsymbol{f}_{1i}}{\partial \zeta} \\ \boldsymbol{h}_{1i} &=& I_{21}\dfrac{\partial \boldsymbol{f}_{1i}}{\partial \eta} + I_{22}\dfrac{\partial \boldsymbol{f}_{1i}}{\partial \zeta} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (21)$$

次に，要素の応力成分を次式のベクトルで表す．

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T \cdots\cdots\cdots\cdots (22)$$

ひずみ成分と応力成分の関係は，弾性マトリックス$\boldsymbol{D}$を用いて次式で表される．

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (23)$$

等方性の弾性体では，$\boldsymbol{D}$の$(i,j)$要素$D_{ij}$を次式のように表すことができる．

$$\left.\begin{array}{ll} D_{ii} = (1-\nu)E/D_0 & (i=1,2,3) \\ D_{ij} = \nu E/D_0 & (i \neq j,\ i,j=1,2,3) \\ D_{ii} = G & (i=4,5,6) \\ D_0 = (1+\nu)(1-2\nu) & \end{array}\right\} (24)$$

ここに，ヤング係数$E$，せん断弾性係数$G$，ポアソン比$\nu$である．

（2） 剛性行列

仮想ひずみエネルギー$\delta U$は，式(15)，(23)，(24)を用いて，次式のように表される．

$$\delta U = \int_V \sigma^T \delta\varepsilon dV = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} D_{ij}\int_V e_i\delta e_j dV + \sum_{i=4}^{6} D_{ii}\int_V e_i\delta e_i dV \quad \cdots\cdots (25)$$

ここで，積分は要素全体について行う．

さらに，式(16)を代入すると次式が得られる．

$$\delta U = \delta \boldsymbol{d}_0^T\{[\boldsymbol{k}_{00}]\boldsymbol{d}_0 + \sum_n [\boldsymbol{k}_{0n}]\boldsymbol{d}_n\} + \sum_m \delta \boldsymbol{d}_m^T\{[\boldsymbol{k}_{m0}]\boldsymbol{d}_0 + \sum_n [\boldsymbol{k}_{mn}]\boldsymbol{d}_n\} \quad \cdots\cdots (26)$$

ここに，$\boldsymbol{k}_{00},\boldsymbol{k}_{0n},\boldsymbol{k}_{m0},\boldsymbol{k}_{mn}$は節点プリズム要素の剛性行列であり，次式で与えられる．

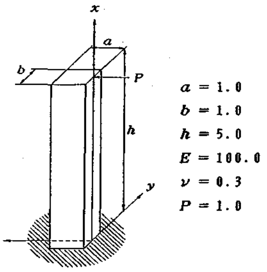
$$\left.\begin{aligned}
[\boldsymbol{k}_{00}] &= D_a \textstyle\int\int\int \boldsymbol{A}_{00} \mid \boldsymbol{J} \mid d\xi d\eta d\zeta \\
&+ D_b \textstyle\int\int\int \boldsymbol{B}_{00} \mid \boldsymbol{J} \mid d\xi d\eta d\zeta \\
[\boldsymbol{k}_{0n}] &= D_a \textstyle\int\int\int \boldsymbol{A}_{0n} \mid \boldsymbol{J} \mid d\xi d\eta d\zeta \\
&+ D_b \textstyle\int\int\int \boldsymbol{B}_{0n} \mid \boldsymbol{J} \mid d\xi d\eta d\zeta \\
[\boldsymbol{k}_{mn}] &= D_a \textstyle\int\int\int \boldsymbol{A}_{mn} \mid \boldsymbol{J} \mid d\xi d\eta d\zeta \\
&+ D_b \textstyle\int\int\int \boldsymbol{B}_{mn} \mid \boldsymbol{J} \mid d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (27)$$

ここで，

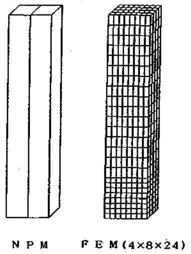
$$\left.\begin{aligned}
D_a &= Ea/(1+\nu)(1-2\nu) \\
D_b &= Ga
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (28)$$

なお，$\mid \boldsymbol{J} \mid$は式(20)のヤコビアンで，積分範囲は正規座標において$-1 \sim 1$である．また，$\boldsymbol{A}_{00}$等は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{00} &= \nu(\boldsymbol{f}'_{01} + \boldsymbol{g}_{02} + \boldsymbol{h}_{03})(\boldsymbol{f}'_{01} + \boldsymbol{g}_{02} + \boldsymbol{h}_{03})^T \\
&\quad + \rho(\boldsymbol{f}'_{01}\boldsymbol{f}'^T_{01} + \boldsymbol{g}_{02}\boldsymbol{g}^T_{02} + \boldsymbol{h}_{03}\boldsymbol{h}^T_{03}) \\
\boldsymbol{B}_{00} &= (\boldsymbol{g}_{01} + \boldsymbol{f}'_{02})(\boldsymbol{g}_{01} + \boldsymbol{f}'_{02})^T \\
&\quad + (\boldsymbol{h}_{02} + \boldsymbol{g}_{03})(\boldsymbol{h}_{02} + \boldsymbol{g}_{03})^T \\
&\quad + (\boldsymbol{f}'_{03} + \boldsymbol{h}_{01})(\boldsymbol{f}'_{03} + \boldsymbol{h}_{01})^T \\
\boldsymbol{A}_{0n} &= \nu(\boldsymbol{f}'_{01} + \boldsymbol{g}_{02} + \boldsymbol{h}_{03}) \\
&\quad \cdot (U'_n\boldsymbol{f}_{11} + V_n\boldsymbol{g}_{12} + W_n\boldsymbol{h}_{13})^T \\
&\quad + \rho(U'_n\boldsymbol{f}'_{01}\boldsymbol{f}^T_{11} + V_n\boldsymbol{g}_{02}\boldsymbol{g}^T_{12} + W_n\boldsymbol{h}_{03}\boldsymbol{h}^T_{13}) \\
\boldsymbol{B}_{0n} &= (\boldsymbol{g}_{01} + \boldsymbol{f}'_{02})(U_n\boldsymbol{g}_{11} + V'_n\boldsymbol{f}_{12})^T \\
&\quad + (\boldsymbol{h}_{02} + \boldsymbol{g}_{03})(V_n\boldsymbol{h}_{12} + W_n\boldsymbol{g}_{13})^T \\
&\quad + (\boldsymbol{f}'_{03} + \boldsymbol{h}_{01})(W'_n\boldsymbol{f}_{13} + U_n\boldsymbol{h}_{11})^T \\
\boldsymbol{A}_{mn} &= \nu(U'_m\boldsymbol{f}_{11} + V_m\boldsymbol{g}_{12} + W_m\boldsymbol{h}_{13}) \\
&\quad \cdot (U'_n\boldsymbol{f}_{11} + V_n\boldsymbol{g}_{12} + W_n\boldsymbol{h}_{13})^T \\
&\quad + \rho(U'_mU'_n\boldsymbol{f}_{11}\boldsymbol{f}^T_{11} + V_mV_n\boldsymbol{g}_{12}\boldsymbol{g}^T_{12} \\
&\quad + W_mW_n\boldsymbol{h}_{13}\boldsymbol{h}^T_{13})
\end{aligned}$$




図－4　角柱の解析




図－5　要素分割

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}_{mn} &= (U_m\boldsymbol{g}_{11} + V'_m\boldsymbol{f}_{12})(U_n\boldsymbol{g}_{11} + V'_n\boldsymbol{f}_{12})^T \\
&\quad + (V_m\boldsymbol{h}_{12} + W_m\boldsymbol{g}_{13})(V_n\boldsymbol{h}_{12} + W_n\boldsymbol{g}_{13})^T \\
&\quad + (W'_m\boldsymbol{f}_{13} + U_m\boldsymbol{h}_{11})(W'_n\boldsymbol{f}_{13} + U_n\boldsymbol{h}_{11})^T \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (29)
\end{aligned}$$

$$\rho = (1-2\nu) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (30)$$

（3） 平衡方程式

一般化変位$\boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{d}_m$に対応する一般化力を$\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{q}_m$，要素上に作用する荷重の等価節点力及び等価節線力を$\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_m$とすれば，外力による仮想仕事$\delta W$は次式で表される．

$$\delta W = \delta \boldsymbol{d}_0^T(\boldsymbol{q}_0 + \boldsymbol{p}_0) + \sum_m \delta \boldsymbol{d}_m^T(\boldsymbol{q}_m + \boldsymbol{p}_m) \cdots\cdots (31)$$

式(26)の$\delta U$と式(31)の$\delta W$を等置して，次式の節点プリズム要素の平衡方程式が得られる．

$$\left.\begin{aligned}
&[\boldsymbol{k}_{00}]\boldsymbol{d}_0 + \sum_n [\boldsymbol{k}_{0n}]\boldsymbol{d}_n = \boldsymbol{q}_0 + \boldsymbol{p}_0 \\
&[\boldsymbol{k}_{m0}]\boldsymbol{d}_0 + \sum_n [\boldsymbol{k}_{mn}]\boldsymbol{d}_n = \boldsymbol{q}_m + \boldsymbol{p}_m \quad (m = 1, 2, \ldots)
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (32)$$

なお，$\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_m$は，荷重による仮想仕事と$\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_m$による仮想仕事を等置して求められる．

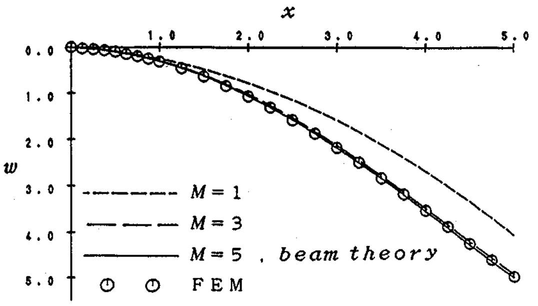
## 4. 数値計算例

（1） 角柱の解析

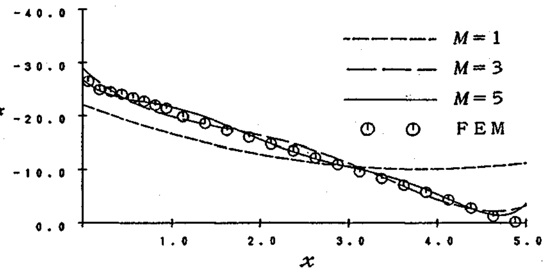
図－4に示す，幅と高さの比が1:5の正方形断面の角柱に，水平集中荷重が作用した場合について解析を行う．計算では対称性を考慮して，$x-z$平面で切断した1/2領域の解析モデルを用い，要素分割は1要素，2要素の2通りで行う．また，比較のためにFEM解[16)](6面体1次要素)を用いる．NPM(節点プリズム要素)，FEMの要素分割を図－5に示す．FEMの要素分割は，柱の固定端や上端，隅角部などの応力をより正確に求めるために，かなり密に分割している．

1要素による y=0，z=1.0 での$z$軸方向変位 w と，y=0.0625，z=0.9375 での応力$\sigma_x$の計算結果を図－6に示す．図－6(a)より，変位wは展開項数が3項(M=3)でFEM解とほぼ一致しており，5項ではFEM解およびはり理論による解に完全に一致した．図－6(b)の応力$\sigma_x$は，全体的にはFEM解に近い値が得られているが局部的には差があり，自由端で跳ね上がりが認められる．

土木学会論文集 No.450／I-20, pp.95~101, 1992.7

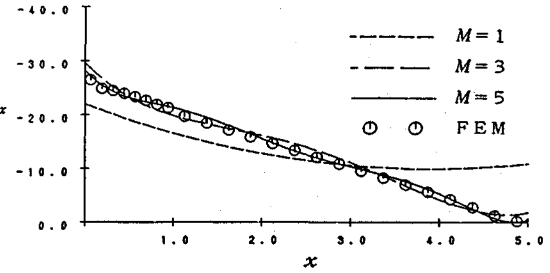



(a) 変位 w の分布




(b) 応力$\sigma_x$の分布

図－6　1要素による計算結果



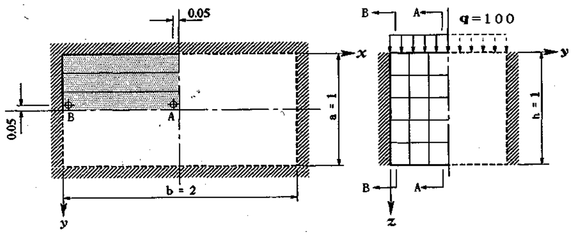

図－7　2要素による応力の分布

図－5の2要素を用いた場合の応力を図－7に示す．全体的な傾向は変わらないが，先述の自由端での値は改善されていることが分かる．

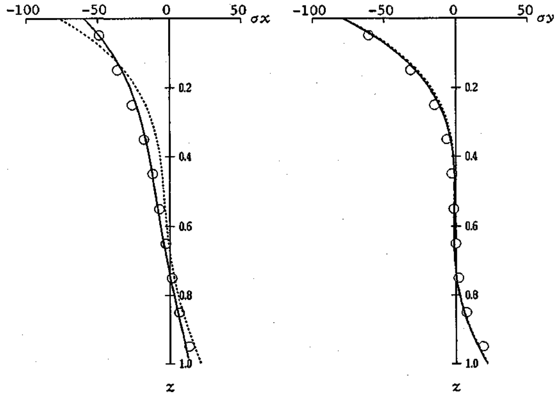
（2） スラブの解析

図－8に示すような短辺 $a$ と高さ $h$ が等しい長方形スラブを計算する．境界条件は周辺固定，下面自由とし，上面に満載等分布荷重 $q$を作用させる．解析は 1/4 領域について行い，これを図のように横断面内のみで 15(3×5) 要素に分割する．また，比較解を求めるために，500(=5×10×10) 個の立方体の FEM 要素を用いた計算を行う．なお，計算では，$E$=2×10$^5$, $\nu$=0.2 とする．

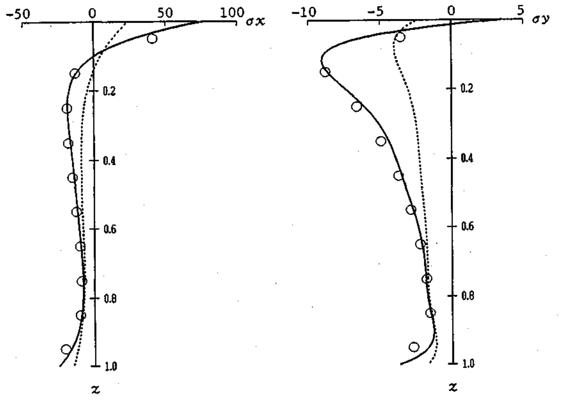
図－9に，FEM 要素の図心点を通る断面 A-A の厚さ方向の応力分布$\sigma_x, \sigma_y$を示す．o 印は FEM 要素の図心点での値であり，破線は NPM で 1 項，実線は 3 項用いた値である．これらの曲線は，プリズム要素の断面の中心点と上・下面での 7 点の値を用いて，作図プログラムで描いた．図より，3 項で FEM による値とほぼ一致して




図－8　長方形スラブ




図－9　断面 A-A の応力分布




図－10　断面 B-B の応力分布

いることが分かる．

図－10は，同じ様にして，固定端に近い断面 B-B での応力分布を示したものである．この断面上では$\sigma_y$の変化が激しいので滑らかな曲線を描くことができず，また，z=0.3 近傍と z=0.95 では FEM の値との差が認められる．そこで，図には示していないが，厚さ方向に 10 分割した NPM による計算結果では上述の点で FEM と一致する値が得られたが，上・下面での値は殆ど変わらなかった．上・下面での応力の精度は確認できないが，FEM では要素周辺での応力の精度が悪いのに対して，本解法では要素周辺上 (さらに，要素内の任意の点) での応力を計算することができる．

（3） 箱桁橋の解析

図－11に示すような満載等分布荷重 $q$ が作用する厚肉断面の単純支持箱桁橋を解析する．計算では対称性を考慮して幅員方向の1/2領域を解析し，これを図のように横断面内のみで15要素に分割する．このときの写像関数には，FEMの双1次要素の形状関数を用いる．また，比較解を得るために，先の計算例に用いたFEM要素を用いて，図－12に示すように全体の1/4領域を19×51要素に分割する．なお，荷重には $q$ のほかに自重を考慮した．材料の単位体積重量 $\gamma_c$ や材料定数などには図中の数値を用いている．

図－13に，幅員中心線上の下フランジ下面のたわみwと応力 $\sigma_x$ の分布を示す．展開項数を3項(対称性により実質は2項)用いた値は，応力でわずかな差が見られるがほぼ5項(同3項)の値に一致している．FEM解とは，スパン中央点の最大値で約5%の差がある．この差は横断面内の要素分割が粗いことによる影響とも考えられるので，節点プリズム要素の分割を図－12のFEMと同一にした51要素で計算した．

計算結果は，先述の最大たわみで0.14%，最大応力で0.06%増加しただけで，プリズム要素は図－11の15要素を用いると，たわみは3項で，応力は5項で収束していることが分かる．この結果から，FEMではまだ要素分割が足らないものと考えられる．

両解法の全自由度数を比較すると，15要素で3項用いた節点プリズム要素は750自由度(実質は2項で564自由度)，FEMは4800自由度である．本解析法は通常の有限プリズム要素に比べて節点自由度が多くなるが，同様な計算例を横断面内に8節点セレンディピティ要素を用いた有限プリズム要素で計算したときの要素分割[1),4)]に比べると，自由度数はかなり少ない(文献4)では1項で解かれているが，橋軸方向に正弦波形で分布している荷重に対して，三角関数の展開関数を用いているためである)．

以上のように，節点自由度と多項式による級数を用いたことにより，種々の境界条件に適用できて，収束性や精度のよい解を得ることができた．

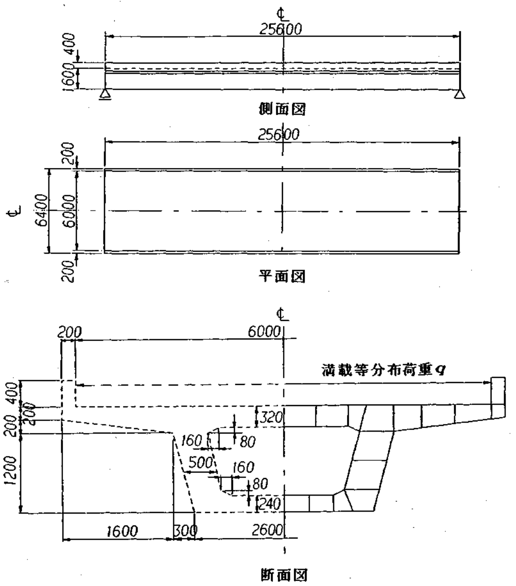
## 5. 結　論

本研究で開発した節点プリズム法について以下のことがいえる．

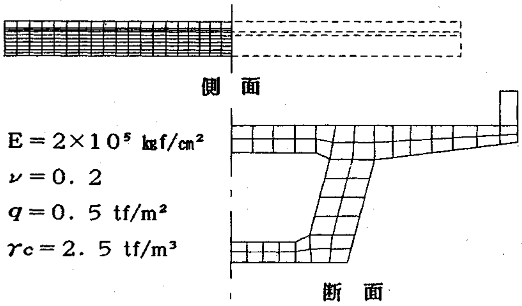
(1) 節点を付与したことにより，従来の有限プリズム法の適用範囲を拡張することができた．

(2) 多項式による級数の収束性はよくて，精度のよい解が得られる．

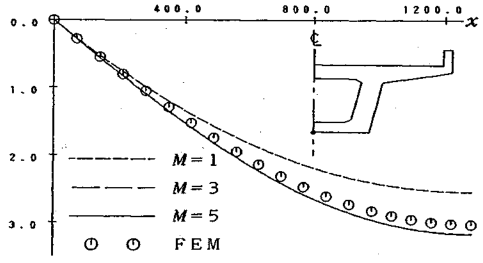
(3) 級数に対する境界条件の制約はなく，かつ，従来の固有関数を用いた式よりも数値計算が容易である．



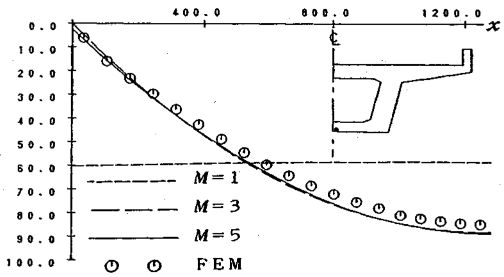

図－11　箱桁橋の計算例




図－12　FEMの要素分割




（a）　たわみwの分布




（b）　応力 $\sigma_x$ の分布

図－13　15要素による計算結果

## 参考文献


1) Zienkiewicz, O. C. (吉識雅夫・山田嘉昭監訳)：マトリックス有限要素法, 三訂版, 培風館, 1984.
2) Brebbia, C. A. and J. J. Connor (鷲津久一郎監訳)：有限要素法の基本と応用, ブレイン図書出版, 1980.
3) 鷲津久一郎ほか共編：有限要素法ハンドブック, I 基礎編, 培風館, pp.349~405, 1981.
4) Cheung, Y. K. : Finite Strip Method in Structural Analysis, Pergamon Press, pp.173~198, 1976.
5) Wong, C. C. K. and A. E. Vardy : Finite Prism Analysis of Plates and Shells, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.21, 1985.
6) Puckett, J. A. and R. M. Gutkowski : Compound Strip Method for Analysis of Plate Systems, ASCE, Vol.112, No.ST1, 1986.
7) Golleg, B. W., W. A. Grice and J. Petrolito : Plate-Bending Analysis using Finite Strip-Elements, ASCE, Vol.113, No.ST6, 1987.
8) Geannakakes, G. N. : Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates using Beam Characteristic Orthogonal Polynomials in the Semi-Analytical Finite Strip Method, J. Sound and Vibration, 137(2), pp.283~303, 1990.
9) Li, W. Y., L. G. Tham and Y. K. Cheung : Free Vibration Analysis of Doubly Curved Shells by Spline Finite Strip Method, J. Sound and Vibration, 140(1), pp.39~53, 1990.
10) 笹戸松二・林 正・持田淳一：薄肉構造解析のための節点帯板法, JSSC 第 17 回マトリックス解析法研究発表論文集, 1983.
11) 笹戸松二・林 正・中野錦也：節点帯板法による円筒殻の解析, 同上.
12) 笹戸松二・林 正・中嶋学夫・中島一朗：節点帯板法による薄肉構造物の解析, JSSC 第 9 回構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 1985.
13) 笹戸松二・林 正：節点帯板法による補剛円筒殻の解析, 同上.
14) 林 正・坂田 敦・西谷雅弘：サブパラメトリック帯板要素による薄板の曲げ解析, 土木学会論文集, No.398, 1988.
15) 林 正・藤井政美：縮約変位関数による離散 Kirchhoff 帯板要素の一般的定式化, 土木学会論文集, No.410, 1989.
16) 横河技術情報：COSMOS/M Ver. $1.5_{01}$ (汎用有限要素解析プログラム), 1988.


(1991. 3. 29 受付)

# THREE-DIMENSIONAL STRESS ANALYSIS USING FINITE NODE-PRISM METHOD

Masa HAYASHI and Koichi KOBAYASHI

Finite node-prism method, as a special form of the finite prism method with nodal points, is presented for the three-dimensional stress analysis of long structures such as thick-walled box girder bridges. The generalized displacements of the prism element contain both degrees of freedom at eight nodal points on its opposite end sides and along six nodal lines, which are four edge lines and two bubble nodal lines. In the formulation of this method, a simple polynominal series is used in the displacement functions instead of the ordinary eigen-function series, and is generally applicable to all boundary conditions at the both ends. It is found from the numerical results that the convergency and accuracy of the present method is very favorable.