

載荷端面での半径方向変位を拘束された軸対称有限円柱の弾性解析

渡辺正平*

通常行われる円柱の一軸または三軸の圧縮試験では、載荷端面における摩擦抵抗のために、その面での半径方向変位がある程度拘束される。そのような円柱を、応力関数法で弾性解析する式を誘導した。そして、若干の数値計算を行って、寸法比や端面の半径方向変位の拘束度、側圧比などが、表面変位や円柱内の応力・ひずみなどの分布に与える影響を、端面の摩擦が零の場合と比較して調べた。

Keywords : elastic, finite cylinder, restraint at ends, stress function, infinite series, Fourier-Bessel expansion, finite element method

1. まえがき

軸方向の軸対称荷重を受ける有限円柱の弾性解析は、Filon¹⁾によって行われている。Filonが解析したのは、載荷面は軸方向に一樣に変位するが、載荷円周あるいは載荷面全域の半径方向変位を零とした等方質弾性体である。そして木村²⁾がこの解析を整理・計算すると共に、モルタル円柱の一軸圧縮試験を行っている。木村は解析の条件と合わせるために、供試体の端面付近に鉄の輪をはめた実験も行っている。しかし、通常行われる一軸圧縮試験では、円柱は半径方向に膨らむが、載荷端面での摩擦のためにそこでの自由な膨らみがある程度拘束されると考えられる。そのような場合と、摩擦がない場合とでは円柱内の変位や応力・ひずみ等の分布が異なり、供試体の強度も異なると予想される。そのために、載荷面の条件や寸法比などを変えたコンクリートやモルタルの圧縮試験や解析が、従来から各方面で行われている。

有限円柱の端面や側面に種々の分布荷重を与えた軸対称弾性体の解析法は、斉藤³⁾によって示されている。山口⁴⁾もこの解法の要点を示しており、小柿ら⁵⁾もこれの1つを解析している。本論文では、通常の載荷試験で予想される供試体の挙動を考慮した問題を考えた。つまり、一樣弾性体の有限円柱が一軸あるいは三軸の軸対称荷重を受けた場合には、端面は平面を保持して軸方向に変位しても、その面での半径方向の自由な変位がある程度拘束される。このときの端面での変位の境界条件と、側面での応力の境界条件、さらに力のつり合い条件を与えた円柱の弾性解析解を誘導した。そして、解析解の数値計算を行って、端面の半径方向変位が拘束された場合とそうでない場合では、表面の変位や内部の応力・ひずみ等の分布がどのように異なるかを比較した。その際に、寸

法比や、端面での半径方向変位の拘束度と分布形状、さらに側圧比などを変えて計算した。

この問題は有限要素法でも解析できるが、軸対称問題では要素分割法のほかにBマトリックスの取扱方法によって解析結果が異なる。有限要素法による解析精度の評価のためにも、解析解は有効に利用できる。解析解ならば、境界面を含めた任意の小数の点の応力や変位を正確に求められる。さらに有限要素法では、当初から正確な境界条件を与えることは困難であるから、解析後の補正計算が必要となる。その補正方法や要素分割法と解析精度の関係を、解析解と比較しながら検討した。

コンクリートやモルタルの円柱に対する一軸・三軸圧縮試験によって生じる破壊機構の解明のために、従来から多くの実験や、様々の破壊説に基づいた弾性解析、弾塑性解析が行われている。破壊機構は必ずしも線形弾性解析だけで説明できない困難な問題であるが、それでも弾性解析は問題解決の基礎と考えられる。

2. 基本解と問題の設定

Fig.1 (a) に示すような半径 a 、高さ $2h$ の等方質弾性体の円柱が、端面に q_0 側面に p_0 の一樣な三軸あるいは一軸の圧縮荷重を受ける場合に、端面および側面におけるせん断応力が零であれば、円柱は破線のように変形し、円柱内の応力・ひずみおよび両表面における変位は一樣となる⁶⁾。そしてそれらは、Fig.1 のように座標軸を定めれば、次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z = q_0, \quad \sigma_r = \sigma_t = p_0, \quad \tau_{rz} = \tau_{zr} = 0 \\ \varepsilon_z = (-2\nu p_0/q_0 + 1) q_0/E \\ \varepsilon_r = \varepsilon_t = \{(1-\nu) p_0/q_0 - \nu\} q_0/E \\ w_0 = (-2\nu p_0/q_0 + 1) q_0 h/E \\ u_0 = \{(1-\nu) p_0/q_0 - \nu\} q_0 a/E \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 E は Young 係数、 ν は Poisson 比であり、 σ_z ,

* 正会員 農博 鳥取大学助教授 農林総合科学科 (〒680 鳥取市湖山町南4丁目101)

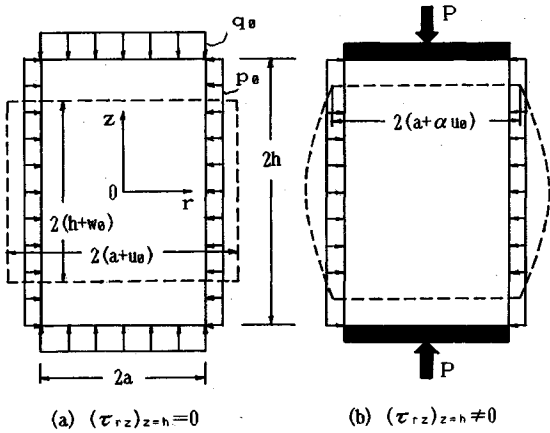


Fig.1 Definition and typical deformation of cylinders induced by compression test.

σ_r, σ_t はそれぞれ軸方向, 半径方向, 円周方向の垂直応力, τ_{rz} は rz 面のせん断応力, $\epsilon_z, \epsilon_r, \epsilon_t, \gamma_{rz}$ はこれらの応力に対応したひずみである。さらに, w_0 と u_0 は, それぞれ端面の軸方向変位と側面の半径方向変位である。このような応力・ひずみや変位を, ここでは基本解と名付ける。基本解では, 任意点の半径方向変位 u と軸方向変位 w は, $\rho=r/a, \eta=z/h$ とおけば, $u=u_0\rho, w=w_0\eta$ である。

さて, 通常行われる圧縮試験では, 荷重 P を受けた円柱の端面 $z=\pm h$ は平面であってもその面での摩擦抵抗のために, 模式的には Fig.1 (b) のように, この面での半径方向の自由変位がある程度拘束されて, 側面の半径方向変位と端面の荷重強度の分布は一様でなくなる。ここでの α は, u_0 の低減係数あるいは端面の半径方向の自由変位の拘束度を表す係数であり, もし端面の半径方向変位が不動ならば $\alpha=0$ である。通常の実験では $0<\alpha<1$ であり, このときの荷重強度の分布と端面の軸方向変位は未知である。しかし, 平均荷重強度 q_0 と P は次の関係にある。

$$P = \pi a^2 q_0 \dots\dots\dots (2)$$

そして, 円柱内の応力・ひずみや変位も一様でなくなり, これらの分布は基本解のものからずれることになる。このような Fig.1 (b) の問題の解析を以下で考える。なお, Fig.1 の荷重と変位は符号を有している。引張応力を正とするならば, Fig.1 に示した P, q_0, p_0, w_0 等は負で, u_0 は正となる。

3. 解析方法

(1) 境界条件式と力のつり合いの式

端面は平面を保持したまま変位すると仮定して Fig.1 (b) に対する応力と変位の境界条件と z 方向の力のつ

り合い式を, 次のように与える。

$$r=a \text{ で } \sigma_r = p_0 \dots\dots\dots (3a)$$

$$r=a \text{ で } \tau_{rz} = 0 \dots\dots\dots (3b)$$

$$z = \pm h \text{ で } \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \dots\dots\dots (3c)$$

$$z = \pm h \text{ で } u = f(r) \dots\dots\dots (3d)$$

$$\text{任意の } z \text{ で } \int_0^a \sigma_z 2\pi r dr = P \dots\dots\dots (3e)$$

(2) 応力関数法による解析

軸対称問題における応力と変位は応力関数 ϕ を用いることによって次式で与えられる⁷⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (2-\nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right\} \\ \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \nu \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right\} \\ \sigma_t &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \nu \nabla^2 \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right\} \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ (1-\nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right\} \\ \frac{wE}{1+\nu} &= \left\{ 2(1-\nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right\} \\ \frac{uE}{1+\nu} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここに,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \dots\dots\dots (5)$$

であり, ϕ は次の関係を満たす関数である。

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0 \dots\dots\dots (6)$$

Fig.1 のような荷重を受けると, z 軸に関して $\sigma_z, \sigma_r, \sigma_t, u$ は偶関数, τ_{rz}, w は奇関数となる。そこで, $\kappa = h/a$ とおいて, ϕ として次式を与える。

$$\begin{aligned} \phi &= q_0 a^3 \left[A_0 \frac{\kappa^3 \eta^3}{6} + C_0 \frac{\kappa \eta \rho^2}{2} \right. \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi\eta)}{\beta_n^3} \{ A_n I_0(\beta_n \rho) + B_n \beta_n \rho I_1(\beta_n \rho) \} \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_s \rho)}{\lambda_s^3} \{ C_s \sinh \gamma_s \eta + D_s \gamma_s \eta \cosh \gamma_s \eta \} \end{aligned} \dots\dots\dots (7)$$

ここに, λ_s は $J_1(x)$ の第 s 番目の零点, $\beta_n = n\pi/\kappa, \gamma_s = \lambda_s \kappa$ であり, $A_0, C_0, A_n, B_n, C_s, D_s$ は境界条件によって決定される係数である。

式 (7) を式 (4) に代入すると次式となる。

$$\begin{aligned} \tau_{rz}/q_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi\eta) [A_n I_1(\beta_n \rho) \\ &+ B_n \{ (2-2\nu) I_1(\beta_n \rho) + \beta_n \rho I_0(\beta_n \rho) \}] \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} J_1(\lambda_s \rho) \{ C_s \sinh \gamma_s \eta \\ &+ D_s (2\nu \sinh \gamma_s \eta + \gamma_s \eta \cosh \gamma_s \eta) \} \end{aligned}$$

$$\frac{wE}{1+\nu}/(q_0a) = \{A_0(1-2) + C_0(4-4\nu)\} \kappa\eta + \gamma_s\eta \frac{\sinh \gamma_s\eta}{\sinh \gamma_s} \Bigg\} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi\eta)}{\beta_n} [A_n I_0(\beta_n\rho) + B_n \{(4-4\nu)I_0(\beta_n\rho) + \beta_n\rho I_1(\beta_n\rho)\}] \\ + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_s\rho)}{\lambda_s} [-C_s \sinh \gamma_s\eta + D_s \{(2-4\nu) \sinh \gamma_s\eta - \gamma_s\eta \cosh \gamma_s\eta\}] \dots\dots\dots(8)$$

式(8)と式(3b), (3c)より,

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_n I_1}{(2-2\nu) + \beta_n I_0/I_1} = \frac{B_n I_1}{-1} = G_n \\ \frac{C_s \sinh \gamma_s}{(2-4\nu) - \gamma_s \coth \gamma_s} = \frac{D_s \sinh \gamma_s}{1} = H_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

なる関係となる。ここに、 $I_0 = I_0(\beta_n)$, $I_1 = I_1(\beta_n)$ であり、 G_n と H_s は A_n, B_n, C_s, D_s に代る未定係数である。式(9)の関係を考慮し、式(7)を式(4)に代入して整理すると、応力と変位は次式で表せる。

$$\sigma_z/q_0 = A_0(1-\nu) + C_0(4-2\nu) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cos(n\pi\eta) \left\{ \left(-2 + \beta_n \frac{I_0}{I_1} \right) \frac{I_0(\beta_n\rho)}{I_1} - \beta_n\rho \frac{I_1(\beta_n\rho)}{I_1} \right\} + \sum_{s=1}^{\infty} H_s J_0(\lambda_s\rho) \left\{ (-1 + 2\nu + \gamma_s \coth \gamma_s) \frac{\cosh \gamma_s\eta}{\sinh \gamma_s} - \gamma_s\eta \frac{\sinh \gamma_s\eta}{\sinh \gamma_s} \right\}$$

$$\sigma_r/q_0 = A_0\nu + C_0(2\nu-1) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cos(n\pi\eta) \left\{ \left(-1 - \beta_n \frac{I_0}{I_1} \right) \frac{I_0(\beta_n\rho)}{I_1} + \beta_n\rho \frac{I_1(\beta_n\rho)}{I_1} + (2-2\nu + \beta_n \frac{I_0}{I_1}) \frac{I_1(\beta_n\rho)}{I_1} \cdot \frac{1}{\beta_n\rho} \right\} + \sum_{s=1}^{\infty} H_s \left[J_0(\lambda_s\rho) \left\{ (3-2\nu - \gamma_s \coth \gamma_s) \frac{\cosh \gamma_s\eta}{\sinh \gamma_s} + \gamma_s\eta \frac{\sinh \gamma_s\eta}{\sinh \gamma_s} \right\} + \frac{J_1(\lambda_s\rho)}{\lambda_s\rho} \left\{ (-3+4\nu + \gamma_s \coth \gamma_s) \frac{\cosh \gamma_s\eta}{\sinh \gamma_s} - \gamma_s\eta \frac{\sinh \gamma_s\eta}{\sinh \gamma_s} \right\} \right]$$

$$\sigma_t/q_0 = A_0\nu + C_0(2\nu-1) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cos(n\pi\eta) \left\{ (1-2\nu) \frac{I_0(\beta_n\rho)}{I_1} + \left(-2 + 2\nu - \beta_n \frac{I_0}{I_1} \right) \frac{I_1(\beta_n\rho)}{I_1} \cdot \frac{1}{\beta_n\rho} \right\} + \sum_{s=1}^{\infty} H_s \left[J_0(\lambda_s\rho) \left(2\nu \frac{\cosh \gamma_s\eta}{\sinh \gamma_s} \right) + \frac{J_1(\lambda_s\rho)}{\lambda_s\rho} \left\{ (3-4\nu - \gamma_s \coth \gamma_s) \frac{\cosh \gamma_s\eta}{\sinh \gamma_s} \right. \right.$$

$$\left. \tau_{rz}/q_0 = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin(n\pi\eta) \left(\beta_n \frac{I_0}{I_1} \cdot \frac{I_1(\beta_n\rho)}{I_1} - \beta_n\rho \frac{I_0(\beta_n\rho)}{I_1} \right) + \sum_{s=1}^{\infty} H_s J_1(\lambda_s\rho) \times \left\{ (2-2\nu - \gamma_s \coth \gamma_s) \frac{\sinh \gamma_s\eta}{\sinh \gamma_s} + \gamma_s\eta \frac{\cosh \gamma_s\eta}{\sinh \gamma_s} \right\}$$

$$\frac{wE}{1+\nu}/(q_0a) = \{A_0(1-2\nu) + C_0(4-4\nu)\} \kappa\eta + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{\sin(n\pi\eta)}{\beta_n} \left\{ \left(-2 + 2\nu + \beta_n \frac{I_0}{I_1} \right) \frac{I_0(\beta_n\rho)}{I_1} - \beta_n\rho \frac{I_1(\beta_n\rho)}{I_1} \right\} + \sum_{s=1}^{\infty} H_s \frac{J_0(\lambda_s\rho)}{\lambda_s} \left(\gamma_s \coth \gamma_s \frac{\sinh \gamma_s\eta}{\sinh \gamma_s} - \gamma_s\eta \frac{\cosh \gamma_s\eta}{\sinh \gamma_s} \right) \\ \frac{uE}{1+\nu}/(q_0a) = -C_0\rho + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{\cos(n\pi\eta)}{\beta_n} \times \left\{ \left(-2 + 2\nu - \beta_n \frac{I_0}{I_1} \right) \frac{I_1(\beta_n\rho)}{I_1} + \beta_n\rho \frac{I_0(\beta_n\rho)}{I_1} \right\} + \sum_{s=1}^{\infty} H_s \frac{J_1(\lambda_s\rho)}{\lambda_s} \left\{ (3-4\nu - \gamma_s \coth \gamma_s) \frac{\cosh \gamma_s\eta}{\sinh \gamma_s} + \gamma_s\eta \frac{\sinh \gamma_s\eta}{\sinh \gamma_s} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

ここで、Fourier展開およびFourier-Bessel展開によって式(10)を変形し、 $J_0 = J_0(\lambda_s)$ と置けば次式を得る。 $\rho = 1$ で、

$$\sigma_r/q_0 = A_0\nu + C_0(2\nu-1) + \sum_{s=1}^{\infty} H_s P_s + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi\eta) (G_n \Delta_n + \sum_{s=1}^{\infty} H_s Q_{ns}) \quad (-1 < \eta < 1) \\ \eta = \pm 1 \text{で、}$$

$$\frac{uE}{1+\nu}/(q_0a) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_s\rho)}{\lambda_s} \left(C_0 \frac{2}{J_0} + H_s \Omega_s + \sum_{n=1}^{\infty} G_n R_{sn} \right) \quad (0 \leq \rho < 1) \dots\dots\dots(11)$$

ここでは、次式による置きかえをしている。

$$\Delta_n = (2-2\nu + \beta_n^2 - \beta_n^2(I_0/I_1)^2) / \beta_n \\ \Omega_s = (3-4\nu) \coth \gamma_s - \gamma_s \operatorname{cosech}^2 \gamma_s \\ P_s = (2-2\nu) J_0 / \gamma_s \\ Q_{ns} = (-1)^n 4 \gamma_s J_0 \frac{(1-\nu)\gamma_s^2 + (2-\nu)(n\pi)^2}{(\gamma_s^2 + (n\pi)^2)^2} \\ R_{sn} = \frac{(-1)^n 4 \lambda_s^2}{\beta_n J_0} \cdot \frac{(2-\nu)\beta_n^2 + (1-\nu)\lambda_s^2}{(\beta_n^2 + \lambda_s^2)^2} \dots\dots\dots(12)$$

いま、式(3e)に式(10)を代入すれば次式を得る。

$$A_0(1-\nu) + C_0(4-2\nu) = 1 \dots\dots\dots(13)$$

さらに式(3d)のr方向の変位uの与関数を、

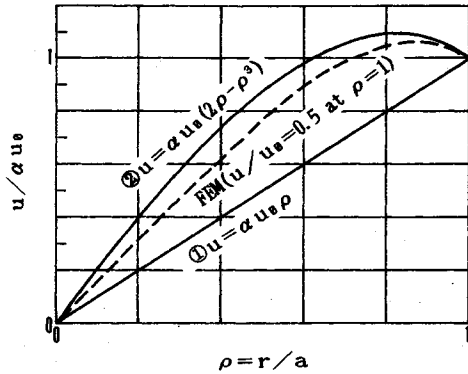


Fig.2 Forms of radial displacement in loading end.

Fourier-Bessel展開によって次式で与える.

$$u(\rho) = \alpha u_0 \sum_{s=1}^{\infty} a_s J_1(\lambda_s \rho) \quad (0 \leq \rho < 1) \dots\dots\dots (14)$$

式 (3a), (3d) に式 (1), (11), (13), (14) を代入して整理すれば, 次の連立方程式を得る.

$$\left. \begin{aligned} C_0 \frac{2}{J_0} + H_s Q_s + \sum_{n=1}^{\infty} G_n R_{sn} \\ = \alpha \frac{(1-\nu) p_0 / q_0 - \nu}{1+\nu} \lambda_s a_s \\ G_n \Delta_n + \sum_{s=1}^{\infty} H_s Q_{ns} = 0 \\ C_0 - \frac{1-\nu}{1+\nu} \sum_{s=1}^{\infty} H_s P_s = \frac{\nu}{1+\nu} - \frac{1-\nu}{1+\nu} (p_0 / q_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots (15)$$

式 (15) を解いて C_0, G_n, H_s の値を求めると, 式 (13) から A_0 の値も決定できる. いま, C_0 と m 個ずつの G_n と H_s の値を求めようとするれば, 連立方程式は $(2m+1)$ 元となる.

円柱の端面 ($\eta = \pm 1$) における半径方向変位の分布を式 (14) によって与える場合に, Fig.2 のような ρ の 1 次式あるいは 3 次式ならば係数 a_s は次式となる.

① $u(\rho) = \alpha u_0 \rho$ ならば,

$$a_s = \frac{-2}{\lambda_s J_0(\lambda_s)} \dots\dots\dots (16)$$

② $u(\rho) = \alpha u_0 (2\rho - \rho^3)$ ならば,

$$a_s = \frac{-2}{\lambda_s J_0(\lambda_s)} \left(1 + \frac{8}{\lambda_s^2} \right) \dots\dots\dots (17)$$

ここで, ①の分布は u が ρ に比例するものである. このとき, $\alpha=1$ とおけば基本解と一致するので, それによってプログラムの検定ができる. なお, 有限要素法によって点 $\rho=\eta=1$ のみにおける u の値を, $u=u_0/2$ と与えてみると, Fig.2 の破線のように②に似た分布となった. いずれにしても, 実際の載荷試験での端面の半径方向変位の分布は未知である.

(3) 数値計算法

上記の方法による計算結果は, $\eta=1$ および $\rho=1$ の両

境界面においては級数和の収束が遅い. しかしながら, 詳細に調べると, 級数和は周期的に変動している. そこで, 1 周期毎の級数和の平均値をその周期における解とみなし, その解が所定の精度内に収束すれば級数計算を終了させる方法で計算した. そのようにして得られた解は, 境界条件と比較することによって計算の精度を確認できる. この周期は ρ や η の値に応じて異なるが, 各点における周期の最小公倍数が 40 であった. そこで, 境界面以外の点においても周期を 40 と与え, $n=s=40$ 毎の級数和の平均値によって収束判定を行った. しかし, $n=s=400$ となっても収束しない場合には, そこで計算を打切った. 試みに, $n=s=800$ まで計算してみても, $\rho=\eta=1$ におけるものを除けば, 計算結果はほぼ同じであった.

もともと式 (11), (14) は $\rho=\eta=1$ においては成立しないから, ここでの解は得られない. 数値計算結果によると, $\rho=0.95$ でも有効数字 4 桁までの正常な解となるが, $\eta=0.95$ では僅かに誤差がみられる. いずれにしても, $\rho=\eta=1$ は特異点であり, 後述の数値計算例においても, この付近の u の値に誤差が生じるので, 境界条件で与えたものを図示している. なお, $\alpha < 1$ の場合には $\rho=\eta=1$ における σ_z の値は周期的変動はせず, $n=s$ の値を増すことによって級数も増加を続ける. ちなみに, 剛体と半無限体との接触縁では, σ_z は無限大となることが知られている.

なお, 数値計算ではオーバーフロー対策として漸近展開式や近似式を使用した. 解析解の数値計算には京大の FACOM を利用し, そのサブルーチン SSL II と NUMPAC を使用した. そして, 計算は総て倍精度で行った.

4. 数値計算例と考察

以下では Poisson 比をすべて 0.20 とし, 圧縮荷重を受けた場合を考えた. そして, 寸法比や半径方向変位の拘束度, 側圧比さらには変位形状などを変えて数値計算を行った. なお, 1 部の条件については EPIC IV⁸⁾ を用いて有限要素法でも計算を行い, それによる結果とも対比した. この EPIC IV は定ひずみ, 定応力の三角形要素を使用するもので, B マトリックスにおける r と z の値は 3 節点におけるものの平均値として与えられている. これによって基本解の計算を行うと, 有効数字 4 桁目に誤差が現れる程の精度であった.

(1) 寸法比・拘束度と側面の半径方向変位の関係

端面における半径方向の変位分布を, 式 (16) によって与え, そこでの半径方向変位の拘束度を $\alpha=0.0$ と 0.5 とした場合の側面の半径方向変位の分布を Fig.3 に示す. 横軸は基本解での半径方向変位との比である. ここでは $p_0=0.0$ で, 4 つの寸法比 (κ) のものを示して

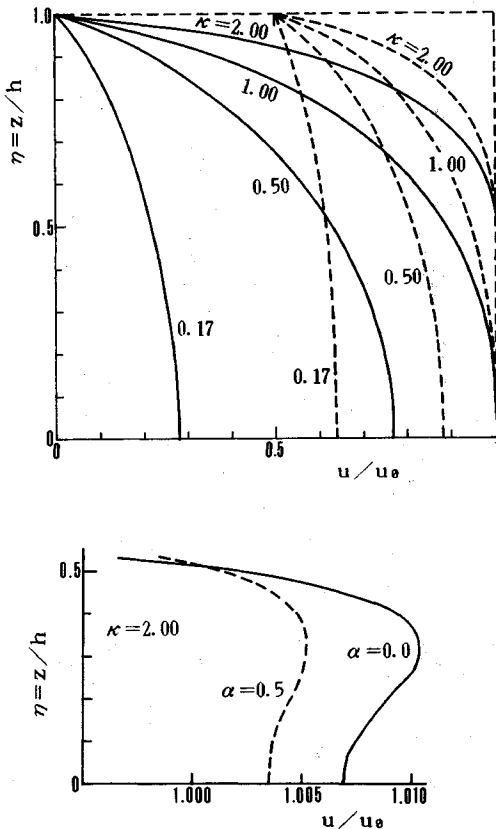


Fig.3 Distribution of relative radial displacements in side surface. Lower figure is detail of upper one. ($\nu=0.2$, $p_0=0.0$)

いるが、 $\kappa \geq 1$ ならば、端面での膨らみが拘束されたことによって、高さの中央部の膨らみが基本解のものに比べて僅かであるが大きくなっている。しかも、微小ではあるが、拘束度が大きい(α が小さい)ときの方がかえってその膨らみが大きくなっている。下の拡大図にその例を示している。ところが、 $\kappa \leq 0.5$ ならば、端面での膨らみが拘束されたことによって円柱全体において膨らみが基本解のものよりも小さくなっている。そしてこのときは、拘束度が大きいときの方が膨らみも小さくなっている。

Fig.3 の下図は、 $\kappa=2.0$ のときの変位分布の 1 部を拡大したものである。これによると、側面の膨らみは、端面から高さの中央に向かって単調に増加せずに、 $\eta = 1/3$ 付近で膨らみが最大となり、そして中央に向かって減少している。寸法比が 2.50 と 2.75 のアルミ円柱を、一軸圧縮試験と有限要素法による解析によって塑性域まで変形させた例⁹⁾でも、このような 2 重の膨らみ面が現れている。

(2) 端面の軸方向変位

端面での半径方向変位が拘束されると、平均荷重強度

Table 1 Relative axial displacement of loading end ($w_{\eta=1}/w_0$)

| κ | Analytical | | FEM | |
|----------|--------------|--------------|---------------------------|---------------------------|
| | α 0.0 | α 0.5 | α 0.5 ($\eta=1$) | α 0.5 ($\eta=0$) |
| 2.00 | 0.9891 | 0.9946 | 0.9980 | 0.9943 |
| 1.00 | 0.9781 | 0.9899 | 0.9922 | 0.9885 |
| 0.50 | 0.9555 | 0.9778 | 0.9805 | 0.9794 |
| 0.17 | 0.9197 | 0.9588 | 0.9594 | 0.9563 |

$\nu=0.2, p_0=0.0$

q_0 を与えられたときの端面の軸方向変位 ($w_{\eta=1}$) は、基本解のもの (w_0) よりは絶対値が小さくなる。Table 1 に、 $p_0=0.0$ のときの $w_{\eta=1}/w_0$ の値を示す。端面での半径方向変位の拘束度が大きければ、端面の軸方向変位は小さくなっている。

端面での半径方向変位が拘束されると、この面の軸方向変位と平均荷重強度の関係は当初は未知である。したがって、有限要素法では、所定の平均荷重強度となるような変位をあらかじめ与えることはできない。有限要素法では、平均荷重強度 q_0 に対応する基本解の軸方向変位 w_0 を端面に与えると、それによって得られた端面での節点反力から換算された載荷面節点の応力 σ_z の合力は、基本解のものとは異なる。そこで、次式によって修正係数 k を計算すれば、 $1/k$ の値が $w_{\eta=1}/w_0$ の値となる。

$$k = \int_0^a \sigma_z 2\pi r dr / q_0 \pi a^2 \dots\dots\dots (18)$$

同様の修正係数は $z=0$ の面における節点反力からも計算できるが、両者は必ずしも一致しない。このような手続きで計算した変位比が Table 1 の有限要素法の欄に示した値である。なお、 σ_z の換算式は後述する。

(3) 端面での軸方向応力の分布

端面での σ_z の分布を Fig.4 に示す。上記の理由から $\rho=1$ における解析解は得られない。また、有限要素法でも、この点における σ_z の値はこの図からはみ出すので、 $0 \leq \rho \leq 0.93$ の範囲のものを示した。同じ理由から、後述のコンターもこの部分を省略している。Fig.4 (a) は端面の半径方向変位を零とした場合のものであり、Fig.4 (b) は端面の半径方向変位を基本解のもの 0.5 倍とした場合のものである。端面での半径方向変位の拘束度が大きくなれば、 σ_z はより一様でなくなっている。いずれの図も、 $\kappa=2.0$ のときと $\kappa=1.0$ のときの σ_z の分布が接近しているために、 $\kappa=1.0$ のものの図示を省略している。Fig.4 によると、端面での半径方向変位が半径に比例すると仮定した場合には、 $\kappa=2.0$ では σ_z は中心軸において最小で側面に近づくに従って増加しているが、 $\kappa=0.5$ のときは $\rho=0.7$ において極小となっている。さらに、 $\kappa=0.17$ の円盤状のものであれば、中心軸での σ_z は q_0 よりも大きく、 $\rho=0.85$ で極小となってい

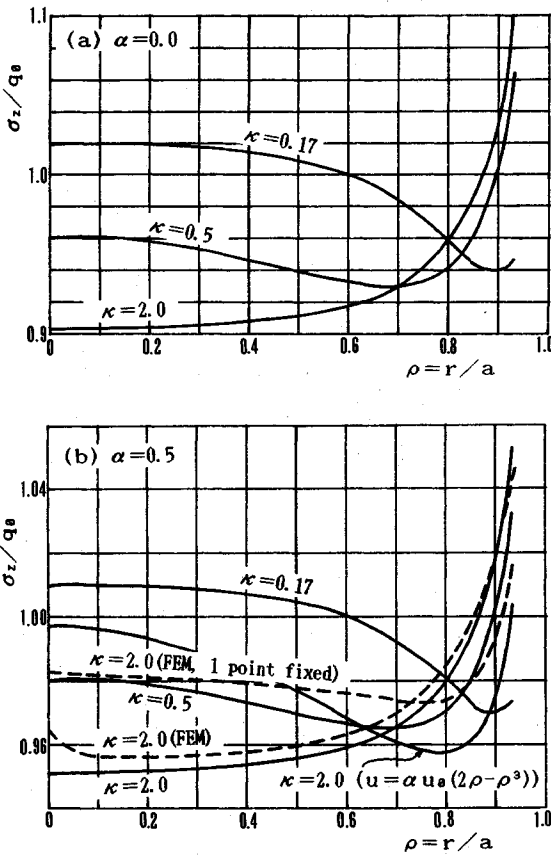


Fig.4 Distribution of axial normal stress in loading end. ($\nu=0.2, \kappa=2.0, p_0=0.0$)

る。Fig.4 (b)には有限要素法による解析の例も示している。基本解に対する有限要素法による解は満足できるものであったが、この計算例の場合には中心軸付近での解の精度に特に問題があることが窺える。

Fig.4 (b)には、端面の半径方向変位を式(17)で与えたときのものと、 $\rho=1$ における半径方向変位のみを与えたときの有限要素法による結果の例も示している。端面における両者の半径方向変位の分布はFig.2に示されたように形状が似ているが、 σ_z の分布には近似が認められない。

(4) 応力とひずみの分布

以下に応力とひずみの分布の例を、基本解との比率で示す。まず、Fig.5に、 $\kappa=2.0, \alpha=0.5, p_0=0.0$ のときの $\bar{\sigma}, \tau_{max}, E\epsilon_1, E\epsilon_r$ の分布を496個の格子点での値から描いたものを示す。以下の図面も含めて、破線は基本解の値である。ここでの τ_{max} は最大せん断応力であり、 $\bar{\sigma}$ は次式で示される相当応力¹⁰⁾である。

$$\bar{\sigma} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} / 2 \dots\dots (19)$$

ここに、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ は主応力である。八面体せん断応力

τ_{oct}^{11} と $\bar{\sigma}$ は $\tau_{oct} = (\sqrt{2}/3)\bar{\sigma}$ の関係となる。さらに、梶田ら¹²⁾によって与えられた八面体せん断ひずみ γ_{oct} と $\bar{\sigma}$ とは $E\gamma_{oct} = (2\sqrt{2}/3)(1+\nu)\bar{\sigma}$ の関係となり、畑野¹³⁾によって与えられたせん断ひずみ強度 S と γ_{oct} とは、 $S = 0.612\gamma_{oct}$ の関係となる。このようなことから、 $\tau_{oct}, \gamma_{oct}, S$ のコンターの形状は $\bar{\sigma}$ のものと同じであり、基本解の位置も $\bar{\sigma}$ のものと同じとなる。

Figs.5 (a), (b)によると、 $\rho=\eta=1$ の近傍で $\bar{\sigma}$ も τ_{max} も最大であり、中心軸では $\eta=0.46$ において極大となっていて、両方の点における値は基本解のものよりも大きくなっている。そしてこの両点を結ぶ線が尾根筋となっており、端面の中央と側面の中心において極小となっている。また、Fig.5 (c)に示された $E\epsilon_1$ の分布も同様な形状であるが、中心軸における極大値は、 $\eta=0.33$ において生じている。以上の $\bar{\sigma}, \tau_{max}, E\epsilon_1$ のコンターの尾根筋は実験でしばしばみられる円錐状の破壊面と似ていることに興味がある。

Fig.5 (d)に示された $E\epsilon_r$ の分布は以上の3つのものとは異なり、 $\eta > 0.5$ における値は基本解のものよりも小さいが、 $\eta < 0.5$ では基本解のものよりも大きくなっている。そして、 $E\epsilon_r$ の最大値は $\eta=0.33$ のところのみられるが、側面ではなく中心軸上である。なお、側面での最大値も同じ高さのところであり、ここは、Fig.3 (a)での膨らみが最大となる高さと同じである。

(5) 寸法比の影響

Fig.5と同じ条件で、寸法比のみを $\kappa=1.0$ と 0.5 に変えた場合の結果をFig.6に示す。Fig.6の $\kappa=1.0$ のときの τ_{max} の分布は、全体としてFig.5 (b)の下半分が削除されたような形となっている。ただし、高さの中央部では、コンターの位置が $\kappa=2.0$ での $\eta=0.5$ のものとは少し異なっている。ところが、 $\kappa=0.5$ のときのコンターの位置は $\kappa=2.0, 1.0$ のときと異なり、基本解の線も1本のみとなっていて、 $\rho=\eta=1$ の近傍を除けば τ_{max} はいずれの点でも基本解のものより小さくなっている。このような傾向は、 $\bar{\sigma}$ でも $E\epsilon_1$ でも同様であるが、図面を省略する。円周方向ひずみ $E\epsilon_r$ の分布も同様であるが、 $\kappa=0.5$ となれば、全域において基本解の値(0.200)よりも小さくなっている。このことは、Fig.3に示されたことと関連している。つまり、 $\kappa \geq 1$ では、端面で半径方向変位が拘束を受けることによって、側面の半径方向変位が基本解のものよりもかえって大きくなる部分が生じるが、 $\kappa \leq 0.5$ ではそのようなことがみられない。なお、 $\kappa=0.5$ でみられた現象は、 $\kappa=0.17$ ではさらに顕著となる。

もし、応力やひずみとその材料固有の限界値に達したときに破壊や破損が生じると仮定するならば、 $\kappa \geq 1$ のときには応力やひずみが基本解よりも大きい部分と小さい部分とが存在するから、強度に対する寸法比の効果は

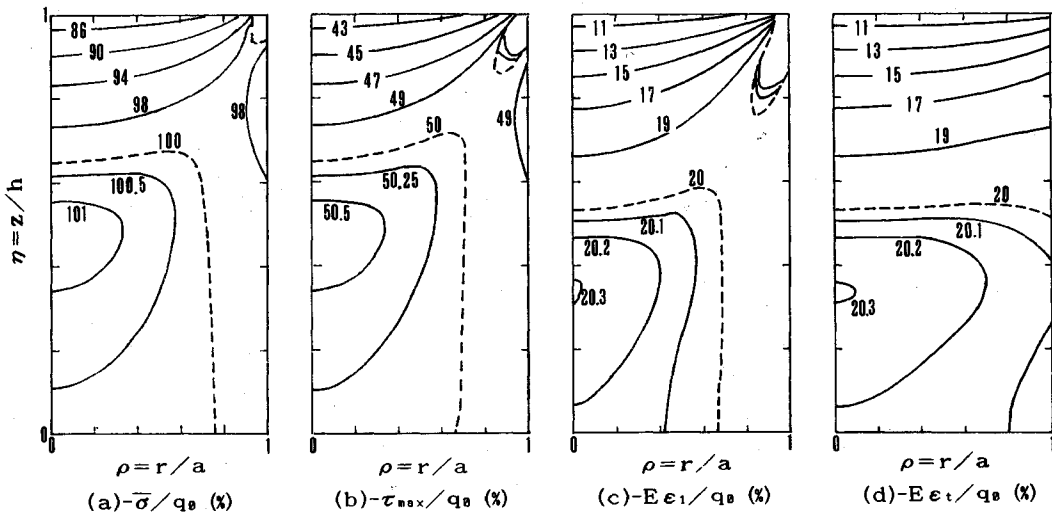


Fig. 5 Contours of stresses and strains in a quarter of a cylinder. Broken lines represent the values of Eq. 1. ($\nu=0.2, \kappa=2.0, \alpha=0.5, p_0=0.0$)

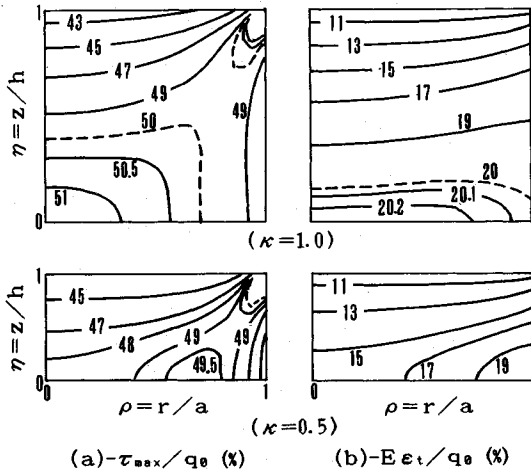


Fig. 6 Effect of height to diameter ratio on the stress and strain. Broken lines represent the values of Eq. 1. ($\nu=0.2, \alpha=0.5, p_0=0.0$)

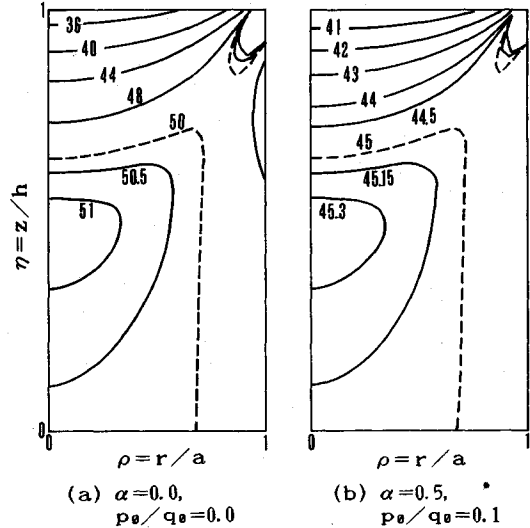


Fig. 7 Effects of degree of restraint and confining pressure on the maximum shearing stress ($-\tau_{max}/q_0$ (%)). Broken lines represent the values of Eq. 1. ($\nu=0.2, \kappa=2.0$)

現れにくい、 $\kappa \leq 0.5$ ならば、ほとんどの部分での応力やひずみが基本解のものよりも小さくなるから、強度に対する寸法比の効果は大きく現れることを示唆している。公表された実験結果^{(4)~(6)}でもそのような結果となっている。つまり、 $\kappa \leq 0.5$ ならば、 κ の値が小さくなることによる強度の増加傾向がより顕著に現れている。

(6) 変位拘束度と側圧の影響

端面における半径方向変位の拘束度が応力とひずみに与える影響を示す例として、 $p_0=0.0, \alpha=0.0$ のときの τ_{max} の分布を Fig. 7 (a) に示す。ここに示された基本解の位置は Fig. 5 (b) の $\alpha=0.5$ のものと同じ位置となっている。他のコンターの位置も変わらないが、その値は $\alpha=0.0$ のときは $\alpha=0.5$ のときのものよりは基本解

との差が2倍になっている。他の応力・ひずみでも同様である。もし、側圧と軸方向荷重が、

$$p_0/q_0 = \nu/(1-\nu) \dots \dots \dots (20)$$

の関係であれば、 $u_0=0$ であるから端面では $\tau_{rz}=0$ となつて、 α の値の如何に拘らず円柱の全域において $u=0$ となる。そしてそのときの解は式 (1) で表せる。いま、

$$p_0/q_0 < \nu/(1-\nu) \dots \dots \dots (21)$$

の範囲の側圧比を与えて計算した結果の例を Fig. 7 (b) に示す。この場合の基本解の位置も Figs. 5 (b), 7 (a) のものとはほぼ同じである。このことは、 α や p_0/q_0 の値

を変えても同じ結果となった。

以上のことから、端面での半径方向変位が r に比例するならば、 α や p_0/q_0 の値の如何に拘らず、式 (21) の範囲の荷重を受ければ円柱内の応力やひずみの分布は相似であると言える。そしてその分布の形状は、 $p_0=0.0$ で端面での半径方向変位が固定されたときのものと同じである。しかし、なぜそのようになるかは未解明である。なお、端面での半径方向変位を式 (17) で与えると、基本解の位置やコンターの形状は上記のものとは大きく異なるが、図面は省略する。

(7) 有限要素法での補正計算と解析精度

有限要素法の要素分割は文献の例⁹⁾を参考にした。寸法比 $\kappa=2.0$ の場合には、336 個の節点を有する 300 個の様な矩形を、1 本ずつの右上がりの斜線で 600 個の要素に分割した。境界条件として基本解の w_0 と端面の半径方向変位を与えて計算し、それによって得られた応力やひずみを、式 (18) によって算定された k の値で除せば、その補正された値は解析解と条件を一致させたことになる。なお、式 (18) での節点反力を載荷面節点の応力 σ_z に換算するとき、軸対称問題と 2 次元問題では式が異なる。軸対称問題では、等分布荷重 q_0 と節点 i , k の荷重 P_i , P_k の関係は次式であり¹⁰⁾、基本解に対する結果もこの関係を保証している。

$$\left. \begin{aligned} P_i &= \pi(r_k + 2r_i)(r_k - r_i)q_0/3 \\ P_k &= \pi(2r_k + r_i)(r_k - r_i)q_0/3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

節点の荷重 P と節点反力 F_z は等価であり、 q_0 と σ_z は等価であるから次式の関係となる。

$$\sigma_z = F_z q_0 / P \dots\dots\dots (23)$$

微小区間の応力を等分布とみなして、式 (23) の σ_z を式 (18) に代入して k の値を求めた。有限要素法は鳥大の HITAC で計算し、式 (18) の積分も、Newton-Cotes の 9 点則を利用した HITAC のサブルーチンで計算した。

ところで、Table 1 に示されたように $\eta=1$ と $\eta=0$ において算定された $1/k$ の値は必ずしも一致しないから、同じ解析結果から求められた補正後の応力やひずみは微妙に異なる。したがって、応力やひずみの変化勾配が微小な部分では、同じ値を示すコンターの位置が大いに異なることがある。そのような現象がみられた例を Fig.8 に示す。Fig.8 (a) は、 $\eta=1$ における k の値で補正して描いた τ_{max} のコンターであり、Fig.8 (b) は $\eta=0$ における値から補正して描いたものである。Table 1 に示された両面での $1/k$ の値の差異は 0.3% 程度であっても、Figs.8 (a), (b) に示された基本解のコンターの位置は大いに異なっている。これら 2 つのうちでは Fig.8 (b)、つまり $\eta=0$ での節点反力によって補正されたものの方が Fig.5 (b) に示された解析解に近い結

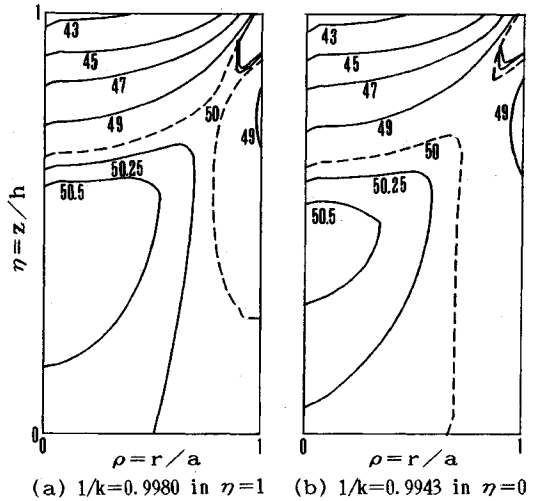


Fig.8 Contours of the maximum shearing stress ($-\tau_{max}/q_0$ (%)) obtained by finite element method. Results was modified by total axial reaction in (a) end surface and (b) middle surface. Broken lines represent the values of Eq. 1. ($\nu=0.2, \kappa=2.0, \alpha=0.5, p_0=0.0$)

果となっている。元来、 $\eta=0$ では $\eta=1$ よりも境界面から遠いから、Saint-Venant の原理で示される通り、 σ_z の分布が等分布に近くなる。そのために、 $\eta=0$ では式 (22), (23) の適合度が $\eta=1$ よりも良くなるといえる。なお、要素分割をもっと密にして、861 個の節点を有する 800 個の様な正方形を 1 本ずつの右上がり斜線で 1600 個の要素に分割してみた。そうすると計算精度が向上し、 $\eta=0$ での $1/k$ の値は 0.9945 となって解析解での値 0.9946 に近づいた。そして、端面付近のコンターの位置も、やはり解析解に近くなった。

一般に等方等質一様弾性体の内部の応力分布図が急に折れ曲がることはない。したがって、対称軸ではコンターの接線は軸と直角にならなければならないが、Fig.8 では必ずしもそのようになっていない。これは、軸対称の有限要素法で特有の B マトリックスの取扱いの問題が関連しているものとも思われる。要素分割を密にした場合でもこのような不合理性は完全には解消されないが、解析解から描いた Figs.5~7 のコンターにはそのような不合理性はみられない。なお、要素分割のときに、同じ矩形を右下がりの斜線で分割すると、右上がりの斜線で分割したときよりも、解析精度が劣る結果となった。

5. 総 括

一軸または三軸の軸対称荷重を受ける有限円柱の端面は平面を保持して軸方向に変位するが、その面での半径方向の自由変位がある程度拘束された一様弾性体を、応力関数法によって解析する式の誘導と計算法を示した。そして、若干の数値計算を行い、寸法比や変位拘束度、

側圧比、端面での半径方向変位の形状などが変わることによって、表面の変位や載荷面の応力、円柱内の応力・ひずみなどの分布がどのような影響を受けるかを、端面でのせん断応力が零の場合（基本解）と比較して調べた。そして、一部は有限要素法による解析の精度も検討した。以下に結果を要約する。

(1) Fig.1 (b) に示す有限円柱の境界条件と力のつり合いを式 (3) のように与えられた等方等質弾性体の応力と変位を、Love の応力関数法によって解析する式を誘導した。連立方程式 (15) を解いて A_0 , C_0 と m 個ずつの G_n , H_n の値を求めれば、応力と変位を式 (10) によって計算できる。端面での半径方向変位の分布は、Fourier-Bessel 展開によって式 (14) によって与え、その係数は式 (16), (17) のように計算できる。

(2) 端面での半径方向変位が拘束されると、寸法比 $\kappa = h/a$ が $\kappa \geq 1.0$ ならば、高さの中央部での側面の膨らみが基本解のものより大きくなる。しかも、端面での拘束度が大きいときの方が、その膨らみが大きくなる。そして、 $\kappa = 2.0$ のときには、側面の膨らみは $z/h = 1/3$ 付近で最大となる。ところが、 $\kappa \leq 0.5$ ならば、端面での半径方向変位が拘束されたことによって、円柱全体において側面の膨らみが基本解のものより小さくなる。しかもこのときは、拘束度が大きいときの方が膨らみが小さい。

(3) 端面での σ_z の絶対値は、 $\kappa \geq 1.0$ ならば中心軸において最小で側面に近づくに従って増加するが、 $\kappa = 0.5$ のときは $r/a \approx 0.7$ において極小となる。さらに $\kappa = 0.17$ の円盤状のものであれば、中心軸での σ_z は平均荷重強度 q_0 よりも大きく、 $r/a \approx 0.85$ で極小となる。

(4) 端面での半径方向変位を拘束された $\kappa = 2.0$ の円柱では、相当応力 ($\bar{\sigma}$) や最大せん断応力 (τ_{\max})、主ひずみ (ϵ_1) のコンターの尾根筋は円錐状となる。また、 ϵ_1 は端面付近では基本解のものより小さいが、中央部では基本解のものよりも大きくなる。そして、 ϵ_1 の最大値は、側面ではなく内部の中心軸上にみられる。

(5) 応力やひずみの分布は、 $\kappa = 1.0$ のときは、大筋において、 $\kappa = 2.0$ のときの端部のものに近似している。しかし、 $\kappa \leq 0.5$ ならば、応力やひずみは円柱内の全域において基本解のものよりも小さくなる。

(6) 端面での半径方向変位が r に比例するならば、そこでの変位拘束度や側圧比の値の如何に拘らず、円柱内の応力やひずみの分布は、端面での半径方向変位が固定されたときのものと相似である。

(7) 有限要素法では、当初は荷重と端面変位の関係が未知であるから、正確な境界条件を与えてこの問題を解析することが困難である。したがって、解析後の補正計算が必要となるが、そのときの補正計算法が異なれば、応力やひずみの変化の勾配が小さなところでのコンター

の位置が解析解と大きく異なる。また、要素分割を細かくすれば解析精度は向上するが、対称軸付近でのコンターの不自然さは残る。

なお、本論での式 3(c) の条件は、円柱が剛体に接触したと仮定されたものである。通常の載荷試験では加圧板の剛性も有限であるから、そのような場合とは境界条件が厳密に対応しているわけではない。

この論文は、北見工大の奥村勇先生から戴いた有益なご批判と助言を考慮して原稿を書きかえた。ここに謝意を表す。

参考文献

- 1) Filon, L.N.G. : On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load, *Philosophical Transactions of Royal Society*, Vol.198, pp.147~223, 1902.
- 2) 木村二郎：耐圧試験の際に生ずる圓錐形物体内の應力分布及び其の破壊状態に就いて，土木学会誌，Vol. 17, No. 8, pp. 713~731+付録，1931.
- 3) 斉藤秀雄：短円柱および円盤の軸対称変形．機械学会論文集，Vol.18, No.68, pp.21~28, 1952, Vol.20, No.91, pp.185~190, 1954.
- 4) 山口柏樹：弾・塑性力学，森北出版，pp.168~172, 1975.
- 5) 小柿喜治・中島夏樹：中央面および回転軸に対称な荷重を受ける有限円柱の応力解析，*The Science and Engineering Review of Doshisha University*, Vol.23, No. 4, pp. 195~205, 1983.
- 6) 村上敬宣：弾性力学，養賢堂，pp. 5~8, 43~44, 1989.
- 7) Love, A.E.H. : A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity (Fourth Edition), Dover Publications, pp. 274~276, 1944.
- 8) 山田嘉昭・横内康人：有限要素法による弾塑性解析プログラミング，培風館，1981.
- 9) 長松昭男・室田忠雄・神馬敬：軸対称圧縮を受ける材料の摩擦による不均一変形について，*機械学会論文集* (第1部) Vol.36, No.288, pp.1276~1284, 1285~1296, 1970.
- 10) S. H. グランデル, N. C. ダール編 (奥村敦史, 林郁彦訳) : 固体の力学入門, コロナ社, pp. 227~233, 1967.
- 11) 岡田清・六車照編：コンクリートハンドブック，朝倉書店，pp. 427~430, 1981.
- 12) 梶田建夫・秋本昌胤，川本眺万：円柱状せい性材料供試体の一軸圧縮試験における加圧面拘束が変形状態および圧縮強度におよぼす影響について，*土木学会論文報告集*，第166号，pp. 27~38, 1969.
- 13) 畑野正：組合せ圧縮荷重によるコンクリートの変形と破壊，*土木学会論文集*，No.143, pp. 22~27, 1967.
- 14) Gonneman, H.F. : Effect of size and shape of test specimen on compressive strength of concrete, *Proc., American Society for Testing Material, Part II*, pp. 237~255, 1925.
- 15) 奥島正一・小阪義夫：コンクリート供試体の圧縮強度と

加圧面の摩擦との関係について, セメント技術年報, X VI,
pp. 381~385, 1963.

17) 三好俊郎・白鳥正樹: 演習有限要素法, サイエンス社,
pp. 93, 174~175, 1986.

16) 前出 11), pp. 376~380.

(1991.9.5 受付)

ELASTIC ANALYSIS OF A AXI-SYMMETRIC FINITE CYLINDER RESTRAINED TO RADIAL DISPLACEMENT IN LOADING ENDS

Shouhei WATANABE

In the usual compression test of concrete or mortar cylinder, there exists friction in loading ends. Accordingly, radial displacements in these ends are restrained in some extent. Using stress function method with infinite series, elastic analysis of such axi-symmetric cylinder was presented in this paper. Distribution of radial displacement in the ends was given by Fourier-Bessel expansion. Computer results were obtained for some combinations of ratio of height to diameter, confining pressure and degree of restraint. Distributions of stresses, strains and displacements in the cylinder were investigated for several cases.
