

投稿論文 (和文)
PAPERS

骨組構造物の応答感度係数の特性

新延泰生*・松井邦人**・菊田征勇***

感度解析は、最適設計、システム同定、設計改善等、工学問題の広域にわたり重要な役割を有している。これまでに構造物の応答について第1次のみならず高次の感度係数を計算する種々の手法が提案されている。本研究は骨組構造物の静的感度解析について再検討を行い、各次数の感度係数間で基準化した感度係数の総和がある特性値を有することを示し、その応用について述べている。

Keywords: sensitivity analysis, design variables, sensitivity variables, framed structure, higher order sensitivities

1. はじめに

感度解析は、最適設計、システム同定、設計改善等、工学問題の広域にわたり利用されてきている。最適設計の立場から見ると、応力や変位などの制約条件とそれらの設計変数に関する偏微分、すなわち設計感度係数の計算に多大な時間を要することが、最適設計を実務に適用する際の大きな問題点にもなっている。なぜなら、応力、変位を計算するとき、通常FEAが用いられている。そして、最も直接的で、かつ頻繁に用いられる感度解析法は、差分法に基づくものである。このため、最適設計では、数百回、場合によっては数千回の応力、変位の計算が必要となり、それだけの回数FEAを繰り返し行うことは、実務上難しい。

構造最適設計に必要なFEAの回数を軽減するため、2種類の手法が用いられてきている。1つは、近似構造再解析であり、もう1つは、感度解析である。感度解析には、直接法と随伴法とがある。設計変数の数が少ないとき直接法が効率的であり、変数の数が多く、アクティブな制約式の数が少ないとき、また、複数の荷重の組合せに対し最適設計を行うとき、随伴法がより効率的であると考えられる¹⁾。

静的な荷重を受け、線形弾性挙動を示す骨組構造物の感度解析を行う方法は、上記のとおりであり、すでに確立していると考えられている。この際変数として、部材断面積、断面2次モーメントおよびそれらの逆数が用いられている。トラス構造では部材断面積の逆数、はり・ラーメン構造では断面2次モーメントの逆数が部材断面変更後の応力、変位の推定精度が良いことが明らかと

なっている²⁾。感度解析に用いる変数を、設計に関する変数と区別する意味で、ここでは感度変数と呼ぶこととする。

本研究は、骨組構造物の静的感度解析について再度見直しを行い、新しい発見をした結果を記すものである。2章では、骨組構造の応答に関する感度係数を、1次だけでなく高次についても一般式の形で記している。3章では、各次数で、基準化した感度係数の和が特性値を有し、その値は選択した感度変数により異なることを示している。4章では、3章の結果が、高次の感度まで考慮しなくとも、変数の選択により、摂動系の応答の推定精度が向上することを示唆しており、その確認を行っている。5章では、3章の結果の利用例として、従来の方法とは異なる感度係数の求め方を示した。

2. 骨組構造物に対する静的感度解析

変位法による静的な状態方程式は一般に

$$\mathbf{K}(\mathbf{X})\mathbf{z}=\mathbf{F} \dots \dots \dots (1)$$

で与えられる。ここに、 $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \dots, X_m)^T$ は感度変数ベクトル、 $\mathbf{z}=(z_1, z_2, \dots, z_n)^T$ は応答節点変位を表すベクトルで、挙動変数ベクトルと呼ぶ。また $\mathbf{F}=(F_1, F_2, \dots, F_n)^T$ は節点外力ベクトル、 \mathbf{K} は剛性マトリックス($n \times n$)で感度変数 X_i , $i=1, 2, \dots, m$ の関数である。ここでは感度変数としては部材の断面積、断面二次モーメントを示すものとする。従って \mathbf{F} は自重や温度変化の影響を考慮する場合には感度変数の関数となる。

(1) 一次感度解析

感度変数 X_i の変動 δX_i , $i=1, 2, \dots, m$ に対して式(1)は

$$\mathbf{K}\delta\mathbf{z} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} z \delta X_i = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial X_i} \delta X_i \dots \dots \dots (2)$$

となる。ここで、挙動変数ベクトル \mathbf{z} を従属変数と考え、独立な感度変数 \mathbf{X} で表すと $\delta\mathbf{z}$ は $(\partial\mathbf{z}/\partial X_i)\delta X_i$ と表さ

* 正会員 工博 東洋大学助教授 工学部土木工学科
(〒350 川越市鯨井中野台 2100)

** 正会員 Ph.D. 東京電機大学教授 理工学部建設工学科

*** 正会員 工修 国士館大学教授 工学部土木工学科

れるので式(2)は次のようになる。

$$K \frac{\partial z}{\partial X_i} = \frac{\partial F}{\partial X_i} - \frac{\partial K}{\partial X_i} z, (i=1, 2, \dots, m) \dots\dots\dots (3)$$

式(3)において左辺の $\partial z / \partial X_i$ は i 部材の感度変数 X_i の微小変動に対する各節点変位の変動量, すなわち節点変位の感度係数ベクトルを示す。式(3)は式(1)と同じように剛性マトリックスを係数マトリックスとしている。従って, 式(1)より z が求められ式(3)の右边が全て与えられれば, 式(1)を解くサブルーチンを利用することにより $\partial z / \partial X_i$ が計算される。

j 部材の断面力 r_j は

$$r_j = r_{oj}(X) + k_j z_j \dots\dots\dots (4)$$

で表される。右辺の1項目は自重や温度変化による断面力を示し, 2項目は外力による節点変位に伴う断面力を示す。 k_j は j 部材の要素剛性マトリックス, また, z_j は j 部材の節点変位ベクトルを表す。 i 部材の感度変数 X_i の微小変動に対する j 部材の断面力 r_j の感度係数ベクトル $\partial r_j / \partial X_i$ は式(4)より

$$\frac{\partial r_j}{\partial X_i} = \frac{\partial r_{oj}}{\partial X_i} + \frac{\partial k_j}{\partial X_i} z_j + k_j \frac{\partial z_j}{\partial X_i} \dots\dots\dots (5)$$

で示される。

(2) 高次感度解析

式(3)は式(1)の両辺を感度変数 X_i で直接偏微分することにより求められる。さらに, 式(3)の両辺を任意の感度変数で偏微分すれば2次の感度係数に関する方程式が得られる。そして得られた式を任意の感度係数で次々に偏微分していくことにより次に示すような高次感度係数に関する方程式が得られる。

a) 2次感度係数

$$Kz,_{i1i2} = F,_{i1i2} - K,_{i1i2} z - K,_{i1} z_{i2} - K,_{i2} z_{i1} \dots\dots\dots (6)$$

式中の, $i1$ および, $i1i2$ 等は $\partial(\quad) / \partial X_{i1}$ および $\partial^2(\quad) / \partial X_{i1} \partial X_{i2}$ を表す。

b) 3次感度係数

$$Kz,_{i1i2i3} = F,_{i1i2i3} - K,_{i1i2i3} z - K,_{i1i2} z,_{i3} - K,_{i1i3} z,_{i2} - K,_{i2i3} z,_{i1} - K,_{i1} z,_{i2i3} - K,_{i2} z,_{i1i3} - K,_{i3} z,_{i1i2} \dots\dots\dots (7)$$

c) p 次感度係数

$$Kz,_{i1 \dots ip} = F,_{i1 \dots ip} - K,_{i1 \dots ip} z - K,_{i1 \dots ip-1} z,_{ip} - K,_{i1 \dots ip-2ip} z,_{ip-1} \dots - K,_{i2 \dots ip} z,_{i1} - K,_{i1 \dots ip-2Z,_{ip-1ip} - K,_{i1 \dots ip-3ip-1} z,_{ip-2ip} \dots - K,_{i3 \dots ip} z,_{i1i2} \dots - K,_{i1i2} z,_{i3 \dots ip} - K,_{i1i3} z,_{i2i4 \dots ip} \dots - K,_{ip-1ip} z,_{i1 \dots ip-2} - K,_{i1} z,_{i2 \dots ip} - K,_{i2} z,_{i1i3 \dots ip} \dots - K,_{ip} z,_{i1 \dots ip-1} \dots\dots\dots (8)$$

3. 感度係数の特性

節点外力ベクトル F は感度変数 $X_i, i=1, 2, \dots, m$ の関数でないとする, $\partial F / \partial X_i = 0$ となり, 式(3)より i 部材の感度係数 X_i の変動に対する k 番目の自由度に対する節点変位 z_k の感度係数は,

$$\frac{\partial z_k}{\partial X_i} = \left(-K^{-1} \frac{\partial K}{\partial X_i} z \right)_k \dots\dots\dots (9)$$

で表される。右辺の $(\quad)_k$ は第 k 自由度に対応するものを示す。式(9)の両辺に X_i / z_k を乗じ, i について1から m まで総和をとれば

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial z_k}{\partial X_i} \frac{X_i}{z_k} = - \left\{ K^{-1} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial K}{\partial X_i} X_i \right) z \right\}_k \frac{1}{z_k} \dots\dots\dots (10)$$

となる。なお, 上式の左辺 $(\partial z_k / \partial X_i) X_i / z_k$ は無次元化された感度係数となっている。式(10)の右辺の中の $(\quad)_k$ を計算するに際して感度変数 X_i が部材断面の断面二次モーメント I_i を示す場合と断面積 A_i を示す場合に分けて考える。

a) $X_i = I_i$ の場合:

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial K}{\partial X_i} X_i = K \dots\dots\dots (11)$$

式(11)が成立することは剛性マトリックスの要素の構成から明らかである。したがって式(10)は

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial z_k}{\partial X_i} \frac{X_i}{z_k} = - (K^{-1} K z)_k \frac{1}{z_k} = - z_k \frac{1}{z_k} = -1 \dots\dots\dots (12)$$

となる。

b) $X_i = A_i$ の場合:

I_i と A_i との間に

$$I_i = \alpha_i A_i^2 \dots\dots\dots (13)$$

という関係が各部材で成立すると考えれば

$$\frac{\partial K}{\partial X_i} X_i = \frac{\partial K}{\partial A_i} A_i = \frac{\partial K}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial A_i} A_i = \frac{\partial K}{\partial I_i} (2\alpha_i A_i^2) = 2 \frac{\partial K}{\partial I_i} I_i$$

となり, $X_i = A_i$ の場合の式(11)に対応する式として次式を得る。

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial K}{\partial X_i} X_i = 2K \dots\dots\dots (14)$$

したがって

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial z_k}{\partial X_i} \frac{X_i}{z_k} = - (2K^{-1} K z)_k \frac{1}{z_k} = - 2 z_k \frac{1}{z_k} = -2 \dots\dots\dots (15)$$

式(12), (15)は軸変形の影響を無視した任意の骨組構造物に対して成立し, 無次元化感度係数を骨組要素全体について総和したものは定数となることを示している。

上述の感度係数の特性は任意の高次感度係数に対しても成立するが, 定数の値は次数と感度変数の取り方に

よって異なる。2次感度係数の場合を以下に示す。先ず式(6)より

$$\frac{\partial^2 z_k}{\partial X_i \partial X_j} = \left\{ K^{-1} \left(-\frac{\partial K}{\partial X_i} \frac{\partial z}{\partial X_j} - \frac{\partial K}{\partial X_j} \frac{\partial z}{\partial X_i} - \frac{\partial^2 K}{\partial X_i \partial X_j} \right) \right\}_k \dots \dots \dots (16)$$

を得る。両辺に $X_i X_j / z_k$ を乗じ、 i, j について1から m まで総和をとれば

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 z_k}{\partial X_i \partial X_j} \frac{X_i X_j}{z_k} \\ &= \left[K^{-1} \left(-\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial K}{\partial X_i} X_j \frac{\partial z}{\partial X_j} X_i \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial K}{\partial X_j} X_i \frac{\partial z}{\partial X_i} X_j \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial^2 K}{\partial X_i \partial X_j} X_i X_j \right) z \right) \right]_k \frac{1}{z_k} \dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

となる。

c) $X_i = I_i, X_j = I_j$ の場合:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 K}{\partial X_i \partial X_j} X_i X_j = 0 \dots \dots \dots (18)$$

が成立することおよび式(11), 式(12)を考慮すれば式(17)は

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 z_k}{\partial X_i \partial X_j} \frac{X_i X_j}{z_k} = [K^{-1} \{-K(-z) - K(-z)\}]_k \frac{1}{z_k} = 2 \dots \dots \dots (19)$$

となる。

d) $X_i = A_i, X_j = A_j$ の場合:

式(13)の関係を考慮すると

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 K}{\partial X_i \partial X_j} X_i X_j = 2K \dots \dots \dots (20)$$

が成立し、さらに式(14), (15)を考慮すれば式(17)は

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 z_k}{\partial X_i \partial X_j} \frac{X_i X_j}{z_k} \\ &= [K^{-1} \{-2K(-2z) - 2K(-2z) - 2K\}]_k \frac{1}{z_k} = 6 \dots \dots \dots (21) \end{aligned}$$

となる。

以上で得られた式(12), (15), (19), (21)の関係は感度変数 X として断面二次モーメント I または断面積 A を考えた場合である。骨組構造物の感度解析では感度変数の応答に対する線形性を良くするために I または A の逆数すなわち $R_I = 1/I, R_A = 1/A$ を感度変数とすることがよく行われる。この場合、無次元化感度係数の骨組構造物に対する総和を求めるときに、以下の感度変数 X とその逆変数 R_x との関係式を用いれば簡単に求められる。

表-1 無次元化感度係数の骨組全体に対する総和の値

感度次数	感度変数 X			
	I	$R_I = 1/I$	A	$R_A = 1/A$
1	-1	1	-2	2
2	2	0	6	2
3	-6	0	-24	0
4	24	0	120	0
p	$(-1)^p \cdot p!$	0	$(-1)^p \cdot (p+1)!$	0

$$\frac{\partial z_k}{\partial R_{X_i}} = -\frac{\partial z_k}{\partial X_i} X_i^2 \dots \dots \dots (22)$$

$$\frac{\partial^2 z_k}{\partial R_{X_i} \partial R_{X_j}} = \frac{\partial^2 z_k}{\partial X_i \partial X_j} X_i^2 X_j^2 + 2 \frac{\partial z_k}{\partial X_i} \delta_{ij} X_i X_j^2 \dots \dots \dots (23)$$

(δ_{ij} : クロネッカー記号)

任意の p 次感度係数 ($1 \leq p \leq m$) に対する総和の値は次式で表される。

e) $X = I$ の場合:

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_p=1}^m \frac{\partial^p z_k}{\partial X_{i_1} \partial X_{i_2} \dots \partial X_{i_p}} \frac{X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_p}}{z_k} \\ &= (-1)^p p! \dots \dots \dots (24) \end{aligned}$$

f) $X = A$ の場合:

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_p=1}^m \frac{\partial^p z_k}{\partial X_{i_1} \partial X_{i_2} \dots \partial X_{i_p}} \frac{X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_p}}{z_k} \\ &= (-1)^p (p+1)! \dots \dots \dots (25) \end{aligned}$$

式(24), (25)の数学的証明はAppendixに示した。以上で得られた結果をまとめると表-1のようになる。なお、表-1は梁部材に対するものであるが、トラス部材のときは I を A とした場合に相当する。尚、ラーメン部材については軸変形を無視した場合の結果である。

本章で誘導した関係式は、数学的には同次関数に対するオイラーの定理として知られている。表-1に整理したように、なにを感度変数として選択するかにより、同次式の次数が異なってくる。1次の感度係数について、文献2)の15章において、制約式の線形近似に使用されている。

4. 感度変数と応答の推定誤差

感度変数 X が $X = X_0$ (原系) より $X = X_0 + \delta X$ へ変動するとき、変動後の第 k 番目の自由度に対する応答節点変位 z_k は、原系における応答 z_{0k} および感度係数ベクトルを用いて次のように近似的に表される。

$$\begin{aligned} z_k &= z_{0k} + \sum_{i_1=1}^m \left[\frac{\partial z_k}{\partial X_{i_1}} \right]_0 \delta X_{i_1} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \left[\frac{\partial^2 z_k}{\partial X_{i_1} \partial X_{i_2}} \right]_0 \delta X_{i_1} \delta X_{i_2} \\ &+ \frac{1}{6} \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \sum_{i_3=1}^m \left[\frac{\partial^3 z_k}{\partial X_{i_1} \partial X_{i_2} \partial X_{i_3}} \right]_0 \delta X_{i_1} \delta X_{i_2} \delta X_{i_3} \\ &+ \dots \dots \dots (26) \end{aligned}$$

変動後の応答 z_k と原系における応答 z_{0k} との比は式(26)より $\delta X = X - X_0$ として

$$\frac{z_k}{z_{0k}} = 1 + \sum_{i_1=1}^m \left[\frac{\partial z_k}{\partial X_{i_1}} \right]_0 \frac{X_{i_1} - X_{0i_1}}{z_{0k}} + \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \left[\frac{\partial^2 z_k}{\partial X_{i_1} \partial X_{i_2}} \right]_0 \frac{(X_{i_1} - X_{0i_1})(X_{i_2} - X_{0i_2})}{z_{0k}} + \frac{1}{6} \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \sum_{i_3=1}^m \left[\frac{\partial^3 z_k}{\partial X_{i_1} \partial X_{i_2} \partial X_{i_3}} \right]_0 \times \frac{(X_{i_1} - X_{0i_1})(X_{i_2} - X_{0i_2})(X_{i_3} - X_{0i_3})}{z_{0k}} + \dots \dots \dots (27)$$

となる。

今、 $X_{i_1} = S_{i_1} X_{0i_1}$, $X_{i_2} = S_{i_2} X_{0i_2}$, ..., $X_{i_m} = S_{i_m} X_{0i_m}$ と表し、 $S_{i_1} = S_{i_2} = \dots = S_{i_m} = S(i_1, i_2, \dots, i_m = 1, 2, \dots, m)$ の場合を考える。すなわち骨組要素全体について感度変数 X を SX とした場合の応答比 z_k/z_{0k} を考える。ここでは感度変数として 1) I , 2) $R_I = 1/I$, 3) A , 4) $R_A = 1/A$ の各々を考えたとき応答比 z_k/z_{0k} がどのように相違するかを検討する。 S としては感度変数として断面積 A を考えた場合 3) を基準とし $S = A/A_0$ とする。ただし A_0 は原系の断面積を示す。断面二次モーメント I と断面積 A との間には式 (13) の関係があるものとし、さらに $\alpha_i = 1$ とする。したがって各感度変数に対する応答比 z_k/z_{0k} は次のように示される。

a) $X = I$ の場合：

$$\frac{z_k}{z_{0k}} = 1 - (S^2 - 1) + (S^2 - 1)^2 - (S^2 - 1)^3 + \dots + (-1)^p (S^2 - 1)^p + \dots \dots \dots (28)$$

b) $X = R_I = 1/I$ の場合：

$$\frac{z_k}{z_{0k}} = \frac{1}{S^2} \dots \dots \dots (29)$$

c) $X = A$ の場合：

$$\frac{z_k}{z_{0k}} = 1 - 2(S - 1) + 3(S - 1)^2 - 4(S - 1)^3 + \dots + (-1)^p (p + 1) (S - 1)^p + \dots \dots \dots (30)$$

d) $X = R_A = 1/A$ の場合：

$$\frac{z_k}{z_{0k}} = 1 + 2\left(\frac{1}{S} - 1\right) + \left(\frac{1}{S} - 1\right)^2 \dots \dots \dots (31)$$

S として 1.0 (原系) を境に 0.1 きざみで $0.1 \leq S \leq 2.0$ の範囲で応答比 z_k/z_{0k} の値を計算した。その結果を表 2 に示す。表中の 1 次、2 次及び 3 次の欄は各々式 (27) で 1 次、2 次及び 3 次まで考慮した場合の応答比 z_k/z_{0k} の値を示している。表 2 より、感度変数が $R_I = 1/I$ の場合は 1 次の項までで厳密解と一致し、また $R_A = 1/A$ の場合は 2 次の項までで厳密解と一致することがわかる。このことは表 1 で、感度係数の骨組全体の総和の値が、感度変数が $R_I = 1/I$ の場合には第 2 次感度係数以上で 0 となり、式 (27) の応答比 z_k/z_{0k} は 1 次の項だけで示され (式 (29) 参照)、また $R_A = 1/A$ の場合には第 3 次感度係数以上で 0 となり、 z_k/z_{0k} は 2 次の項まで

表 2 応答比 z_k/z_{0k}

S	z_k/z_{0k}					
	1	1/I	A	1/A	真値	
0.1	1次	1.990	100.0	2.800	19.00	100.0
	2次	2.970	100.0	5.230	100.0	
	3次	3.940	100.0	8.146	100.0	
0.2	1次	1.960	25.00	2.600	9.000	25.00
	2次	2.882	25.00	4.520	25.00	
	3次	3.766	25.00	6.568	25.00	
0.3	1次	1.910	11.11	2.400	5.667	11.11
	2次	2.738	11.11	3.870	11.11	
	3次	3.492	11.11	5.242	11.11	
0.4	1次	1.840	6.250	2.200	4.000	6.250
	2次	2.546	6.250	3.280	6.250	
	3次	3.138	6.250	4.144	6.250	
0.5	1次	1.750	4.000	2.000	3.000	4.000
	2次	2.313	4.000	2.750	4.000	
	3次	2.734	4.000	3.250	4.000	
0.6	1次	1.640	2.778	1.800	2.333	2.778
	2次	2.050	2.778	2.280	2.778	
	3次	2.312	2.778	2.536	2.778	
0.7	1次	1.510	2.041	1.600	1.857	2.041
	2次	1.771	2.041	1.870	2.041	
	3次	1.903	2.041	1.978	2.041	
0.8	1次	1.360	1.563	1.400	1.500	1.563
	2次	1.490	1.563	1.520	1.563	
	3次	1.536	1.563	1.552	1.563	
0.9	1次	1.190	1.235	1.200	1.222	1.235
	2次	1.226	1.235	1.230	1.235	
	3次	1.233	1.235	1.234	1.235	
1.0	1次	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	2次	1.000	1.000	1.000	1.000	
	3次	1.000	1.000	1.000	1.000	
1.1	1次	0.790	0.826	0.800	0.818	0.826
	2次	0.834	0.826	0.830	0.826	
	3次	0.825	0.826	0.826	0.826	
1.2	1次	0.560	0.694	0.600	0.667	0.694
	2次	0.754	0.694	0.720	0.694	
	3次	0.668	0.694	0.688	0.694	
1.3	1次	0.310	0.597	0.400	0.539	0.597
	2次	0.786	0.597	0.670	0.597	
	3次	0.458	0.597	0.562	0.597	
1.4	1次	0.040	0.510	0.200	0.429	0.510
	2次	0.962	0.510	0.680	0.510	
	3次	0.077	0.510	0.424	0.510	
1.5	1次	-0.250	0.444	0.000	0.333	0.444
	2次	1.313	0.444	0.750	0.444	
	3次	-0.640	0.444	0.250	0.444	
1.6	1次	-0.560	0.391	-0.200	0.250	0.391
	2次	1.874	0.391	0.880	0.391	
	3次	-1.922	0.391	0.016	0.391	
1.7	1次	-0.890	0.346	-0.400	0.177	0.346
	2次	2.682	0.346	1.070	0.346	
	3次	-4.069	0.346	-0.302	0.346	
1.8	1次	-1.240	0.309	-0.600	0.111	0.309
	2次	3.778	0.309	1.320	0.309	
	3次	-7.462	0.309	-0.728	0.309	
1.9	1次	-1.610	0.277	-0.800	0.053	0.277
	2次	5.202	0.277	1.630	0.277	
	3次	-12.57	0.277	-1.286	0.277	
2.0	1次	-2.000	0.250	-1.000	0.000	0.250
	2次	7.000	0.250	2.000	0.250	
	3次	-20.00	0.250	-2.000	0.250	

で示される (式 (31) 参照) ことから導かれる。

表 2 全般から応答推定値の精度は、選択する感度変数に依存し、 $R_I = 1/I$, $R_A = 1/A$, A , I とする順で低下することがわかる。とくに断面積を増加させる場合、感度変数を I あるいは A とするとき応答推定値が振動し、 I と A では I の方がその変動が激しい。すなわち、式 (27)

で一般的に p 次の項まで考慮するとき、感度変数を I とする場合は、式 (28) から $S \geq \sqrt{2}$ のとき応答比 z_k/z_{0k} は振動しながら発散し、また感度変数を A とする場合は、式 (30) から $S \geq 2$ のとき z_k/z_{0k} は振動しながら発散することがわかる。

なお、以上で述べたことは軸変形の影響を無視した任意の骨組構造物で成立し、任意の節点変位の応答に対して言えることである。

5. 静定構造と不静定構造における感度解析

本章では、骨組構造物の感度解析が静定構造と不静定構造とにおいてどのように相違するか、について接続マトリックスの概念を用いて先ず述べる。なお、静定構造であれば、その変位は断面 2 次モーメントの逆数に比例し、変位の 2 次感度係数は 0 となることは明らかであるが、ここでは静定構造と不静定構造とにおける感度解析の相違を明らかにするために両方の場合の感度係数を解析的に誘導している。

(1) 応答節点変位の 2 次感度係数

第 k 番目の自由度に対する応答節点変位 z_k の 2 次感度係数は式 (6) より次のように示される。

$$\frac{\partial^2 z_k}{\partial X_{i1} \partial X_{i2}} = \left\{ K^{-1} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial X_{i1} \partial X_{i2}} - \frac{\partial^2 K}{\partial X_{i1} \partial X_{i2}} z - \frac{\partial K}{\partial X_{i1}} \frac{\partial z}{\partial X_{i2}} - \frac{\partial K}{\partial X_{i2}} \frac{\partial z}{\partial X_{i1}} \right) \right\}_k \dots\dots\dots (32)$$

節点外力ベクトル F は感度変数ベクトル X に関して独立な場合を考え、感度変数として $X=R_I=1/I$ とすると $\partial^2 F / \partial X_{i1} \partial X_{i2} = 0$ となり、また式 (22), (23) から

$$\frac{\partial K}{\partial X_{i1}} = -\frac{\partial K}{\partial I_{i1}} I_{i1}^3 \dots\dots\dots (33)$$

$$\frac{\partial K}{\partial X_{i2}} = -\frac{\partial K}{\partial I_{i2}} I_{i2}^3 \dots\dots\dots (34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K}{\partial X_{i1} \partial X_{i2}} &= \frac{\partial^2 K}{\partial I_{i1} \partial I_{i2}} I_{i1}^2 I_{i2}^2 + 2 \frac{\partial K}{\partial I_{i1}} \delta_{i1i2} I_{i1}^3 \\ &= 2 \frac{\partial K}{\partial I_{i1}} \delta_{i1i2} I_{i1}^3 \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

が得られる。なお式 (35) の右辺の第 1 項は剛性マトリックス K の各要素が $I_i (i=1, 2, \dots, m)$ の線形結合として表されることから 0 となることは明らかである。式 (32) 中の $\partial z / \partial X_{i1}$, $\partial z / \partial X_{i2}$ は式 (3) および式 (33), (34) から $\partial F / \partial X_{i1} = \partial F / \partial X_{i2} = 0$ として

$$\frac{\partial z}{\partial X_{i1}} = -K^{-1} \frac{\partial z}{\partial X_{i1}} z = K^{-1} \frac{\partial z}{\partial I_{i1}} I_{i1}^3 z \dots\dots\dots (36)$$

$$\frac{\partial z}{\partial X_{i2}} = -K^{-1} \frac{\partial z}{\partial X_{i2}} z = K^{-1} \frac{\partial z}{\partial I_{i2}} I_{i2}^3 z \dots\dots\dots (37)$$

のように表される。したがって式 (33)~(37) より式 (32) は

$$\frac{\partial^2 z_k}{\partial X_{i1} \partial X_{i2}} = \left(-2K^{-1} \frac{\partial K}{\partial I_{i1}} \delta_{i1i2} I_{i1}^3 z \right.$$

$$\begin{aligned} &+ K^{-1} \frac{\partial K}{\partial I_{i1}} I_{i1}^3 K^{-1} \frac{\partial K}{\partial I_{i2}} I_{i2}^3 z \\ &+ K^{-1} \frac{\partial K}{\partial I_{i2}} I_{i2}^3 K^{-1} \frac{\partial K}{\partial I_{i1}} I_{i1}^3 z \Big)_k \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

となる。

剛性マトリックス K は接続マトリックス C を用いて

$$K = CK_m C^T \dots\dots\dots (39)$$

のように示される⁴⁾。ここでマトリックス K_m は骨組各要素の部材座標系で表される要素剛性マトリックス k_j (j 部材) を対角要素とする対角マトリックスである。接続マトリックス C は要素の接続状態を示すもので感度変数とは独立なものである。したがって $\partial K / \partial I_{i1}$ あるいは $\partial K / \partial I_{i2}$ は以下の式となる。

$$\frac{\partial K}{\partial I_{i1}} = C \frac{\partial K_m}{\partial I_{i1}} C^T \dots\dots\dots (40)$$

$$\frac{\partial K}{\partial I_{i2}} = C \frac{\partial K_m}{\partial I_{i2}} C^T \dots\dots\dots (41)$$

接続マトリックスは不静定構造の場合は長方形マトリックスとなるが、静定構造の場合は非特異な正方マトリックスとなる。したがって静定構造の場合、逆マトリックス K^{-1} は

$$K^{-1} = (CK_m C^T)^{-1} = (C^{-1})^T K_m^{-1} C^{-1} \dots\dots\dots (42)$$

と表される。上式右辺の K_m^{-1} は部材の要素たわみ性マトリックスを成分とする対角マトリックスである。

ここで式 (42) が成立する場合すなわち静定構造に対して式 (38) の右辺がどのようになるかを $i_1 \neq i_2$ および $i_1 = i_2$ の場合に分けて考える。

a) $i_1 \neq i_2$ の場合：

先ず第 1 項は $\delta_{i1i2} = 0$ であるので常に 0 となる。第 2 項は式 (40), (41) および式 (42) を用いて

$$\begin{aligned} K^{-1} \frac{\partial K}{\partial I_{i1}} I_{i1}^3 K^{-1} \frac{\partial K}{\partial I_{i2}} I_{i2}^3 z \\ = (C^{-1})^T K_m^{-1} \frac{\partial K_m}{\partial I_{i1}} I_{i1} K_m^{-1} \frac{\partial K_m}{\partial I_{i2}} I_{i2} I_{i1} I_{i2} C^T z \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

と示される。式中の $K_m^{-1} (\partial K_m / \partial I_{i1}) I_{i1}$ および $K_m^{-1} (\partial K_m / \partial I_{i2}) I_{i2}$ はそれぞれ i_1 要素および i_2 要素に対応する対角要素が単位マトリックスで他の対角要素が 0 の対角マトリックスとなる。したがって $i_1 \neq i_2$ の場合はそれらの積は 0 となるのがわかる。同様にして第 3 項も 0 となるので式 (38) の右辺は $i_1 \neq i_2$ の場合 0 となるのがわかる。

b) $i_1 = i_2 = i$ の場合：

この場合式 (38) は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z_k}{\partial X_i^2} &= \left(-2K^{-1} \frac{\partial K}{\partial I_i} I_i^3 z + 2K^{-1} \frac{\partial K}{\partial I_i} I_i K^{-1} \frac{\partial K}{\partial I_i} I_i I_i^2 z \right) \\ &= \left\{ -2(C^{-1})^T K_m^{-1} \frac{\partial K_m}{\partial I_i} I_i C^T I_i^2 z \right. \end{aligned}$$

$$+2(C^{-1})^T K_m^{-1} \frac{\partial K_m}{\partial I_i} I_i K_m^{-1} \frac{\partial K_m}{\partial I_i} I_i C^T I_i^2 z \} \quad (44)$$

a) の $i_1 \neq i_2$ の場合で述べたように $K_m^{-1}(\partial K_m / \partial I_i) I_i$ が i 要素に対応する対角要素が単位マトリックスで他の対角要素が 0 の対角マトリックスであることから式(44) 右辺の { } 内は常に 0 となる。

以上から静定構造に対しては応答節点変位の 2 次感度係数は感度変数として $X=R_I=1/I$ とした場合に常に 0 となる。一方不静定構造に対しては接続マトリックス C が長方形マトリックスとなり式(42) が成立しない。したがって不静定構造に対しては応答節点変位の 2 次感度係数は一般的に 0 とはならない。しかし 3. で述べたように感度変数として $X=R_I=1/I$ とした場合、無次元化された応答節点変位の 2 次感度係数の骨組全体についての総和は 0 となる。

(2) 特性式の感度解析への適用例

a) 静定構造

(1) で静定構造に対して感度変数としては $X=R_I=1/I$ とした場合、応答節点変位の 2 次感度変数が常に 0 となることが導かれたが、これは 1 次感度係数が感度変数と独立な定数となることを意味している。このことと 3. で述べた感度係数の特性を利用して応答節点変位の感度係数が求められることを示す。

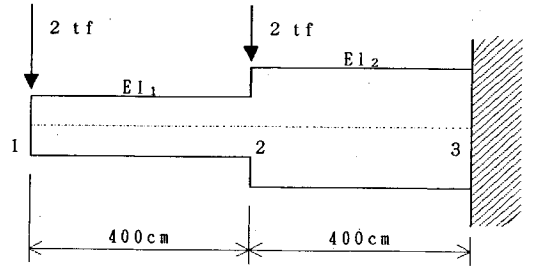
表一より感度変数として $X=R_I=1/I$ とした場合

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial z_j}{\partial X_i} \frac{X_i}{z_j} = \sum_{i=1}^m z_{j,i} \frac{X_i}{z_j} = 1 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (45)$$

が成立するただし $z_{j,i} = \partial z_j / \partial X_i$ である。上で述べたように感度係数 $z_{j,i}$ は定数で感度変数 $X_i = R_{I_i} = 1/I_i$ すなわち I_i とは無関係である。 m 組の既知の感度変数の値 $X_{i(1)}, X_{i(2)}, \dots, X_{i(m)}$, ($i=1, 2, \dots, m$) に対して m 組の応答節点変位 $z_{j(1)}, z_{j(2)}, \dots, z_{j(m)}$, ($j=1, 2, \dots, n$) を計算しておく、式(45)より感度係数 $z_{j,i}$ を決定する次の連立 1 次方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} X_{1(1)} & X_{2(1)} & \dots & X_{m(1)} \\ X_{1(2)} & X_{2(2)} & \dots & X_{m(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1(m)} & X_{2(m)} & \dots & X_{m(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{2,1} & \dots & z_{n,1} \\ z_{1,2} & z_{2,2} & \dots & z_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{1,m} & z_{2,m} & \dots & z_{n,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{1(1)} & z_{2(1)} & \dots & z_{n(1)} \\ z_{1(2)} & z_{2(2)} & \dots & z_{n(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{1(m)} & z_{2(m)} & \dots & z_{n(m)} \end{bmatrix} \quad (46)$$

上式を解いて得られる感度係数 $z_{j,i}$ は感度変数として $X_i = R_{I_i} = 1/I_i$ としているが、他の感度変数に対する感度係数は式(22)および式(13)を用いて容易に換算することができる。



図一 2 要素片持ばり

表一 $X_{i(1)}, X_{i(2)}$ および v_1, v_2 の値

ケース	I_1 (cm ⁴)	I_2 (cm ⁴)	v_1 (cm)	v_2 (cm)
1	25000	25000	8.53333	2.84444
2	25000	50000	4.67302	1.42222

以下に簡単な数値計算例を示す。図一に示す 2 要素片持ばりの節点 1 および 2 における鉛直変位 v_1 および v_2 の感度係数を求める。感度変数として $X_i = R_{I_i} = 1/I_i$ を考え、2 組の既知の感度変数値 $X_{i(1)}, X_{i(2)}$ ($i=1, 2$) に対して 2 組の v_1, v_2 を計算した結果を表一に示す。ただし表では X_i の代わりに $I_i = 1/X_i$ で示されている。

したがって表一の数値をもとにして式(46)を書くと以下の式となる。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{25000} & \frac{1}{25000} \\ \frac{1}{25000} & \frac{1}{50000} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{2,1} \\ z_{1,2} & z_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.53333 & 2.84444 \\ 4.67302 & 1.42222 \end{bmatrix} \quad (47)$$

式(47)を解くことにより $z_{1,1} = \partial v_1 / \partial X_1 = 20317.5$, $z_{1,2} = \partial v_1 / \partial X_2 = 193015.9$, $z_{2,1} = \partial v_2 / \partial X_1 = 0$, $z_{2,2} = \partial v_2 / \partial X_2 = 71111.1$ を得るが、この値は式(9)の右辺を計算したものと一致する。ここで、最初に与える感度変数の値は任意でよく、すなわち式(46)の右辺の係数マトリックスは任意に直ちに与えることができる。ただし係数マトリックスが特異とならないように $X_{i(1)}, \dots, X_{i(m)}$ を与える必要がある。

b) 不静定構造

応答感度係数が荷重に対して線形である性質と応力法の考え方を基に応答感度係数が求められる。静定基本系に対して外力 F および単位の大さの不静定力 $Q_k = 1$ による応答感度係数は a) で述べた方法より得られる。従って応答感度係数の荷重に対する線形性から重ね合わせの理論を用いて外力 F と不静定力 Q_k に対する応答節点変位 z_j の感度変数 X_i (この場合 $X = R_I = 1/I$ または $X = R_A = 1/A$ とする) に対する感度係数は次のように表される。

$$\frac{\partial z_j}{\partial X_i} = \left(\frac{\partial z_j}{\partial X_i} \right)_F + \sum_{k=1}^l \left(\frac{\partial z_j}{\partial X_i} \right)_{Q_k=1} \cdot Q_k \quad (48)$$

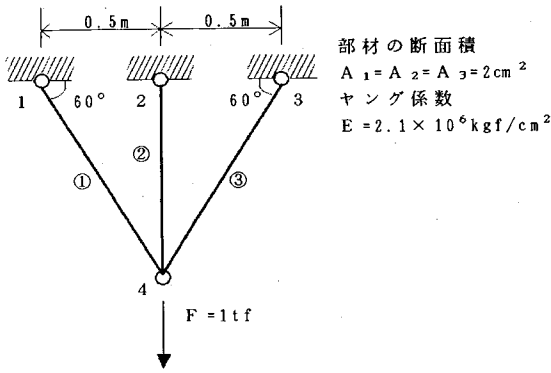


図-2 3部材不静定トラス

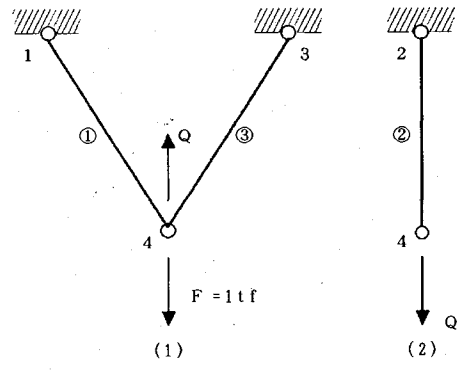


図-3 静定基本系

上式の右辺の第1項は外力 F による静定基本系の応答感度係数を示し、第2項は単位の大さきの不静定力 $Q_k = 1$ による静定基本系の応答感度係数を示す。従って式 (48) は静定基本系の外力 F および不静定力 Q による任意の節点変位の感度係数を表している。次に式 (45) より得られる

$$z_j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial z_j}{\partial X_i} X_i \dots\dots\dots (49)$$

の右辺の $\partial z_j / \partial X_i$ に式 (48) を代入し、不静定力 Q が作用する節点における変位の適合条件式を導く。誘導された適合条件式の未知数は不静定力 Q だけなので直接解くことにより不静定力 Q が求められるが、不静定力 Q を含めて部材断面力は通常の影響解析により得られるので適合条件は不静定力 Q の感度係数 $\partial Q_k / \partial X_i$ を求めるものに用いられる。

以上より原系の不静定構造系の節点変位の感度係数は

$$\frac{\partial z_j}{\partial X_i} = \left(\frac{\partial z_j}{\partial X_i} \right)_F + \sum_{k=1}^l \left(\frac{\partial z_j}{\partial X_i} \right)_{Q_k=1} \cdot Q_k + \sum_{k=1}^l \frac{\partial z_j}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial X_i} \dots\dots\dots (50)$$

で示される。式 (50) の右辺の第1項及び第2項は式 (48) の静定基本系に対する感度係数を示し、第3項目は不静定力 Q の変動による感度係数の変動を表している。

以下に3部材不静定トラスの数値計算例を通して前述した考え方を説明する。

図-3 (1) の静定基本系に対して節点4の鉛直変位 v_4 の感度係数 $\partial v_4 / \partial X_i (i=1, 2, 3)$ は式 (48) より次のように示される。

$$\frac{\partial v_4}{\partial X_1} = \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_1} \right)_F + \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_1} \right)_{Q=1} \cdot Q$$

$$= 1.58730 \times 10^{-2} - 1.58730 \times 10^{-5} Q \dots\dots\dots (51)$$

$$\frac{\partial v_4}{\partial X_3} = \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_3} \right)_F + \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_3} \right)_{Q=1} \cdot Q$$

$$= 1.58730 \times 10^{-2} - 1.58730 \times 10^{-5} Q \dots\dots\dots (52)$$

同様に図-3 (2) の静定基本系に対する v_4 の感度係数は式 (48) より

$$\frac{\partial v_4}{\partial X_2} = \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_2} \right)_{Q=1} \cdot Q = 4.12393 \times 10^{-5} Q \dots\dots\dots (53)$$

で示される。式 (49) の関係を用いて節点4における変位の適合条件式は次式で表される。

$$\frac{\partial v_4}{\partial X_1} X_1 + \frac{\partial v_4}{\partial X_3} X_3 = \frac{\partial v_4}{\partial X_2} X_2 = v_4 \dots\dots\dots (54)$$

式 (51), (52) を代入して

$$\left\{ \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_1} \right)_F + \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_1} \right)_{Q=1} \cdot Q \right\} X_1$$

$$+ \left\{ \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_3} \right)_F + \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_3} \right)_{Q=1} \cdot Q \right\} X_3$$

$$= \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_2} \right)_{Q=1} \cdot Q X_2 = v_4 \dots\dots\dots (55)$$

上式より不静定力 Q を求めると $Q = 434, 96$ kgf を得る。なお、前述したようにこの不静定力の計算は感度係数を求める過程では不必要である。適合条件式 (55) の両辺を感度係数 $X_i (i=1, 2, 3)$ で偏微分することにより不静定力 Q の感度係数 $\partial Q / \partial X_i (i=1, 2, 3)$ が得られる。すなわち

$$\left\{ \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_1} \right)_F + \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_1} \right)_{Q=1} \cdot Q \right\} + \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_1} \right)_{Q=1} \cdot X_1 \frac{\partial Q}{\partial X_1}$$

$$+ \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_3} \right)_{Q=1} \cdot X_3 \frac{\partial Q}{\partial X_1} = \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_2} \right)_{Q=1} \cdot X_2 \frac{\partial Q}{\partial X_1}$$

$$\left(\frac{\partial v_4}{\partial X_1} \right)_{Q=1} \cdot X_1 \frac{\partial Q}{\partial X_2} + \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_3} \right)_{Q=1} \cdot X_3 \frac{\partial Q}{\partial X_2}$$

$$= \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_2} \right)_{Q=1} \cdot Q + \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_2} \right)_{Q=1} \cdot X_2 \frac{\partial Q}{\partial X_2}$$

$$\left(\frac{\partial v_4}{\partial X_1} \right)_{Q=1} \cdot X_1 \frac{\partial Q}{\partial X_3} + \left\{ \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_3} \right)_F + \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_3} \right)_{Q=1} \cdot Q \right\}$$

$$+ \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_3} \right)_{Q=1} \cdot X_3 \frac{\partial Q}{\partial X_3} = \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_2} \right)_{Q=1} \cdot X_2 \frac{\partial Q}{\partial X_3} \dots\dots\dots (56)$$

これらの式の $Q, X_i, (\partial v_4 / \partial X_i)_{Q=1} (i=1, 2, 3)$ に数値を代入することにより $\partial Q / \partial X_1 = 245.770, \partial Q / \partial X_2 = -491.539, \partial Q / \partial X_3 = 245.770$ を得る。

以上から図-2 の3部材不静定トラスに対する節点4の鉛直変位 v_4 の感度係数 $\partial v_4 / \partial X_i (i=1, 2, 3)$ は式 (50)

より以下のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_4}{\partial X_1} &= \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_1} \right)_F + \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_1} \right)_{q=1} \cdot Q \\ &\quad + \left\{ \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_1} \right)_{q=1} X_1 + \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_3} \right)_{q=1} \cdot X_3 \right\} \frac{\partial Q}{\partial X_1} \\ \frac{\partial v_4}{\partial X_2} &= \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_2} \right)_{q=1} Q + \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_2} \right)_{q=1} \cdot X_2 \frac{\partial Q}{\partial X_2} \\ \frac{\partial v_4}{\partial X_3} &= \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_3} \right)_F + \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_3} \right)_{q=1} \cdot Q \\ &\quad + \left\{ \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_1} \right)_{q=1} X_1 + \left(\frac{\partial v_4}{\partial X_3} \right)_{q=1} \cdot X_3 \right\} \frac{\partial Q}{\partial X_3} \end{aligned} \right\} \dots (57)$$

式中の右辺第3項の{ }を示す $\partial v_4 / \partial Q$ は式(55)より得られる。 $\partial v_4 / \partial X_i (i=1, 2, 3)$ の数値を代入することにより、 $\partial v_4 / \partial X_1 = 5.06771 \times 10^{-3}$ 、 $\partial v_4 / \partial X_2 = 7.80225 \times 10^{-3}$ 、 $\partial v_4 / \partial X_3 = 5.06771 \times 10^{-3}$ を得る。これらの値は通常の感度解析法による値として一致している。節点4の水平変位 u_4 の感度係数 $\partial u_4 / \partial X_i (i=1, 2, 3)$ も同様にして求められ、 $\partial u_4 / \partial X_1 = 1.55345 \times 10^{-2}$ 、 $\partial u_4 / \partial X_2 = 0$ 、 $\partial u_4 / \partial X_3 = 1.55345 \times 10^{-2}$ を得る。

(3) 部材断面力の1次感度係数

部材断面力 r_j (j 部材) の感度変数 X_i による1次感度係数は式(5)で表される。ここで自重や温度変化による影響を無視すれば式(5)は

$$\frac{\partial r_j}{\partial X_i} = \frac{\partial k_j}{\partial X_i} z_j + k_j \frac{\partial z_j}{\partial X_i} \dots (58)$$

となる。静定構造の場合は一般に

$$\frac{\partial r_j}{\partial X_i} = 0 \dots (59)$$

となるが、このことは次のようにして導かれる。式(58)の右辺第2項の $\partial z_j / \partial X_i$ を式(9)で表現し、式(42)を考慮すると

$$\frac{\partial r_j}{\partial X_i} = \frac{\partial k_j}{\partial X_i} z_j + k_j \left\{ -(C^{-1})^T K_m^{-1} \frac{\partial K_m}{\partial X_i} C^T z_j \right\} \dots (60)$$

が得られる。上式右辺の第2項は k_j を { }_j の中へ入れて整理すると $-(\partial k_j / \partial X_i) z_j$ となり、式(60)の右辺は0となることがわかる。またこのことは感度変数の如何に拘らず成立する。一方不静定構造の場合は式(42)が成立しないので、 $\partial r_j / \partial X_i$ は式(60)のように表現することができず、一般的に0とはならない。

3. で応答節点変位の感度係数の特性について述べたが、以下に上記の部材断面力の1次感度係数に対して同様な特性を導くことにする。

無次元化された部材断面力の1次感度係数の骨組全体の総和は

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial r_{j,i}}{\partial X_i} \frac{X_i}{r_{j,i}} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial k_j}{\partial X_i} z_j + k_j \frac{\partial z_j}{\partial X_i} \right) \frac{X_i}{r_{j,i}} \dots (61)$$

で表される。なお $r_{j,i}$ は j 部材の断面力ベクトル r_j の第

l 要素を示す。式(61)において右辺の ()_j の中の $\partial z_j / \partial X_i$ を式(9)で表現し、感度変数としてここでは $X_i = I_i$ とすると

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \frac{\partial r_{j,i}}{\partial X_i} \frac{X_i}{r_{j,i}} &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial k_j}{\partial X_i} z_j \right) \frac{X_i}{r_{j,i}} + \sum_{i=1}^m \left\{ -K^{-1} \frac{\partial k_j}{\partial X_i} z_j \right\} \frac{X_i}{r_{j,i}} \\ &= (k_j z_j)_i \frac{1}{r_{j,i}} + (k_j (-z_j))_i \frac{1}{r_{j,i}} = 0 \dots (62) \end{aligned}$$

となる。他の感度変数に対しても同様に0となることが式(13)、(14)および式(22)を用いて得られる。式(62)は、静定構造の場合は式(59)より成立することは明らかであるが、不静定構造の場合に対しても成立する関係式である。

5. おわりに

本研究では、平面骨組構造物の静的線形問題を例にとり、感度解析より得られる応答感度係数を原系(現構造系)の応答値と感度変数値を用いて無次元化した応答感度係数の構造物全体の総和が常に定数となる性質を誘導した。感度変数としては、通常の骨組構造物の設計あるいは構造解析で、設計変数あるいは解析変数として用いられる部材の断面積 A 、断面二次モーメント I およびそれらの逆数の4種類を考えている。

次に、感度変数の値を変動させた場合の構造物の応答の変動を感度係数を用いて推定する場合、感度変数のとり方と応答推定の精度について、本研究で得られた無次元化した応答感度係数の特性を用いて述べている。

また、骨組構造物を静定構造物と不静定構造物に分け、それぞれの場合で応答感度係数の誘導およびそれらの特性について接続マトリックスの概念を用いて述べている。

そしてこの特性を利用して感度係数が求められることを静定構造の場合と不静定構造の場合に分けて示した。

今後は、以上の内容を種々の構造モデルに対して、また、固有値問題さらに動的応答問題へ発展させる予定である。

最後に、本論文原稿を作成するにあたり東京電機大学大学院学生佐藤直俊君に多大なご協力をいただいた。ここに記して感謝の意を表します。

Appendix

ここでは本文3.の式(24)および式(25)の数学的証明を帰納法により行う。

(1) 感度係数 X が I の場合の式(24)の証明

この場合は剛性マトリックス K の感度変数 X による2次以上の微分は0となることから、本文2.の式(8)の右辺は最後の p 項のみが残る。

したがって

$$S_p = \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \dots \sum_{i_p=1}^m \frac{\partial^p z_k}{\partial X_{i_1} \partial X_{i_2} \dots \partial X_{i_p}} \frac{X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_p}}{z_k} \dots \dots (1)$$

とおき、本文3. の式 (11) を考慮すれば

$$S_p = -p S_{p-1} \dots \dots \dots (2)$$

が得られる。いま

$$S_{p-1} = (-1)^{p-1} (p-1)! \dots \dots \dots (3)$$

が成立するものとすれば、式 (2) の右辺の S_{p-1} へ式 (3) を代入して $S_p = -p(-1)^{p-1}(p-1)! = (-1)^p p!$ を得る。

(証明終)

(2) 感度変数 X が A の場合の式 (25) の証明

この場合は剛性マトリックス K の感度変数 X による微分は3次以上が0となるので、本文2. の式 (8) の右辺は K の X による1次微分を含む最後の p 項に加えて、 K の X による2次微分を含む $p(p-1)/2$ 項が残る。したがって本文3. の式 (14) および式 (20) を考慮すれば

$$S_{p-2} = -p(p-1)S_{p-2} - 2pS_{p-1} \dots \dots \dots (4)$$

が得られる。いま

$$S_{p-2} = (-1)^{p-2} (p-1)! \dots \dots \dots (5)$$

$$S_{p-1} = (-1)^{p-1} p! \dots \dots \dots (6)$$

が成立するものとすれば、式 (4) の右辺の S_{p-2} および S_{p-1} へそれぞれ式 (5) および式 (6) を代入して

$$\begin{aligned} S_p &= -p(p-1)(-1)^{p-2}(p-1)! - 2p(-1)^{p-1}p! \\ &= (-1)^{p-2}(p+1)! \\ &= (-1)^p(p+1)! \end{aligned}$$

を得る。

(証明終)

参 考 文 献

- 1) Haftka, R. P. and Kamat, M. P. : Elements of Structural Optimization, Martinus Nijhoff Publishers, 1985.
- 2) 山田善一編：構造システムの最適化—理論と応用—, 構造工学シリーズ1, 土木学会, 1988.
- 3) 山田善一・大久保禎二監訳：最適構造設計—概念・方法・応用—丸善, 1983.
- 4) R. K. リブスレイ・山田嘉昭・川井忠彦共訳：マトリックス構造解析入門, 培風館, 1968.

(1991. 5. 28 受付)

CHARACTERISTICS IN SENSITIVITY COEFFICIENTS OF FRAMED STRUCTURES

Yasuo NIINOBE, Kunihito MATSUI and Yukio KIKUTA

Sensitivity analysis has been playing an important role not only on optimal structural design but also various design modifications which are encountered in engineering practice. Various methods to compute not only first order but also higher order sensitivities of a structural response have been proposed in the past. Choosing a cross sectional area, moment of inertia of cross section or their reciprocals as a design variable, a partial derivative of the response with respect to a design variable is called a sensitivity coefficient.

This study reexamines the sensitivity computations and found characteristics that first and higher order sensitivity coefficients possess. Also from the characteristics, an accuracy of sensitivity analysis is discussed.

Finally an alternative method to compute structural sensitivity is presented.