投稿論文(和文ノート)
TECHNICAL NOTE

土木学会論文集 No. 449／Ⅳ-17, pp. 223-226, 1992. 7

ネットワーク接続行列のランクについて

赤松　隆*・桑原雅夫**

本研究は，一般ネットワークにおける経路・リンク接続行列の階数を分析したものである．この行列の階数は，ネットワーク・フロー問題に関わる種々の分析において重要な役割を果たすにもかかわらず，その基本特性が正確に知られていなかった．そこで，本研究では，その階数をフロー保存則との関係から議論し，一般的に，（全リンク数—OD ノード数を除く全ノード数）によって求められることが結論される．

Keywords : *path-link incidence matrix, rank, flow conservation*

1. はじめに

ネットワーク構造の行列表現は，ネットワーク問題を分析するための重要な方法のひとつである．この行列表現には，①(ノード）隣接行列，②リンク・ノード接続行列，③閉路行列，④経路・リンク接続行列，などいくつかの方法がある．①②③はネットワーク構造自体を分析する場合によく用いられ，その性質はグラフ理論のテキスト[1)-3)]等でも示されている．④は経路選択に関連した多くのネットワーク・フロー問題の分析において重要な役割を果たす．例えば，交通配分の分解計算，混雑料金設定問題[4)]，リンク交通量からの OD 交通量推定問題[5)]では，この行列の階数（rank）は，推定される経路交通量や OD 交通量等の解の唯一性を吟味する上で欠かすことのできない情報となる．

この行列の性質を分析した研究としては宮城[6)]の研究があるが，本研究で扱っている行列とは少し定義が異なっており，本稿で扱うような接続行列の一般的性質は，著者等の知る限り正確には知られていないようである．

そこで本ノートでは，一般ネットワークにおける経路・リンク接続行列の階数をネットワークフローの保存則と関連づけて説明する．

以下では，まず分析の前提を述べ，第3節で簡単な1 OD ペアネットワークでの階数を導く．そして第4節において Many to Many の場合へと拡張し，最後に，これらの結果の考察と注意すべき点についての議論を行う．

2. 分析の前提

本ノートで前提とするネットワークは，有限のノード集合 V，有向リンク集合Eから成る連結グラフである．以下では V の要素数を N, E の要素数を L と書く．ノード集合 V は，フローの涌き出しのある起点の集合 V_R，吸い込みのある終点の集合 V_S，フローが通過するのみの中間ノード集合 V_T の3つの部分集合から成る．

OD ペアは，V_R(要素数 R）に含まれるノード r と V_S（要素数 S）に含まれるノード s から作り得るノード・ペア（r, s）の集合のうち，有向リンクに従って到達可能な全てのノード・ペアである．

経路は，通常のグラフ理論における path の定義どおりのノード・リンクの系列である．ただし，同じノードを2度以上通らない simple path のみに限定する．さらに，上で定義した OD ペア間の全ての経路を経路集合として考える．この定義による経路集合の要素数を K と書く．

また，上の経路集合の経路に含まれないノード，リンクは V, E から除去されているとして分析する．

3. OD ペアが1つの場合

経路・リンク接続行列 Δ は，以下のような要素：

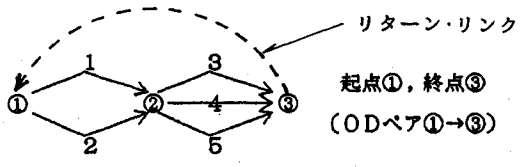
$$\delta_{lk}=\begin{cases}1 & \text{：経路 } k \text{ にリンク } l \text{ が含まれる}\\ 0 & \text{：その他}\end{cases}$$

を l 行 k 列にもつ $L\times K$ 行列である．この行列を用いると経路交通量ベクトル $\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_k,\cdots,f_K)^T$ とリンク交通量ベクトル $\boldsymbol{X}=(x_1,\cdots,x_a,\cdots,x_L)^T$ は以下の関係式で結ばれる．

$$\Delta\boldsymbol{f}=\boldsymbol{X} \quad\cdots\cdots(1)$$

これは，例えば図—1のようなネットワークを考えると，以下のようになる（・は0を表す）．

* 正会員　工博　野村総合研究所（株）
（〒103　東京都中央区日本橋 1-9-1）
** 正会員　Ph. D　東京大学生産技術研究所　助教授



図—1　例題ネットワーク—1 OD ペア

$$\begin{array}{c} \\ L \end{array}\overset{K}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

我々は，この行列 Δ の階数の一般的性質を求めたいわけであるが，その定義あるいは式（1）から直接求めることは難しい．そこで，以下に述べる様な変換を施したネットワークの接続行列を分析し，それを用いて Δ の階数を導くことにする．

いま，OD ペアの終点から起点に戻る“リターン・リンク”をもとのネットワークに付加する．そして，全てのフローは，起点から終点へ流れた後，このリターン・リンクを通って起点へ戻ると考える．このように考えれば，リターン・リンクの交通量は OD 交通量 q となり，q を通常のリンクフローと同様に扱うことができる．

この変換ネットワークの経路・リンク接続行列 $\hat{\Delta}$ は，Δ にリターン・リンクに関する行を足したものとなる．リターン・リンクは全ての経路が通過するから，この新たに付加された行の要素は全て 1 である．この変換ネットワークでは，リンク交通量ベクトル $\hat{\boldsymbol{X}}$ と経路交通量ベクトル $\boldsymbol{f}$ の関係は以下のように表される．

$$\hat{\Delta}\boldsymbol{f}=\hat{\boldsymbol{X}} \cdots\cdots (2)$$

ここで，$\hat{\boldsymbol{X}}$ は $\boldsymbol{X}$ に OD 交通量 q を付加した列ベクトルである．これは例えば図—1 の変換ネットワークでは，以下のようになる．

$$\begin{array}{c} \\ L \\ \\ \\ \\ ③\to① \end{array}\overset{K}{\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \hline q \end{bmatrix}$$

接続行列 $\hat{\Delta}$ の階数はもとのネットワーク接続行列 Δ の階数と等しい．なぜなら，もとのネットワークの全経路が通過するカットが必ず存在し，そのカットに含まれるリンクに対応する Δ の行をすべて足せば $\hat{\Delta}$ の $L+1$ 行目（リターン・リンクに対応する行）となるからである．従って，$\hat{\Delta}$ の階数がわかれば，Δ の階数も同時に求められることになる．

さて，式（2）はもとのネットワークでの経路交通量を用いたフロー保存則：

$$\Sigma_p f_p = q \cdots\cdots (3)$$

を含んでいる．従って，式（2）が成り立つなら，次の様な変換ネットワークにおけるノードでのフロー保存則：

$$\hat{A}\hat{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{0} \cdots\cdots (4)$$

が成り立つ（付録参照）．ここで $\hat{A}$ は変換ネットワークの $N\times(L+1)$ のノード・リンク接続行列である．この式は図—1 の変換ネットワークでは以下のように書ける．

$$\begin{array}{c} \\ N \end{array}\overset{L \qquad\qquad 1}{\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \hline q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

リターン・リンクを付加したネットワークのノード数はもとのネットワークと同じく N 個であるから，行列 $\hat{A}$ の階数は $N-1$ である．従って方程式（4）のうち独立な方程式数は $N-1$ 個である．一方，未知変数 $\hat{\boldsymbol{X}}$ の個数は $L+1$ 個だから，式（4）において値を任意に決められる変数の個数は $L+1-(N-1)=L-N+2$ 個である．

ところで，式（2）が成り立つなら式（4）が成り立つから方程式（2）における $\hat{\boldsymbol{X}}$ は式（4）を満たさなければならない．従って方程式（2）の右辺は，$L-N+2$ 個の要素の値を決めれば残りの要素はフロー保存則から“自動的に”決まることになる．すなわち，方程式（2）の線形独立な方程式数は $L-N+2$ 個であり，

$$\mathrm{rank}\,\hat{\Delta}=L-N+2$$

よって，経路・リンク接続行列 Δ の階数は，

$$\mathrm{rank}\,\Delta=\mathrm{rank}\,\hat{\Delta}=L-(N-2) \cdots\cdots (5)$$

$$=(\text{リンク数})-(\text{OD ノードを除いたノード数})$$

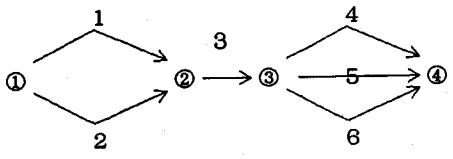
となることがわかる．

4.　起点，終点ともに複数（Many to Many）の場合

起点が R 個，終点が S 個ある場合の経路・リンク接続行列 Δ は，各 OD ペアについて定義される Δ を全 OD ペアについて横に並べたものである．そして，経路交通量とリンク交通量の関係は，

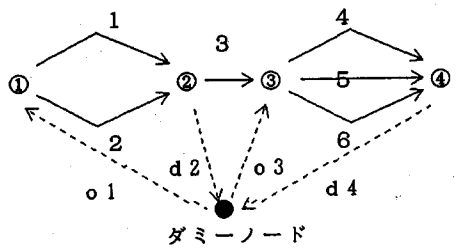
$$\Delta\boldsymbol{f}=\boldsymbol{X} \cdots\cdots (6)$$

となる．例えば図—2 のネットワークでは次の様になる．



起点①と③，終点②と④
ＯＤペア①→②，①→④，③→④

図—2 例題ネットワーク—Many to Many



図—3 変換ネットワーク

$$
\begin{array}{c}
\\ L \updownarrow \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc}
\leftarrow K12 \rightarrow & & \leftarrow & & K14 & & & \rightarrow & \leftarrow & K34 & \rightarrow
\end{array} \\
\left[\begin{array}{cc:ccccc:ccc}
1 & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\
\hdashline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 \\
\cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c}
f_1^{12} \\ f_2^{12} \\ \hdashline f_1^{14} \\ f_2^{14} \\ f_3^{14} \\ f_4^{14} \\ f_5^{14} \\ f_6^{14} \\ \hdashline f_1^{34} \\ f_2^{34} \\ f_3^{34}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \hdashline o_1 \\ d_2 \\ o_3 \\ d_4
\end{array}
$$

ここで，f_p^{rs}：ODペア rs の p 番目経路の交通量．

1ODペアの場合と同様，Δ の階数を式（6）から直接導くことは難しい．そこで，以下のような変換を施したネットワークの接続行列 $\hat{\Delta}$ を分析し，それを用いて Δ の階数を導くことにする．ただし，以下の説明では煩雑さを避けるため，起点かつ終点となっているノードはないものとする（起点かつ終点となっているノードは適当なネットワーク変換により起点と終点に分離できるから一般性は失われない）．

まず，1個のダミー・ノードを付加する．そして，そのノードと発生交通量のあるノード，集中交通量のあるノードを結ぶ流入・流出リンクを付加する．例えば，図—2のネットワークは，図—3の様に変換される．

この変換ネットワークの接続行列 $\hat{\Delta}$ は，起点へ戻るリンク，終点から出るリンクに対応する行を Δ に付加した行列となる．この $\hat{\Delta}$ を用いると，変換ネットワークでの経路交通量とリンク交通量の関係は以下のように書ける．

$$\hat{\Delta} f = \hat{X} \quad \cdots\cdots (7)$$

ここで，$\hat{X}$ は X にダミーリンクの交通量（i.e. 発生，集中交通量）ベクトルを付加した列ベクトルである．例えば図—3の変換ネットワークでは以下の様になる．

$$
\begin{array}{c}
\\ L \updownarrow \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc}
\leftarrow K12 \rightarrow & & \leftarrow & & K14 & & & \rightarrow & \leftarrow & K34 & \rightarrow
\end{array} \\
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ \\ \\ \\ \bullet\rightarrow① \\ ②\rightarrow\bullet \\ \bullet\rightarrow③ \\ ④\rightarrow\bullet
\end{array}
\left[\begin{array}{cc:ccccc:ccc}
1 & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\
\hdashline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 \\
\cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c}
f_1^{12} \\ f_2^{12} \\ \hdashline f_1^{14} \\ f_2^{14} \\ f_3^{14} \\ f_4^{14} \\ f_5^{14} \\ f_6^{14} \\ \hdashline f_1^{34} \\ f_2^{34} \\ f_3^{34}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \hdashline o_1 \\ d_2 \\ o_3 \\ d_4
\end{array}
$$

ここで，o_i：ノード i からの発生交通量，

d_i：ノード i への集中交通量，

接続行列 $\hat{\Delta}$ の階数は元のネットワークの接続行列 Δ の階数と等しい．なぜなら，起点から流出するリンクに対応する Δ の行の和から流入リンクの行の和を引けば $\hat{\Delta}$ の起点へ入るダミーリンクに対応する行となり，また，終点へ流入するリンクに対応する Δ の行の和から流出リンクの行の和を引けば，$\hat{\Delta}$ の終点から出るダミーリンクに対応する行となるからである．

さて，式（7）は，次のようなフローの保存則：

$$\sum_s \sum_p f_p^{rs} = o_r, \quad \sum_r \sum_p f_p^{rs} = d_s \quad \cdots\cdots (8\,\mathrm{a, b})$$

を含んでいる．ただし，r は起点，s は終点を表す．従って，式（7）を満たすリンク交通量は以下の様な変換ネットワークにおけるノードでのフロー保存則：

$$\hat{A}\hat{X} = \mathbf{0} \quad \cdots\cdots (9)$$

を満たす．ここで，$\hat{A}$ は変換ネットワークでのリンク・ノード接続行列．これは例えば図—3のネットワークでは以下の様になる．

$$
\begin{array}{c}
\\ N \updownarrow \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc}
\leftarrow & & & & L & & & \rightarrow & 1 & 2 & 3 & 4
\end{array} \\
\begin{array}{c}
① \\ ② \\ ③ \\ ④ \\ \\ 1\ \bullet
\end{array}
\left[\begin{array}{cc:cccc:cccc}
1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
-1 & -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & -1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & -1 & -1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\
\hdashline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & 1 & -1
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c}
x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \hdashline o_1 \\ d_2 \\ o_3 \\ d_4
\end{array}
=
\begin{array}{c}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{array}
$$

変換ネットワークではノード数が$N+1$個であるから行列$\hat{A}$の階数は（ノード数）$-1=N$である．すなわち，方程式（9）の独立な方程式数はN個である．一方，未知変数$\hat{X}$の個数は$L+R+S$個だから，式（9）において値を任意に決められる変数の個数は$(L+R+S)-N=L-(N-R-S)$個である．

式（7）なら式（9）が成立するから，方程式（9）における$\hat{X}$はフロー保存式（9）を満たさなければならない．従って式（7）の独立な方程式数は，値を任意に決められる$\hat{X}$の要素数で，$L-(N-R-S)$個となる．すなわち，

$$\mathrm{rank}\,\hat{\Delta}=L-(N-R-S)$$

よって，Δの階数は以下のようになることがわかる．

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}\,\Delta&=\mathrm{rank}\,\hat{\Delta}\\&=L-(N-R-S)\cdots\cdots(10)\\&=(\text{リンク数})-(\text{ODノードを除いたノード数})\end{aligned}$$

なお，起点が1つで終点が複数の場合（One to Many）には，Δの階数は式（10）で$R=1$とおいたものとなる．つまり，この場合にもΔの階数は(リンク数)−(ODノードを除いたノード数）によって求められる．

5. 考　　察

以上の議論から，ODペアの個数によらず，Δの階数は（リンク数)−(ODノードを除いたノード数）となることがわかった．ただし，この結論には注意すべき前提条件がある．それはODペアの定義に関するものである．

我々が前提としたODペアの定義によらず，考え得る全てのODペアのうち一部分のみをODペアとして設定した場合には，我々の定義によるΔの一部分のみを取り出したものを考えることになる．従って，そのΔの階数も我々の結論とは異なったものとなる．

例えば，図—3の構造のネットワークでは，考え得る全ODペアは①→②，①→④，③→④である．ここで，仮に，ODペアを①→②，③→④のみに限定して考えたとしよう．すると，そのODペア設定の際に，ネットワーク構造のみからは分からない以下の情報：

$$o_1=d_2=q_{12},\ o_3=d_4=q_{34}$$

を付加することになる．これは，より一般的な場合には，

$$\sum_p f_p^{rs}=q_{rs}\cdots\cdots(11)$$

というODペア毎の情報を与えることになる．フロー保存式（11）が成り立つ場合には，起点別のリンク交通量に関するフロー保存則：

$$\boldsymbol{AX}^r=\boldsymbol{q}^r\cdots\cdots(12)$$

が成立しなければいけない．ここで，$\boldsymbol{X}^r$は起点をrとするリンク交通量，$\boldsymbol{q}^r$は起点rではo_r，終点sでは$-q_{rs}$，その他のノードでは0の要素を持つ列ベクトル．従って，我々が上で分析した式（9）以下の議論は出来ない．その結果，対応したΔの階数は我々の定義によるΔとは異なってくるのである．

付録：式（2)→式（4）について

変換ネットワークにおけるノード・リンク接続行列と経路・リンク接続行列(もとのネットワークの閉路行列）の積は一般的に以下のようになる．

$$\hat{A}\hat{\Delta}=0\cdots\cdots(\mathrm{A}1)$$

ここで，右辺の0は全ての要素が0の$N\times K$行列．従って，式（2）が成立するなら，

$$\begin{aligned}\hat{A}\hat{X}&=\hat{A}\hat{\Delta}\boldsymbol{f}\cdots\cdots(\text{式（2）})\\&=0\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}\cdots\cdots(\text{式（A1）})\end{aligned}$$

となり，式（4）が成り立つ．

参　考　文　献

1) R.G.バサッカー他：グラフ理論とネットワーク，培風館，1970.
2) 小野寺力男：グラフ理論の展開と応用，森北出版，1973.
3) 伊理正夫 他：グラフ・ネットワーク・マトロイド，産業図書，1986.
4) 赤松隆・桑原雅夫：確率的利用者均衡条件下での最適混雑料金，土木学会論文集 No. 389，pp. 121～129，1988.
5) 赤松隆・高木淳：観測リンク交通量からのネットワーク均衡コスト推定法，土木計画学研究講演集 No. 12，pp. 527～534，1989.
6) 宮城俊彦：交通ネットワーク均衡の理論と計算法に関する基礎的研究，京都大学学位論文，1982. 5.

(1991. 7. 16受付)

ON THE RANK OF A NETWORK INCIDENCE MATRIX

Takashi AKAMATSU and Masao KUWAHARA

This paper analyses the rank of a path-link incidence matrix ; that is, the number of independent link flows given all path flows. Although, in network analysis, the path-link incidence matrix is commonly used to define the structure of a transportation network, its fundamental properties have not been well studied. We, therefore, discuss the rank of the matrix based on the flow conservation at each of the nodes. This study generally concludes that the rank is equal to the number of links minus the number of nodes exclusive of origin or destination nodes.