

平面測量網の図形調整結果を用いた Free Networkの解法

森 忠次*・町田憲一**

測量網の誤差の評価には、観測量の誤差の事後推定値のみならず、測点座標の誤差も確かめておく必要がある。この誤差は free network 解によって評価すればよいが、図形調整法を用いた場合には、その成果から free network 解を誘導する方法が示されていなかった。そこで平面測量網を例にとって、これが簡単に実行できることを示した。この方法は各種の測量や変形調査に有効に利用できるはずである。

Keywords : free network, control survey, adjustment, error, method of least squares

1. 緒 言

全く新規の測量においても、改測や変動調査の測量に際しても、そのときどきに実施した測量自身の誤差を知っておくことは重要である。このときに測点座標の誤差を算出したりこれを他の測量例と比較しようとする場合には、free network 解を用いればよい。なぜなら、free network 解は、観測残差の重みつき 2 乗和を最小とする解を得るときに、測点座標誤差の 2 乗和を最小とするという条件を付加した解^{1),2)}だからである。

Free network 解の算出方法はこれまでに数多く発表されているが、この解を求める方法の 1 つとして、まず測量網の図形調整を行い、その結果を用いて free network 解の算出できることの例を、著者等はすでに示した³⁾。その方法の長所は、観測量の誤差、観測量の最確値の誤差、測点座標の誤差等が順次算出されること、測点数に比べて条件式数の少ない測量網に適すること、論旨と計算方法が簡単なことなどである。

その論文においては、距離を測った平面測量網の場合に限定していたので、本論文では、提案した方法が平面測量網全体について適用可能であることを示す。すなわち、①角および距離を測った一般の測量網、②角のみしか測らない特殊な測量網などにも適用できること、③さらには既設の基準点に新測量網を当てはめる方法としては、すでに示した方法（図形の相似変換）以外に、図形調整で得た結果を基準点群に直接当てはめる方法も可能であることを示す。なお計算例をあげて解法の特徴と単純な測量網の誤差の状態を明らかにする。

以上によって、ここで提案した方法は、平面測量網に限らずあらゆる基準点測量網の free network 解を求め

るのに適用できることがわかるであろう。

free network という用語の定義が必ずしも明確でないので、著者らは次のように考えることにした。“free network 解は、(a) その測量網のすべての測点座標の誤差の 2 乗和を最小にするものであって、(b) 同時に全測点の重心を原点とする座標系に基づくものである。”場合によっては、既設の基準点ごとに異なった重みを与えた free network 解が考えられることがあるが^{4),5),6)}、このような解は、本論文で記した free network 解とは違った解となるので、ここでは論じない。

2. Free Network 解を求める基本式

(1) 仮定と最少拘束解

前報に従ってつきの仮定をおく。①平面測量網であつて、②角及び距離を観測し、③それらは互いに独立であつて、④観測値の分散が既知であるとする。そのうえ、⑤外部からの拘束条件はなく、⑥任意に選んだ座標系に基づいた図形調整は終わっていて、⑦観測量等の最確値の分散共分散行列が算出済みであるとする。

1 つの測量網を観測したとき、外部からの拘束がなければその測量網を任意の座標系に固定するためには、平面測量網においては、観測量以外に最少限つぎの量を指定しなければならない。

距離を測った場合は 3 つの座標関連量（たとえば 1 点の座標および 1 測線の方向）

距離を測っていない場合は 4 つの座標関連量（たとえば 1 点の座標、1 測線の方向および距離）

このようにして、最少限の拘束のもとで任意の座標系に固定した最小二乗解を、最少拘束解と呼ぶことにする。そうすると、前記の⑤～⑦は最少拘束解のことである。

このような最少拘束解を求める際に使用する記号は、つきのようであるとする。

観測量 : I , 観測量の最確値 : \hat{I}

* 正会員 工博 岡山大学教授 工学部土木工学科
(〒700 岡山市津島中 3 丁目)

** 正会員 寒河江工業高等学校教諭 土木科

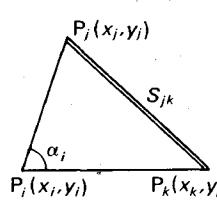


Fig.1

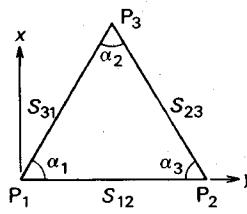


Fig.2

残差: $v = l - \hat{l}$, 観測量の重み行列: P 観測量の分散共分散行列: $\Sigma = P^{-1}\sigma^2$ $\sigma_0^2 = v^T Pv / r$, 条件式数: r 観測量等の cofactor 行列: Q_{ii} 観測量等の最確値の分散共分散行列: $\Sigma_{ii} = Q_{ii}\sigma_0^2$ 最少拘束解の測点座標: x

なお、本論文でいう free network とは当該測量網に外部から拘束が加えられない場合を対象としているから、その測点座標は測点群の重心を座標原点とした値となる³⁾。その座標をつぎのように表す。

free network 解の測点座標: \hat{x}

(2) 条件と基本式

最少拘束条件のもとで図形調整が終わった測量網がすでに得られているとすると、その free network 解は、測点座標が移動してもすでに得られた測量網の形と寸法を保たなければならない^{注1)}。平面測量においては、その条件はつぎの2種類に分けられる。

その第1は角に関する条件である。たとえば Fig.1において角 α_i が観測されていて、図形調整の結果、最少拘束解の最確値 $\hat{\alpha}_i$ とその標準誤差 σ_i がすでにわかっているとすると、角に関するつぎの条件を成立させねばよい。

$$\Psi_\alpha = \tan^{-1} \frac{\hat{y}_k - \hat{y}_i}{\hat{x}_k - \hat{x}_i} - \tan^{-1} \frac{y_k - y_i}{x_k - x_i} - \hat{\alpha}_i = 0 \quad (1)$$

その第2は距離に関する条件である。たとえば、Fig.1に示す測線長 S_{jk} が観測されていて、最少拘束解の最確値 \hat{S}_{jk} とその標準誤差 σ_{jk} がわかっているとすると、測線長に関するつぎの条件を成立させねばよい。

$$\Psi_s = (\hat{x}_k - \hat{x}_j)^2 + (\hat{y}_k - \hat{y}_j)^2 - \hat{S}_{jk}^2 = 0 \quad (2)$$

上記の2式はいずれも $\hat{x}^T = (\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{x}_j, \dots)$ に関して非線形であるから、近似値（最少拘束解） x と補正 δx を用いて、

$$\hat{x} = x + \delta x \quad (3)$$

とおいて、 δx に関する線形の式に直すことにする。その結果はつぎのとおりである。

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha &= (a_{ik} - a_{ii})\delta x_i + (b_{ik} - b_{ii})\delta y_i + a_{ii}\delta x_i \\ &\quad + b_{ii}\delta y_i - a_{ik}\delta x_k - b_{ik}\delta y_k + \alpha_i - \hat{\alpha}_i = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

注1) 後述のように、角のみしか観測しない場合には、寸法が不定であるから、寸法を定めるために1つの距離を仮定しなければならない。

ここに、

$$a_{ii} = \frac{y_j - y_i}{S_{ij}^2}, \quad b_{ij} = -\frac{x_j - x_i}{S_{ij}^2}, \quad S_{ij}^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2,$$

$$\alpha_i = \tan^{-1} \frac{y_k - y_i}{x_k - x_i} - \tan^{-1} \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}, \quad \text{など}$$

ただし、 x_i, y_i などは最少拘束解の座標であるから、 $\alpha_i = \hat{\alpha}_i$ となる。

$$\Psi_s = c_{jk}\delta x_j + d_{jk}\delta y_j - c_{jk}\delta x_k - d_{jk}\delta y_k + S_{jk} - \hat{S}_{jk} = 0 \quad (5)$$

ここに、

$$c_{jk} = -\frac{x_k - x_j}{S_{jk}}, \quad d_{jk} = -\frac{y_k - y_j}{S_{jk}},$$

$$S_{jk} = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}$$

ただし、 $S_{jk} = \hat{S}_{jk}$ となる。

式(4)および(5)の中から必要かつ十分なものを選び、それらをまとめて次のように書く。

$$\Psi = B\delta x + (l - \hat{l}) = 0 \quad (6)$$

ただし、 $l = \hat{l}$ となる。

当該の測量網に対して外部から拘束条件がない場合には、求める free network 解は条件(6)のもとで、次式を満足するものである。

$$\hat{x}^T \hat{x} = \min \quad (7)$$

この解はつぎのようである³⁾。

$$\delta x = B^T (BB^T)^{-1} Bx - B^T (BB^T)^{-1} (l - \hat{l}) \quad (8)$$

$$\hat{x} = x + \delta x \quad (9)$$

$$Q_{\hat{x}\hat{x}} = B^T (BB^T)^{-1} Q_{ii} (BB^T)^{-1} B \quad (10)$$

$$\Sigma_{\hat{x}\hat{x}} = Q_{\hat{x}\hat{x}} \sigma_0^2 \quad (11)$$

式(4)でわかるように、係数 B は座標差で与えられるため、近似値 x に定数が加わっても B の値は不変である。このことは6.の計算例で確かめられる。

3. 角と距離とを測った場合の Free Network 解

角と距離とを測った場合には、それらの観測値についての誤差を指定しなければ最少拘束解が得られない。そこで、本論文では断わりのないかぎりつぎのような観測誤差を有する場合を対象にする。

角の観測の標準誤差: $\sigma_\alpha = \sigma$ (一定値) (12)距離 $S = sS_0$ の観測の標準誤差: $\sigma_s = sS_0\sigma$ (13)ここに、 $s = S/S_0$, S_0 は基準距離

以下には簡単な例によって free network 解の求め方の解説と、結果の特徴の説明を行う。

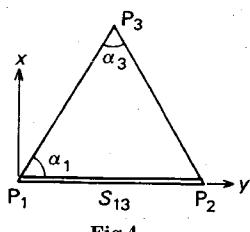
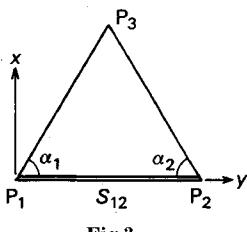
(1) 正三角形に関する基本的な関係

最少拘束解を求めるときの座標系は、Fig.2に示すように、点 P_1 を原点とし、 $\overline{P_1P_2}$ を y 軸に選ぶものとする。

1辺 sS_0 の正三角形を観測したものとすると、最少拘束

Table 1 Coordinates of Stations in a regular triangle [unit: sS_0]

x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
0	0	0	1	$\sqrt{3}/2$	$1/2$



解の測点座標は **Table 1** のようになる。

計算をはじめるまえに、参考のために、すべての角と測線について、図形調整によって得られた最少拘束解の形状寸法を変えないという条件式を書き並べるとつぎのとおりである。

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1 : & \frac{1}{2} \frac{1}{sS_0} (\delta x_1 + \sqrt{3} \delta y_1 - 2 \delta x_2 + \delta x_3 - \sqrt{3} \delta y_3) \\ & + \alpha_1 - \hat{\alpha}_1 = 0 \quad \dots \quad (14a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_2 : & \frac{1}{2} \frac{1}{sS_0} (-2 \delta x_1 + \delta x_2 - \sqrt{3} \delta y_2 + \delta x_3 + \sqrt{3} \delta y_3) \\ & + \alpha_2 - \hat{\alpha}_2 = 0 \quad \dots \quad (14b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_3 : & \frac{1}{2} \frac{1}{sS_0} (\delta x_1 - \sqrt{3} \delta y_1 + \delta x_2 + \sqrt{3} \delta y_2 - 2 \delta x_3) \\ & + \alpha_3 - \hat{\alpha}_3 = 0 \quad \dots \quad (14c) \end{aligned}$$

$$\hat{S}_{12} : \frac{1}{2} (-\delta y_1 + \delta y_2) + S_{12} - \hat{S}_{12} = 0 \quad \dots \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_{23} : & \frac{1}{2} (-\sqrt{3} \delta x_2 + \delta y_2 + \sqrt{3} \delta x_3 - \delta y_3) \\ & + S_{23} - \hat{S}_{23} = 0 \quad \dots \quad (15b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_{13} : & \frac{1}{2} (-\sqrt{3} \delta x_1 - \delta y_1 + \sqrt{3} \delta x_3 + \delta y_3) \\ & + S_{13} - \hat{S}_{13} = 0 \quad \dots \quad (15c) \end{aligned}$$

本節の以下の計算においては、三角形の形状寸法を変えないためには、これらの式の中から 3 つのみ（ただし 1 つ以上は距離条件であること）を選べばよい。

(2) 2 角と 1 測線を測った正三角形の場合（図形条件あり）

a) 観測距離に誤差のない場合

Fig.3において、 α_1 、 α_2 および S_{12} を観測し、 S_{12} には誤差がないと仮定する場合の例を示そう。この場合は図形調整を行う必要がない。

形状不变の条件として、 $\hat{\alpha}_1$ 、 $\hat{\alpha}_2$ および \hat{S}_{12} をとりあげることにすると、式 (14a)、(14b) および (15a) を用いればよい。これらの式をまとめて式 (6) の形に書くと、式 (6) の係数行列 B はつぎのようになる。

Table 2 Q_{ff} in minimum constraint solutions

(a) Case of Fig.3 and Eq.(16)

$\hat{\alpha}_1$	1	0	0
$\hat{\alpha}_2$	0	1	0
\hat{S}_{12}	0	0	0

(b) Case of Fig.3 and Eq. (17)

$\hat{\alpha}_1$	1	-1	0
$\hat{\alpha}_3$	-1	2	0
\hat{S}_{12}	0	0	0

Table 3 Coordinates of the free network solution unit : sS_0

\hat{x}_1	\hat{y}_1	\hat{x}_2	\hat{y}_2	\hat{x}_3	\hat{y}_3
$-\sqrt{3}/6$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/3$	0

Table 4 Q_{ff} in the free network solutions unit : $s^2 S_0^2 / 108$

(a) Case of Fig.3	\hat{x}_1	30	$\text{tr}(Q) = 1.556 \times 108$
	\hat{y}_1	$2\sqrt{3}$	
	\hat{x}_2	18	
	\hat{y}_2	$-2\sqrt{3}$	
	\hat{x}_3	30	
	\hat{y}_3	2	

(b) Case of Fig.4	\hat{x}_1	39	$\text{tr}(Q) = 1.222 \times 108$
	\hat{y}_1	$7\sqrt{3}$	
	\hat{x}_2	5	
	\hat{y}_2	-3	
	\hat{x}_3	$3\sqrt{3}$	
	\hat{y}_3	15	

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -2 & 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ -2 & 0 & 1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} [sS_0]^{-1} \quad [1] \quad \dots \quad (16)$$

このときに使用する最少拘束解の cofactor は **Table 2** (a) のとおりである。

以上の条件のもとで、 $\hat{x}^T \hat{x} = \min.$ を満足する解 \hat{x} を求めると、**Table 3** に示すように測点群の重心を座標原点とする free network 解が得られ、その測点の cofactor は、式 (10) によって計算すると、**Table 4** (a) に示す値となる。

同じ観測を行った場合において、上記と異なった形状不变条件を用いても、同じ free network 解が得られるかどうかを確かめてみよう。

たとえば、もし角 $\hat{\alpha}_2$ の代わりに $\hat{\alpha}_3$ を採用したとしよう。そうすると、条件式は $\hat{\alpha}_1$ 、 $\hat{\alpha}_3 = \pi - \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2$ および \hat{S}_{12} を採用することになるから、係数 B は次式となり、cofactor は **Table 2** (b) のようになる。

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -2 & 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} [sS_0]^{-1} \quad [1] \quad \dots \quad (17)$$

このような場合について計算しても **Table 3** および **4**

Table 5 Q_{ii} in minimum constraint solutions

(a) Case of Fig.3 and Eq.(16) (b) Case of Fig.4 and Eq. (16)

$\hat{\alpha}_1$	1	0	0
$\hat{\alpha}_2$	0	1	0
\hat{S}_{12}	0	0	$s^2 S_0^2$

$\hat{\alpha}_1$	1	-1	0
$\hat{\alpha}_2$	-1	2	0
\hat{S}_{12}	0	0	$s^2 S_0^2$

Table 6 Q_{xx} in the free network solutions [unit : $s^2 S_0^2$]

(a) Case of Fig.3	\hat{x}_1	.361			
	\hat{y}_1	.176	.268	$\text{tr}(\mathbf{Q})=2.556$	
	\hat{x}_2	.251	.113	.361	
	\hat{y}_2	-.113	-.232	-.176	.268
	\hat{x}_3	-.612	-.289	-.612	.289 1.223
	\hat{y}_3	-.064	-.037	.064	-.037 0 .074

(b) Case of Fig.4	\hat{x}_1	.444			
	\hat{y}_1	.256	.296	$\text{tr}(\mathbf{Q})=2.222$	
	\hat{x}_2	.056	.097	.222	
	\hat{y}_2	-.033	-.204	-.192	.296
	\hat{x}_3	-.500	-.353	-.278	.224 .778
	\hat{y}_3	-.224	-.092	.096	-.092 .128 .184

(a) と同じ結果を得る。

Fig.4 のように α_1 , α_3 および S_{12} を測った場合をとりあげよう。座標系を前の例と同じようにすると、 x は Table 1 と同じである。条件式として式 (17) を用いると、 Q_{ii} は Table 2 (a) において角を $\hat{\alpha}_2$ の代わりに $\hat{\alpha}_3$ とすればよい。こうして free network 解を求めた結果の測点座標 x は Table 3 と等しく Q_{xx} は Table 4 (b) のようになる。Table 4 (a) と (b) によれば、両者とも距離を与えた測線の向いに存在する測点の座標誤差が大きい。また測点の Q_{xx} のトレースは (a) の方が (b) よりも大きい。

b) 観測距離に誤差のある場合

上記 a) の例において測線距離の観測値に式 (13) で示した誤差がある場合をとりあげる。正三角形の 1 測線の距離が sS_0 の場合を考えているから、距離誤差は $sS_0\sigma$ である。上記と同様につきの 2 例の計算結果を示そう。

角 α_1 , α_2 および測線長 S_{12} を測ったとき

角 α_1 , α_3 および測線長 S_{12} を測ったとき

これらの両者とも角 $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$ および測線 \hat{S}_{12} を用いて条件式を作ることにしてみよう。 \mathbf{B} は式 (16) は等しくなる。一方、最少拘束解の最確値の cofactor は距離に関するものが、Table 5 (a), (b) のようになる。

この場合も free network 解の測点座標は Table 3 と同じである。 Q_{xx} は Table 6 (a), (b) のようになり、 Q_{xx} のトレースは距離誤差のない場合 (Table 4 参照) に比べて $s^2 S_0^2$ だけに大きくなっている。

(3) 3 角と 1 測線を測った正三角形 (図形条件あり)

3 角全部を測り、距離は Fig.5 のように測線 S_{12} しか測っていない場合をとりあげる。図形調整の結果によれ

Table 7 Q_{ii} in minimum constraint solutions in case of Fig.5

(a) without distance error (b) with distance error

$\hat{\alpha}_1$	2/3	-1/3	0
$\hat{\alpha}_2$	-1/3	2/3	0
\hat{S}_{12}	0	0	$s^2 S_0^2$

$\hat{\alpha}_1$	2/3	-1/3	0
$\hat{\alpha}_2$	-1/3	2/3	0
\hat{S}_{12}	0	0	$s^2 S_0^2$

Table 8 Q_{xx} in the free network solutions in case of Fig.5 [unit : $s^2 S_0^2$]

(a) without distance error

\hat{x}_1	.130			
\hat{y}_1	.032	.018	$\text{tr}(\mathbf{Q})=0.667$	
\hat{x}_2	.019	-.032	.130	
\hat{y}_2	.032	.019	-.032	.018
\hat{x}_3	-.148	0	-.148	0 .297
\hat{y}_3	-.064	-.037	.064	-.037 0 .074

(b) with distance error

\hat{x}_1	.213			
\hat{y}_1	.177	.269	$\text{tr}(\mathbf{Q})=1.667$	
\hat{x}_2	.102	.112	.213	
\hat{y}_2	-.112	-.231	-.177	.269
\hat{x}_3	-.315	-.288	-.315	.288 .630
\hat{y}_3	-.064	-.037	.064	-.037 0 .074

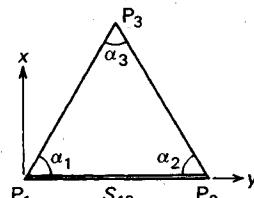


Fig.5

ば角の最確値の cofactor は周知のように 2/3 となる。一方、観測した距離と角との間には相関がないので、観測測線長と角との間の cofactor は 0 である。

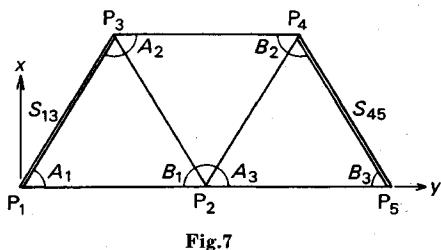
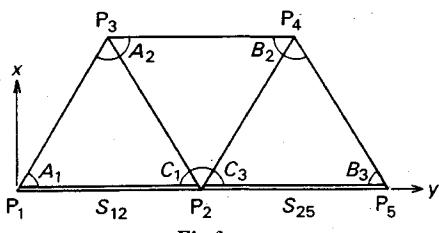
a) 観測距離に誤差のない場合

free network 解を求めるのに、たとえば、角 $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$ および測線の距離 \hat{S}_{12} を用いて条件式を作ったとする。係数 \mathbf{B} は式 (16) に等しい。 S_{12} に誤差がないとするから、 Q_{ii} は Table 7 (a) のようになる。free network 解を求めた結果は、測点座標はやはり Table 3 と同じであり、 Q_{xx} は Table 8 (a) に示す値となる。

3 角全部を観測すると、free network 解の cofactor は約 1/2 まで減少していることが、Table 4 と Table 8 (a) とを比較すればわかる。

b) 観測距離に誤差のある場合

3 つの角の誤差はいずれも σ であり S_{12} の誤差が $sS_0\sigma$ であると仮定する。この場合も形状不変条件として式 (16) を用いると、 Q_{ii} は Table 7 (b) のようになる。このときの free network 解の cofactor は Table 8 (b) のとおりになる。 Q_{xx} のトレースは距離誤差のない場合 (Table 8 (a)) に比べて、やはり $s^2 S_0^2$ だけ大きくなつ

Table 9 Q_{ii} in the row of triangles of Fig.6 and 7 [unit : 1/6]

\hat{A}_1	3	-1	-2	-1	1	0	-1	1	0
\hat{B}_1	-1	3	-2	1	-1	0	1	-1	0
\hat{C}_1	-2	-2	4	0	0	0	0	0	0
\hat{A}_2	-1	1	0	3	-1	-2	-1	1	0
\hat{B}_2	1	-1	0	-1	3	-2	1	-1	0
\hat{C}_2	0	0	0	-2	-2	4	0	0	0
\hat{A}_3	-1	1	0	-1	1	0	3	-1	-2
\hat{B}_3	1	-1	0	1	-1	0	-1	3	-2
\hat{C}_3	0	0	0	0	0	0	-2	-2	4

Table 10 Coordinates of stations in the row of triangles [unit : sS_0]

st.	1	2	3	4	5
x	0	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	0
y	0	1	$1/2$	$3/2$	2
\hat{x}	$-2\sqrt{3}/10$	$-2\sqrt{3}/10$	$3\sqrt{3}/10$	$3\sqrt{3}/10$	$-2\sqrt{3}/10$
\hat{y}	-1	0	$-1/2$	$1/2$	1

ている。

(4) 単列正三角形鎖

すべての内角と両端の測線を観測した単列正三角形の場合をとりあげる。ここでは辺長 sS_0 の正三角形が 3 つ連なり、観測測線長には誤差がないと仮定する場合を考える。

左から右に向かって測線長を計算するときを想定し、角の記号としては通例に従って、Fig.6 および Fig.7 のように未知測線に対する角、既知測線に対する角および未知測線の方位を支配する角をそれぞれ A_i , B_i , C_i とする。図形調整を行うと角の cofactor は Table 9 のようになる。測点の座標については、点 P_1 を原点し、測線 P_1P_2 を y 軸に選ぶと Table 10 の上段の値となる。

a) S_{12} および S_{25} が与えられた場合

形状寸法不变条件として 6 つ角 \hat{A}_1 , \hat{C}_1 , \hat{A}_2 , \hat{B}_2 , \hat{C}_3 , \hat{B}_3 と 1 つの測線 \hat{S}_{12} を選び、順次式 (14) および (15) を書くと、行列 B はつきのようになる。

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta x_1 & \delta y_1 & \delta x_2 & \delta y_2 & \delta x_3 & \delta y_3 & \delta x_4 & \delta y_4 & \delta x_5 & \delta y_5 \\ 1 & \sqrt{3}-2 & 0 & 1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3}-1 & \sqrt{3} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{3} & 2 & 0 & -1-\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{3}-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

ここに、はじめの 6 式の単位は $[sS_0]^{-1}$ であり、最後の式は無次元である。

この問題に対する Q_{ii} は、Table 9 より式 (18) に対応する cofactor をとりだし、これに \hat{S}_{12} の cofactor (こ

の値は 0 である) を加えればよい、その結果は Table 11 (a) のようになる。

free network 解を算出すると、その座標は Table 10 の下 2 行に記したとおり測点群の重心を原点とする座標系で与えられ、cofactor Q_{xx} は Table 12 (a) に示した値となる。

b) S_{13} および S_{45} が与えられた場合

Fig.7 のように、前例とは観測した測線が異なる場合を取りあげる。このとき、形状不变の条件として、前例と同じ場所の角および測線を利用してみよう。そうすると、 B は式 (18) と全く同じである。ところが測線距離 \hat{S}_{13} は角と相関があるので、図形調整によって得た最少拘束解によれば、Table 11 (b) のような cofactor を用いなければならないことになる。

free network 解の測点座標は Table 10 と同じであり、座標の cofactor は Table 12 (b) に示すように、そのトレースの値は Table 12 (a) よりわずかに大きくなっている。

この例および式 (17) の例では、観測していない距離を用いて free network 解を求めてみた。すでに示した各種の例からわかるように、最少拘束解における cofactor が正しく算出されていれば、条件式 (16) としては、どのような角や距離を用いててもよい。

4. 角のみを測った場合の Free Network 解

角のみを測って、距離を全く測っていない測量網があるとすれば、その測量網は、寸法が不明であるため、観測値のみを用いて測点座標を求ることはできない。ところがこのような場合においても、形式的に free network 解の得られることを本節で示す。

(1) 方針

Table 11 Q_{ij} in minimum constraint solutions of the rows of triangles [unit : 1/6]

(a) Case of Fig.6	\widehat{A}_1	3	-2	-1	1	0	1	0
	\widehat{C}_1	-2	4	0	0	0	0	0
	\widehat{A}_2	-1	0	3	-1	0	1	0
	\widehat{B}_2	1	0	-1	3	0	-1	0
	\widehat{C}_3	0	0	0	0	4	-2	0
	\widehat{B}_3	1	0	1	-1	-2	3	0
	\widehat{S}_{12}	0	0	0	0	0	0	0

(b) Case of Fig.7	\widehat{A}_1	3	-1	-1	1	-1	1	-1/4 $\sqrt{3}$
	\widehat{B}_1	-1	3	1	-1	1	-1	-5/4 $\sqrt{3}$
	\widehat{A}_2	-1	1	3	-1	-1	1	-1/4 $\sqrt{3}$
	\widehat{B}_2	1	-1	-1	3	1	-1	1/4 $\sqrt{3}$
	\widehat{A}_3	-1	1	-1	1	3	-1	-1/4 $\sqrt{3}$
	\widehat{B}_3	1	-1	1	-1	-1	3	1/4 $\sqrt{3}$
	\widehat{S}_{12}	-1/ $\sqrt{3}$	-5/ $\sqrt{3}$	-1/ $\sqrt{3}$	1/ $\sqrt{3}$	-1/ $\sqrt{3}$	1/ $\sqrt{3}$	11/ $\sqrt{3}$

*) Values of \widehat{S}_{12} should be multiplied by $s^2 S_0^2$.

Table 12 $Q_{\hat{x}\hat{x}}$ in the free network solutions of the row of triangles [unit : $s^2S_0^2$]

(a) Case of Fig.6	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tbody> <tr><td>\hat{x}_1</td><td>0.244</td></tr> <tr><td>\hat{y}_1</td><td>0.025 0.020</td></tr> <tr><td>\hat{x}_2</td><td>-0.080 0 0.153</td></tr> <tr><td>\hat{y}_2</td><td>0.025 0.020 0 0.020</td></tr> <tr><td>\hat{x}_3</td><td>-0.196 0.002 0.003 0.002 0.248</td></tr> <tr><td>\hat{y}_3</td><td>0.078 -0.030 -0.029 -0.030 -0.103 0.253</td></tr> <tr><td>\hat{x}_4</td><td>-0.097 -0.002 0.003 -0.002 0.043 -0.099 0.248</td></tr> <tr><td>\hat{y}_4</td><td>-0.154 -0.030 0.029 -0.030 0.099 -0.163 0.103 0.254</td></tr> <tr><td>\hat{x}_5</td><td>0.129 -0.025 -0.080 -0.025 -0.097 0.154 -0.196 -0.078 0.244</td></tr> <tr><td>\hat{y}_5</td><td>0.025 0.020 0 0.020 0.001 -0.030 -0.001 -0.030 -0.025 0.020</td></tr> </tbody> </table>	\hat{x}_1	0.244	\hat{y}_1	0.025 0.020	\hat{x}_2	-0.080 0 0.153	\hat{y}_2	0.025 0.020 0 0.020	\hat{x}_3	-0.196 0.002 0.003 0.002 0.248	\hat{y}_3	0.078 -0.030 -0.029 -0.030 -0.103 0.253	\hat{x}_4	-0.097 -0.002 0.003 -0.002 0.043 -0.099 0.248	\hat{y}_4	-0.154 -0.030 0.029 -0.030 0.099 -0.163 0.103 0.254	\hat{x}_5	0.129 -0.025 -0.080 -0.025 -0.097 0.154 -0.196 -0.078 0.244	\hat{y}_5	0.025 0.020 0 0.020 0.001 -0.030 -0.001 -0.030 -0.025 0.020	$\text{tr}(\mathbf{Q})=1.704$
\hat{x}_1	0.244																					
\hat{y}_1	0.025 0.020																					
\hat{x}_2	-0.080 0 0.153																					
\hat{y}_2	0.025 0.020 0 0.020																					
\hat{x}_3	-0.196 0.002 0.003 0.002 0.248																					
\hat{y}_3	0.078 -0.030 -0.029 -0.030 -0.103 0.253																					
\hat{x}_4	-0.097 -0.002 0.003 -0.002 0.043 -0.099 0.248																					
\hat{y}_4	-0.154 -0.030 0.029 -0.030 0.099 -0.163 0.103 0.254																					
\hat{x}_5	0.129 -0.025 -0.080 -0.025 -0.097 0.154 -0.196 -0.078 0.244																					
\hat{y}_5	0.025 0.020 0 0.020 0.001 -0.030 -0.001 -0.030 -0.025 0.020																					
(b) Case of Fig.7	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tbody> <tr><td>\hat{x}_1</td><td>0.070</td></tr> <tr><td>\hat{y}_1</td><td>-0.117 0.378</td></tr> <tr><td>\hat{x}_2</td><td>-0.100 0.173 0.233</td></tr> <tr><td>\hat{y}_2</td><td>0.016 -0.050 0 0.133</td></tr> <tr><td>\hat{x}_3</td><td>-0.010 0.065 -0.017 -0.003 0.072</td></tr> <tr><td>\hat{y}_3</td><td>0.022 0.064 0.029 -0.017 -0.078 0.236</td></tr> <tr><td>\hat{x}_4</td><td>-0.023 -0.008 -0.017 0.003 -0.022 -0.009 0.073</td></tr> <tr><td>\hat{y}_4</td><td>-0.036 -0.103 -0.029 -0.017 0.009 -0.180 0.078 0.236</td></tr> <tr><td>\hat{x}_5</td><td>0.064 -0.115 -0.100 -0.016 -0.023 0.036 -0.010 -0.022 0.070</td></tr> <tr><td>\hat{y}_5</td><td>0.115 -0.289 -0.173 -0.050 0.008 -0.103 -0.065 0.064 0.116 0.379</td></tr> </tbody> </table>	\hat{x}_1	0.070	\hat{y}_1	-0.117 0.378	\hat{x}_2	-0.100 0.173 0.233	\hat{y}_2	0.016 -0.050 0 0.133	\hat{x}_3	-0.010 0.065 -0.017 -0.003 0.072	\hat{y}_3	0.022 0.064 0.029 -0.017 -0.078 0.236	\hat{x}_4	-0.023 -0.008 -0.017 0.003 -0.022 -0.009 0.073	\hat{y}_4	-0.036 -0.103 -0.029 -0.017 0.009 -0.180 0.078 0.236	\hat{x}_5	0.064 -0.115 -0.100 -0.016 -0.023 0.036 -0.010 -0.022 0.070	\hat{y}_5	0.115 -0.289 -0.173 -0.050 0.008 -0.103 -0.065 0.064 0.116 0.379	$\text{tr}(\mathbf{Q})=1.880$
\hat{x}_1	0.070																					
\hat{y}_1	-0.117 0.378																					
\hat{x}_2	-0.100 0.173 0.233																					
\hat{y}_2	0.016 -0.050 0 0.133																					
\hat{x}_3	-0.010 0.065 -0.017 -0.003 0.072																					
\hat{y}_3	0.022 0.064 0.029 -0.017 -0.078 0.236																					
\hat{x}_4	-0.023 -0.008 -0.017 0.003 -0.022 -0.009 0.073																					
\hat{y}_4	-0.036 -0.103 -0.029 -0.017 0.009 -0.180 0.078 0.236																					
\hat{x}_5	0.064 -0.115 -0.100 -0.016 -0.023 0.036 -0.010 -0.022 0.070																					
\hat{y}_5	0.115 -0.289 -0.173 -0.050 0.008 -0.103 -0.065 0.064 0.116 0.379																					

方法の概略をさきに示すとつぎのとおりである。まず
 1 測線の距離を適当に仮定して、最少拘束条件による区
 形調整解を求める。つぎに角の大きさを変えないとい
 う条件と $\hat{x}^T \hat{x} = \min$ 。という条件によって解くと、仮定し
 た寸法のもとにおける free network 解が形式的に得ら
 れる。

距離を適当に仮定したときの解が正しい free network 解でないことは自明であるが、形式的な解だと記した理由はもう 1 つある。それは、最少拘束解から free network 解を導くために用いた角を不变とする条件式 (4) に由来する。

たとえば、Fig.1 の角 $\hat{\alpha}_i$ について条件式(4)を作ったときを考え、式(8)における Bx の角 α_i に該当する行を書くとつぎのように0になる。

$$\left(\frac{y_k - y_i}{S_{ik}^2} - \frac{y_j - y_i}{S_{ij}^2} \right) x_i + \left(-\frac{x_k - x_i}{S_{ik}^2} + \frac{x_j - x_i}{S_{ij}^2} \right) y_i \\ + \frac{y_j - y_i}{S_{ij}^2} x_j - \frac{x_j - x_i}{S_{ij}^2} y_j - \frac{y_k - y_i}{S_{ik}^2} x_k + \frac{x_k - x_i}{S_{ik}^2} y_k \equiv 0$$

一方では、同じ式(8)中における \hat{l} の値としては図形調整より得られた最確値 \hat{l} を使うことにしておるから、 $(I-\hat{l})=0$ である。ゆえに式(8)より $\delta x=-x$ か

得られる. これを式(9)に代入すると,

となる。

このように、free network 解としての測点座標が求められることになる。角のみしか測らなかった測量網はもともと寸法上の実体はないものであるから、測点の座標値が定まらなくても、この段階では認められることであろう⁽²⁾。そもそも角のみしか測らないような測量網が成立するのは、寸法基準を与えることのできる既設の基準点が存在しているからである。ゆえに、ここで得られた free network 解を所定の基準点群に当てはめれば、その基準点群に準拠した寸法の測量網が確定し、測点座標およびその cofactor が定められるはずである。このことは次節で説明することにし、まず角のみを測った測量網の仮りの free network 解を算出してみよう。

(2) 正三角形の場合

角観測は同一精度で実行したとし、1辺の距離は sS_0 であると仮定しておく。座標系は 3. と同様に選んで最少拘束解を求めるところにする。そうすると最少拘束解の

注2) 角の大きさ不変条件以外に、仮定した測線距離不変という条件を追加すれば、解は確定する。

Table 13 Q_{ff} in the free network solutions in regular triangles [unit : $s^2 S_0^2 / 27$]

(a) Observation of 2 angles

\hat{x}_1	3
\hat{y}_1	$-\sqrt{3} \quad 5$
\hat{x}_2	$0 \quad -2\sqrt{3} \quad 3$
\hat{y}_2	$2\sqrt{3} \quad -4 \quad \sqrt{3} \quad 5$
\hat{x}_3	$-3 \quad 3\sqrt{3} \quad -3 \quad -3\sqrt{3} \quad 6$
\hat{y}_3	$-\sqrt{3} \quad -1 \quad \sqrt{3} \quad -1 \quad 0 \quad 2$

(b) Observation of 3 angles

\hat{x}_1	2
\hat{y}_1	0 $\quad 2$
\hat{x}_2	$-1 \quad -\sqrt{3} \quad 2$
\hat{y}_2	$\sqrt{3} \quad -1 \quad 0 \quad 2$
\hat{x}_3	$-1 \quad \sqrt{3} \quad -1 \quad -\sqrt{3} \quad 2$
\hat{y}_3	$-\sqrt{3} \quad -1 \quad \sqrt{3} \quad -1 \quad 0 \quad 2$

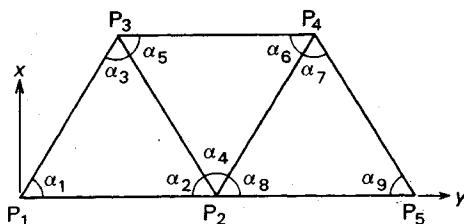


Fig.8

Table 14 Q_{ii} in minimum constraint solutions of the row of triangles without distance measurement

$\hat{\alpha}_1$	2/3	-1/3	-1/3	0	0	0	0	0	0
$\hat{\alpha}_2$	-1/3	2/3	-1/3	0	0	0	0	0	0
$\hat{\alpha}_3$	-1/3	-1/3	2/3	0	0	0	0	0	0
$\hat{\alpha}_4$	0	0	0	2/3	-1/3	-1/3	0	0	0
$\hat{\alpha}_5$	0	0	0	-1/3	2/3	-1/3	0	0	0
$\hat{\alpha}_6$	0	0	0	-1/3	-1/3	2/3	0	0	0
$\hat{\alpha}_7$	0	0	0	0	0	0	2/3	-1/3	-1/3
$\hat{\alpha}_8$	0	0	0	0	0	0	-1/3	2/3	-1/3
$\hat{\alpha}_9$	0	0	0	0	0	0	-1/3	-1/3	2/3

Table 15 Q_{ff} in the free network solutions of the row of triangles without distance measurement [unit : $s^2 S_0^2$]

\hat{x}_1	0.208
\hat{y}_1	0 $\quad 0.208$
\hat{x}_2	-0.104 $\quad 0.040 \quad 0.171$
\hat{y}_2	-0.040 $\quad -0.104 \quad 0 \quad 0.171$
\hat{x}_3	-0.140 $\quad 0.022 \quad 0.018 \quad 0.048 \quad 0.177$
\hat{y}_3	-0.022 $\quad -0.140 \quad -0.048 \quad 0.018 \quad 0 \quad 0.178$
\hat{x}_4	0 $\quad 0.096 \quad 0.018 \quad -0.048 \quad -0.056 \quad -0.026 \quad 0.177$
\hat{y}_4	-0.096 $\quad 0 \quad 0.048 \quad 0.018 \quad 0.026 \quad -0.057 \quad 0 \quad 0.178$
\hat{x}_5	0.036 $\quad -0.158 \quad -0.104 \quad 0.040 \quad 0 \quad 0.096 \quad -0.140 \quad 0.022 \quad 0.208$
\hat{y}_5	0.158 $\quad 0.036 \quad -0.040 \quad -0.104 \quad -0.096 \quad 0 \quad -0.022 \quad -0.140 \quad 0 \quad 0.208$

測点座標および角の cofactor は 3. と同じになる。

a) 2 角を独立に測った場合 (図形条件なし)

Fig.3において角 α_1 , α_2 のみを測ったが、距離を測らなかった場合をとりあげよう。1つの測線長を仮定すれば、最少拘束解で得られた2つの角が不变であるという条件のみから free network 解が求められる。たとえば式 (14a) と (14b) を用いればよい。そうすると、 \hat{Q}_{ii} としては、Table 2 (a) に記した中から $\hat{\alpha}_1$ および $\hat{\alpha}_2$ に関するもののみを用いることになる。

その結果、free network 解の座標の cofactor は Table 13 (a) のようになる。(他の角を用いて条件を作っても同じ結果を得る)。この場合はどの測点も $Q_{\text{ff}} + Q_{\text{ff}} = (8/27)s^2 S_0^2$ というように同じ値である。

b) 3 角を独立に測った場合 (図形条件あり)

3つの角を測った場合に、たとえば、上例と同じく $\hat{\alpha}_1$ および $\hat{\alpha}_2$ に関する条件を用いたときには、 Q_{ii} としては Table 7 中から $\hat{\alpha}_1$ および $\hat{\alpha}_2$ に関するもののみを用いればよいことになる。

free network 解の計算結果は Table 13 (b) のよう

になる。(a) の場合に比べて $\text{tr}(Q_{\text{ff}})$ は $1/2$ になっている。

(3) 単列三角形鎖の場合 (すべての内角を観測)

Fig.8のように正三角形が3つ連なった単列三角形鎖について、すべての内角を独立に測ったときを考える。1測線の距離を sS_0 と仮定し、Fig.8 のように座標軸を選ぶと、最少拘束图形調整の結果は Table 10 および 14 のようになる。

free network 解を求めるためには、たとえば角不变条件としては式 (18) において最下段に記した距離 \hat{S}_{12} の式を除いたものを使用し、これに従って Table 14 より必要な cofactor のみを選び出せばよい。こうして算出された free network 解の座標の cofactor を Table 15 に示す。この場合の中央の三角形1つだけについての3頂点の $\sum(Q_{\text{ff}} + Q_{\text{ff}})$ の値を、単独に1個の三角形が存在する場合 (Table 13 (b) 参照) と比較すると、今回の場合の方がかなり大きいことがわかる。

Table 16 Coordinates of control stations and stations in the free network solutions, and their differences [unit : sS_0]

observ.		x ₁	y ₁	x ₂	y ₂	x ₃	y ₃
angle	ξ_0	-0.2887	-0.5-0.05	-0.2887	0.5+0.10	0.5774	0-0.05
	ξ	-0.3320	-0.5251	-0.2887	0.5501	0.6208	-0.0250
	$\Delta \xi$	0.0433	-0.0249	0	0.0499	-0.0434	-0.0250
dist.	$\xi - \hat{x}$	-0.0433	-0.0251	0	0.0501	0.0434	-0.0250
	ξ	-0.3103	-0.4875	-0.2670	0.5125	0.5774	-0.0250
	$\Delta \xi$	0.0217	-0.0625	-0.0217	0.0875	0	-0.0250
	$\xi - \hat{x}$	-0.3103	-0.4875	-0.2670	-0.4875	-0.2887	-0.5250

5. 角のみを測った場合の Free Network 解を基準点に当てはめる方法

角のみを測った測量網においては、前節で述べたように、適当な1測線の距離を基準距離 S_0 の s 倍と仮定して free network 解を求めた。この解を既設の基準点群に合理的に当てはめる方法を示す。

(1) 解法

free network 解および基準点の両者ともに、それぞれの測点は各測点群の重心を座標原点とする座標系によって表しておくことにする。そうすると、前節で得られた free network 解の形を変えずに k 倍し、かつ θ だけに回転させて、

新測量網の測点と対応基準点間の距離の2乗和

$$= \min. \dots \quad (20)$$

としたものを free network 解とすればよい。

以下にはつぎの記号を用いることにする。

基準点座標 : $\xi_0^T = (\xi_{01}, \eta_{01}, \xi_{02}, \dots) = \xi^T + \Delta \xi^T$

free network 解の測点座標 : $\hat{x}^T = (\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2, \dots)$

基準点に当てはめた解の座標 : $\xi^T = (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \dots)$

対応点の座標差 : $\Delta \xi = \xi_0 - \xi$ (21)

これらの記号を用いると、つぎの問題を解けばよいことになる。free network 解の測点座標 \hat{x}_j, \hat{y}_j を

$$\begin{pmatrix} \xi_j \\ \eta_j \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_j \\ \hat{y}_j \end{pmatrix} \dots \quad (22)$$

という式によって ξ_j, η_j に変換し、このとき

$$\Delta \xi^T \Delta \xi = \sum_j ((\xi_{0j} - \xi_j)^2 + (\eta_{0j} - \eta_j)^2) = \min. \dots \quad (23)$$

を満足するように k および θ を定めることである。

上記ようにして解いてもよいが、ここでは式(23)をつぎのように書き改めて、変換定数を k , θ から k_1, k_2 に変えることにする。

$$\begin{pmatrix} \xi_j \\ \eta_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & -k_2 \\ k_2 & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_j \\ \hat{y}_j \end{pmatrix} \dots \quad (24)$$

そうすると解はつぎのような簡単な形に書ける。

$$k_1 = \frac{\sum_j (\hat{x}_j \xi_{0j} + \hat{y}_j \eta_{0j})}{\sum_j (\hat{x}_j^2 + \hat{y}_j^2)}, \quad k_2 = \frac{\sum_j (\hat{x}_j \eta_{0j} - \hat{y}_j \xi_{0j})}{\sum_j (\hat{x}_j^2 + \hat{y}_j^2)} \dots \quad (25)$$

倍率および回転角が必要なときは次式によって算出でき

る。

$$k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{k_2}{k_1} \dots \quad (26)$$

あらかじめ仮定した測線の距離 sS_0 が精度の悪い推定値であるとすると、基準点に当てはめた後の測量網の測点座標の cofactor は、式(10)で計算した値を k^2 倍しておく必要がある。何故なら式(10)の行列 B は当てはめ前の距離を基準として算出された値であるから、新しい距離に基づいた値に変更しなければならない。そうすると B は k 倍され Q_{xx} は k^2 倍になる。

(2) 3角を測った正三角形の計算例

すべての角を独立に観測した正三角形の free network 解を基準点に当てはめる例をとりあげる。与えられた基準点座標 ξ_0 は Table 16 の第2行に示した値とする。このときの free network 解の座標の cofactor はすでに Table 13 (b) に算出されているが、測点座標は示されていない。ところが1辺の距離を sS_0 としているから、この測量網の測点群の重心を原点とするときの測点座標は容易に計算できる。その値は Table 3 に示しているものである。

以上の数値を用いると、式(25)および(26)よりつぎの解を得る。

$$k_1 = 1.0751, \quad k_2 = -0.04331$$

$$k = 1.076, \quad \theta = -0.0403 \text{ rad.}$$

すなわち、Table 3 に示された座標を持つ測点網の図形を、1.076 倍して、-0.403 rad 回転すれば、与えられた基準点に最もうまく当てはまることになる。

基準点に当てはめたときの free network 解の測点座標およびそれと基準点座標との差 $\Delta \xi$ を Table 16 の中段に記載した。なお参考のために、測点の移動量 $\xi - \hat{x}$ の大きさも同表に示した。この様子を描いたものが Fig.9 である。当てはめ後の Q_{xx} は Table 13(b) の値を $(1.076)^2$ 倍すればよい。

6. 最少拘束解から基準点に当てはめた Free Network 解の直接算出法

既設の基準点に free network 解を当てはめるためには、これまで示した方法では、① 最少拘束解の算出、② free network 解の決定、③ 基準点への当てはめ、という3段階を経てきたが、新測量網の全測点をこれに対

び Q_{ee} などは 5.(2) の例ともちろん一致している。

c) 6 測線を測った四辺形

Fig.10 のような 6 測線の距離を測った辺長 S_0 の正方形測量網を、4つの基準点 $P_1(-0.495, -0.505)$, $P_2(0.525, -0.485)$, $P_3(0.485, 0.515)$, $P_4(-0.515, 0.475)$ (単位 : S_0) に当てはめる場合を例にとってみる。この例は論文 3) で示したものであって、この場合に限り、同論文にならってすべての測線の誤差は等しくて、 $\sigma_s = S_0 \sigma = \text{一定}$ と仮定する。

そうして式 (31)～(33) を用いて計算すると、基準点に当てはめたときの座標 ξ や Q_{ee} は論文 3) の値と完全に一致する。

7. 結 言

測量網の free network 解を得る 1 つの方法として、図形調整を行った結果を用いる方法を提案し、その解法の特徴を計算例によって明らかにした。この方法は最少拘束解の計算とそれを用いた free network 解の算出というように、2段階の計算を行うものである。前段階の最少拘束解を得るのに著者等は図形調整法を用いたが、この解を座標調整法によって求めておくことも可能である。ただし座標調整法の結果から free network 解を誘導しようとすれば、すでに知られているように、正規方程式の固有ベクトルを利用するのがよい^{7), 8)}。いずれの方法においても、前段階である最少拘束解を求めるときの長所と短所をそのまま所有しているものである。

本論文で定義する free network 解は、既設の基準点の有無に無関係に、当該測量における観測値のみを用いて算出すべきものであり、またそれが可能であることを示した。すなわち、前段階である図形調整法（最少拘束解）は任意の座標系に基づいた解であればよいから、基準点には無関係である。

既設の基準点に新測量網の全測点を当てはめたいときには、つぎの 2 方法が実行可能であることを示した。

(1) free network 解を求めてから、これに移動、回転

（場合によっては倍率）を与えて、基準点に当てはめる方法。

(2) 最少拘束解から、与えられた基準点座標に当てはめる解を直接に求める方法。

ここで問題となるのは、既設の基準点ごとに異なった重みを与えて free network 解を当てはめようとする場合である。この場合に (2) の方法を採用すれば、“新しい測量網のすべての測点座標の 2 乗和を最小にする”という条件が成立しなくなる。換言すれば新しい測量に對して外部的な拘束を加えることになる。したがって、新しい測量における観測値を妨げないためには、(2) の方法を用いるべきではないと考えている。この件については別に示すことになる。

参 考 文 献

- 1) Mittermayer, E. : Eine Verallgemeinerung der Methode der kleinsten Quadrate zur Ausgleichung freier Netze, Zeitschrift für Vermessungswesen, 96 Jg., S.401～410, 1971.
- 2) Mittermayer, E. : A generalisation of the least-squares method for the adjustment of free networks, Bull. Géodésique, No.104, pp.139～157, 1972.
- 3) 森忠次・町田憲一：距離測量網の図形調整結果を用いた Free Network の解法、土木学会論文集、第 440 号／IV-14, pp. 125～133, 1992.
- 4) Papo, H.B. and Perlmutter, A. : Datum definition by free net adjustment, Bull. Géodésique, Vol.55, pp.218～226, 1981.
- 5) 中根勝見：地殻変動推定のためのフリー平均法、測地学会誌、第 23 卷, pp.9～16, 1977.
- 6) 藤井陽一郎：GPS 三次元測地網の重み付き自由平均、測地学会誌、第 37 卷, pp. 217～226, 1991.
- 7) Gotthardt, E. : Einführung in die Ausgleichungsrechnung, W. Wichmann, S. 280, 1978.
- 8) Höpcke, W. : Fehlerlehre und Ausgleichungsrechnung, Walter de Gruyter, S.123, 1980.

(1992.2.5 受付)

FREE NETWORK SOLUTIONS OF TWO-DIMENSIONAL NETWORKS REDUCED FROM RESULTS OF THE ADJUSTMENT BY CONDITION EQUATIONS

Chuji MORI and Ken-ichi MACHIDA

Tow-dimensional survey networks can usually be solved without much difficulties by the method of condition equations, and that method is suitable to recognize observation errors. It is shown, in this paper, that free network solutions (with inner constraints) of all kinds of two-dimensional networks can be obtained from the results of adjustment by the method of condition equations, by applying the same way as the one already presented by the authers³⁾. It is also shown that fitting a free network in a set of control stations can be carried out by two different ways : the one is to apply the Helmert transformation, and the other is to satisfy two conditions, a condition of shape-keeping of the free network and a condition of fitting. Numerical examples related to some simple, typical networks are given.