

前処理付き共役勾配(SSOR-PCG)法を用いた飽和・不飽和多孔質媒体中の三次元浸透解析法

西垣 誠*・中屋眞司**・河野伊一郎***

飽和・不飽和を含む三次元多孔質媒体中の浸透を数値解析する新しい三次元有限要素法を提案する。この方法は、SSOR法を用いて三次元の有限要素網をスライス面の集合に置換した上で、各スライス面に関するマトリックス式をPCG法により解く新たな手法(SSOR-PCG法)に基づいている。本手法を用いると、従来の方法に比べ計算機記憶容量の大幅な削減が可能となり、より合理的な三次元浸透解析が可能になることが判った。

Keywords : groundwater, three-dimensional analysis, FEM, slice successive overrelaxation, preconditioned conjugate gradient

1. はじめに

地下水の流動に係わる諸問題の多くは三次元的かつ非定常な現象であり、定量的に現象をとらえるには三次元的なアプローチが必要となる。そのための予測手法の一つに数値解析によるシミュレーションがある。三次元数値シミュレーションでは一次元、二次元の場合と異なり、種々の仮定を設ける必要がなく、複数の被圧水面、自由水面を容易に扱うことができる反面、電算機の記憶容量や計算時間が増えるという欠点がある。その結果、三次元の地下水解析は敬遠され、工学的、水理学的諸問題の解決が不十分になっているのが現状である。そこで、三次元の非定常地下水浸透解析をより合理的に処理する方法が待望されている。

飽和・不飽和を含む多孔質媒体の三次元浸透流解析は、最初、Freeze (1971) によって差分法(FDM)を用いて解かれた¹⁾。その後、Narasimhan & Witherspoon²⁾は、積分有限差分法(Integrated Finite Difference Method, IFDM)によって、FDMよりさらに複雑な幾何形状の領域を扱える三次元解析モデルを開発し、Segol (1977)³⁾、Frind & Verge (1978)⁴⁾、Akai et al. (1979)⁵⁾も、ガラーキン法を用いた有限要素法(FEM)モデルを提案した。FEMはIFDMよりさらに複雑な幾何形状を扱える点で柔軟性に富んだ方法と言える。しかし、三次元問題になると解くべきマトリックス方程式が大きくなり、反復法による非線形解法(Picard iterative procedure)^{3), 4)}とタイムスライスによる非定常解法の中で何度もマトリックス方程式が解かれるため、過大な記憶容量、計算時間の問題が指摘されていた。したがっ

て、マトリックス方程式の解法の改良に関する研究が進められてきた。

FEM解析で扱われるマトリックス式は簡単な連立一次方程式($Ax=b$)の形にまとめられる。この連立一次方程式($Ax=b$)を解く方法には直接法と反復法の二通りがある。前者の代表はガウスの消去法で、マトリックスの効率のよい記憶方式と演算処理がいろいろと開発されている。後者に関しては、反復パラメータが自動的に計算されるという点でSOR法等、他の反復法に比べて優位とされる共役勾配法⁶⁾(Conjugate gradient法、以後CG法と呼ぶ)がある。直接法は正方マトリックスAの成分の如何に関わらずその大きさに比例して一定の処理速度となる。それに対し、反復法では、同一の大きさのAとbであっても、その内容により反復回数が増減し処理速度が異なる。一般に、反復法は直接法に比べ処理速度に優れ、マトリックス式Aの記憶容量が小さくて済むと言う利点がある。CG法は最適ナリラクゼーションファクタを用いたSOR法よりもまだ優れているとされるが、浸透解析に最近、CG法の収束性を高めるため前処理を施したCG法(Preconditioned Conjugate Gradient Method、以後PCG法と呼ぶ)が開発され、前処理に用いるプレコンディショナーの選択の違いからICCG法、MICCG法、POLCG法が開発されている。これらのPCG法についてはHill (1990)が解析能力の比較を行っている⁷⁾。著者ら(1990)もプレコンディショナーをAの対角成分の逆行列とする方法で十分、高速化と記憶容量の削減を実現している^{8), 9)}。

Huyakorn et al. (1986)は三次元浸透のFEM解析にSSOR(Slice successive overrelaxation)法を導入し、三次元場のマトリックス式を変形して三次元モデルを鉛直スライス面の集合に分解し、スライス面に関する二次元解析の反復処理に置換した解析モデルを提案した¹⁰⁾。また、YehもSBI(Subregion block iteration)法によ

* 正会員 工博 岡山大学助教授 工学部土木工学科 (〒700 岡山市津島中3-1-1)

** 正会員 理修 岡山大学大学院 工学部自然科学研究所 博士課程((株)CRC総合研究所)

*** 正会員 工博 岡山大学教授 工学部土木工学科

り同様な解析モデルを提案している¹¹⁾。これらの方法は二次元あるいはブロックの対象領域に関する容量しか必要としないため、主記憶が少なくなる。この方法とは異なるが、三次元場を二次元のモデルに分割して各々のモデル間の流量の連続性を考慮する方法も提案されている¹²⁾。しかし、この方法は分割層間の貯留性の取扱が困難である。特に不飽和領域に関しては特別な取扱が必要である。

本研究では飽和・不飽和を含む多孔質媒体の三次元の非常地下水浸透解析に、記憶容量のあまり必要としないSSOR法と演算速度が速いPCG法とを組み合わせる手法(以後SSOR-PCG法と呼ぶ)を開発し、三次元解析にPCG法を適用したFEM解析コードとの比較を行う。すなわち、SSOR法により三次元モデルを二次元のモデルの集合に置換した上で、個々の二次元解析にPCG法を用いてさらに記憶容量の縮小を図る多重反復計算による三次元解析法を開発し、その解法の妥当性を五つの数値実験から定常、非常、および不飽和状態の浸透について検討する。

2. 浸透流の支配方程式と有限要素近似

飽和・不飽和を含む多孔質媒体内の浸透を支配する方程式は連続の式とダルシーの法則より次式で表わされる。

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \left(k_r(\theta) k_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial X_j} + k_r(\theta) k_{i3} \right) + q = (C(\theta) + \alpha S_s) \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (i, j=1, 2, 3) \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 ϕ : 圧力水頭、 X_i : 全体座標、 t : 時間、 k_{ij} : 飽和の透水テンソル、 $k_r(\theta)$: 比透水係数 ($0 \leq k_r(\theta) \leq 1$)、 q : 単位体積当りの流量、 $C(\theta)$: 比水分容量 ($= \partial \theta / \partial \phi$)、 θ : 体積含水率 ($= n S_r$)、 n : 空隙率、 S_r : 飽和度 ($0 \leq S_r \leq 1$)、 S_s : 比貯留係数、 α : 飽和時に1、不飽和時に0の係数である。式(1)は通常、重み付き残差法により有限要素定式化され、次式のように表わされる。

$$(wA_{ij}^{k+1} + B_{ij}^{k+1} / \Delta t_k) \phi_j^{k+1} = F_i^{k+1} - (w-1)A_{ij}^{k+1} \phi_j^k + B_{ij}^{k+1} / \Delta t_k \phi_j^k \dots \dots \dots (2)$$

$$A_{ij} = \sum A_{ij}^e = \sum \int_{ve} k_{ij} k_r(\theta) \left(\frac{\partial N_i}{\partial X_j} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial X_i} \right) dV,$$

$$B_{ij} = \sum B_{ij}^e = \sum \int_{ve} \nu N_i N_j dV,$$

$$F_i = \sum F_i^e = \sum \int_{ve} N_i q dV + \sum \int_e V_n N_i d\Gamma - \sum \int_{ve} k_{ij} k_r(\theta) \left(\frac{\partial N_j}{\partial X_i} \right) e_j dV$$

$$(i, j=1, 2, 3, \dots, n)$$

ここに、 N は形状関数、 w は時間に関する重み係数(0

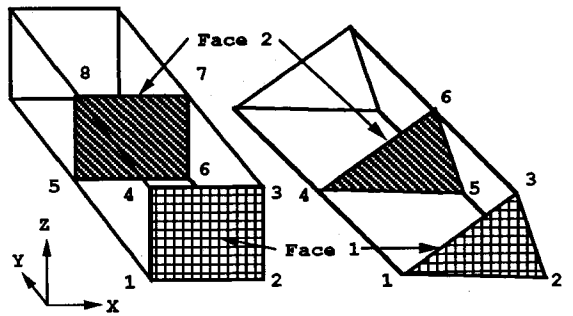


Fig.1 Hexahedral and pentahedral elements with 2 faces

$< w \leq 1$), サフィクスの k は時間ステップ、 A, B, F は各々係数マトリックスあるいはベクトルを表わす。 I, J は節点を示す指標であり、総和は全要素数 m にわたって行われる。 $(X_i$: 全体座標、 e_j : X_j 方向の単位重力ベクトル、 $\nu = C(\theta) + \alpha S_s$ 、 V_n : 境界面の法線方向の流速ベクトル)

式(2)の両辺をまとめると、式(3)のような簡単なマトリックスの形に表わすことができる。

$$\begin{aligned} \sum_e C_{ij}^e \phi_j &= \sum_e Q_i^e \\ \sum_e C_{ij}^e &= (wA_{ij}^{k+1} + B_{ij}^{k+1} / \Delta t_k) \\ \sum_e Q_i^e &= F_i^{k+1} - (w-1)A_{ij}^{k+1} \phi_j^k + B_{ij}^{k+1} / \Delta t_k \phi_j^k \end{aligned}$$

式(3)で表わされる連立方程式は、不飽和領域内の浸透を扱うため非線形となる。そこで各時間ステップにおいて i 回目の反復で得られた解 ϕ と前回の解 ϕ^{OLD} の差の絶対値が所定の許容誤差 ϵ に収束するまで解を次式により仮定し、 ϕ^{NEW} を用いて式(3)を新たに構築し再度解くと次回の解が得られる。ここに、式(4)の β はリラクゼーションファクタである。この反復過程には通常Picard反復法^{3), 4)}(ループ1)と呼ばれる方法を用いる。

$$\phi^{NEW} = \phi^{OLD} + \beta(\phi - \phi^{OLD}) \quad (0 < \beta < 1) \dots \dots \dots (4)$$

3. SSOR-PCG法のアルゴリズム

(1) SSOR法

Fig.1で示される面1, 2を持つ六面体、五面体を要素とする三次元のFEMモデルを設定すれば一要素に関する浸透の支配式は式(3)を用いて表わせる。式(3)の左辺の要素マトリックスについて、面1, 面2の両方に関係した成分を右辺に移行すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & & & & & \\ & & & & 0 & & & & \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & & & & & \\ & & & & & C_{55} & C_{56} & C_{57} & C_{58} \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & C_{85} & C_{86} & C_{87} & C_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \cdot \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \cdot \\ \phi_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 - R_1 \\ \cdot \\ Q_4 - R_4 \\ Q_5 - R_5 \\ \cdot \\ Q_8 - R_8 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (5)$$

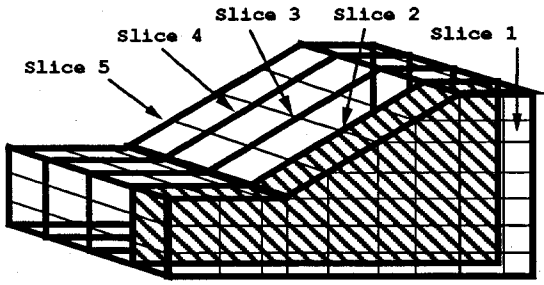


Fig.2 3-dimensional FEM model and slice planes

$$\begin{aligned}
 R_1 &= C_{15}\psi_5 - C_{16}\psi_6 - C_{17}\psi_7 - C_{18}\psi_8, \\
 R_2 &= C_{25}\psi_5 - C_{26}\psi_6 - C_{27}\psi_7 - C_{28}\psi_8, \\
 R_3 &= C_{35}\psi_5 - C_{36}\psi_6 - C_{37}\psi_7 - C_{38}\psi_8, \\
 R_4 &= C_{45}\psi_5 - C_{46}\psi_6 - C_{47}\psi_7 - C_{48}\psi_8, \\
 R_5 &= C_{51}\psi_1 - C_{52}\psi_2 - C_{53}\psi_3 - C_{54}\psi_4, \\
 R_6 &= C_{61}\psi_1 - C_{62}\psi_2 - C_{63}\psi_3 - C_{64}\psi_4, \\
 R_7 &= C_{71}\psi_1 - C_{72}\psi_2 - C_{73}\psi_3 - C_{74}\psi_4, \\
 R_8 &= C_{81}\psi_1 - C_{82}\psi_2 - C_{83}\psi_3 - C_{84}\psi_4
 \end{aligned}$$

式(5)を簡単にするため、マトリックス表示すると式(6)のように表わされる。

$$\begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 - G_{12}\Psi_2 \\ R_2 - G_{21}\Psi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1^* \\ R_2^* \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (6)$$

式(6)の G_{11} , G_{22} は各々面1, 面2のみで決定される要素剛性マトリックスである。そこで、Fig.2のように三次元FEMモデル内に、節点数および要素数の等しい L 枚の鉛直スライス面をとると、式(6)で表わされる要素マトリックス式は各スライス面 i について次のように拡張される。

$$[G]_{ii}(\Psi)_i = (R)_i \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $(\Psi)_i$: i スライス面上の未知節点水頭、

$$[G]_{ii} = \sum_k G_{kk}$$

$$(R)_i = \sum_k R_k^*, \quad k=1 \text{ or } 2, \quad (i=1, 2, \dots, L)$$

ただし、総和はスライス面 i をもつ要素についてなされる。式(7)を全スライス面について示すと式(8)の形が得られる。式(8)は三次元のマトリックス式が二次元の独立したスライス面に関するマトリックス式に分解されたことを意味する。換言すれば三次元モデルをマトリックスの演算にかなり有利となる形に変形したことになる。

$$\begin{bmatrix} [G]_{11} & & & 0 \\ & [G]_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & [G]_{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\Psi)_1 \\ (\Psi)_2 \\ \vdots \\ (\Psi)_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (R)_1 \\ (R)_2 \\ \vdots \\ (R)_L \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (8)$$

したがって、三次元モデルの数値解析は L 個の二次元モデルに関して独立に解けば良いことになる。スライス面の数を N_s とし、通常の二次元スライス面上の節点に関する透水マトリックスの大きさを S とすれば、必要となる主記憶領域の大きさは、 $S \cdot N_s$ となる。また、式(6)の計算は、 $2S$ の領域を主記憶に確保すると可能であるので、外部記憶を利用すれば、 $2S$ の主記憶領域を用いて式(8)が完成する。つまり、主記憶容量は外部記憶を利用しない場合に比べ、 $2/N_s$ 倍まで縮小できる。この外部記憶方式は特別なアルゴリズムを必要としない。

一般に、式(8)の L 枚のスライス面に関して ϕ を解いても、他のスライス面の ϕ の値を仮定しているので正解は得られない。そのため、 L 面に対して式(8)を解いた後、 ϕ を式(9)のように毎回修正し、右辺のみを更新して解が収束誤差 ϵ_k に収束するまで反復して求める(ループ2)。この方法をSSOR法と呼ぶ。ここで各スライス面についてFEM解法に後述のPCG法を用い、記憶容量の一層の縮小化と処理の高速化を図る。この2種の方法を組み合わせる三次元FEM解析法をSSOR-PCG法と言う。

$$\phi^{NEW} = \phi^{OLD} + \Omega(\phi - \phi^{OLD}), \quad (1 \leq \Omega \leq 2) \dots\dots\dots (9)$$

(2) PCG法

PCG法は $AX=b$ で表わされるマトリックス式の反復解法の一つで、従来のCG法⁹⁾を改良してより収束を速くし、未知数 X を求める方法である。本研究で用いているPCG法のアルゴリズムを以下に簡単に示す⁹⁾。

- a) $r_0 = b - AX_0, \quad P_0 = Br_0$
- b) 加速項の計算 $\alpha_k = \frac{P_k^T r_k}{P_k^T A P_k}$
- c) 解の修正 $X_{k+1} = X_k + \alpha_k P_k$
- d) $\epsilon_k = |X_{k+1} - X_k|_{max}$
- e) $r_{k+1} = r_k - \alpha_k A P_k$
- f) $\beta_k = -\frac{Br_{k+1}^T A P_k}{P_k^T A P_k}$
- g) $P_{k+1} = Br_{k+1} + \beta_k P_k$

式(10)は収束誤差 ϵ_k が許容値に達するまで k を1つずつ増加させて反復計算をする。式(10)で示される反復計算はFig.5のループ3に相当する。ここに、 B はプレコンデショナーと呼ばれ、 $B=I$ (単位ベクトル) のときCG法と一致する。また、 $B=A^{-1}$ とすると、 $P_0 = A^{-1}r_0$ から $\alpha_0=1, r_1=0$ となり、ただ一度の計算で正解が得られる。したがって、 B の選び方が重要となる。本手法では A に当たる透水マトリックスが対角優位の正方行列であることから B を式(11)に示すように選び、高速化を図っている。

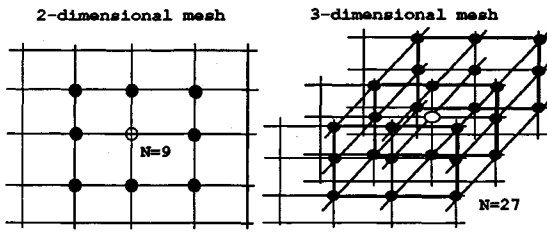


Fig.3 Number of matrix components A_{ij} for each nodal point

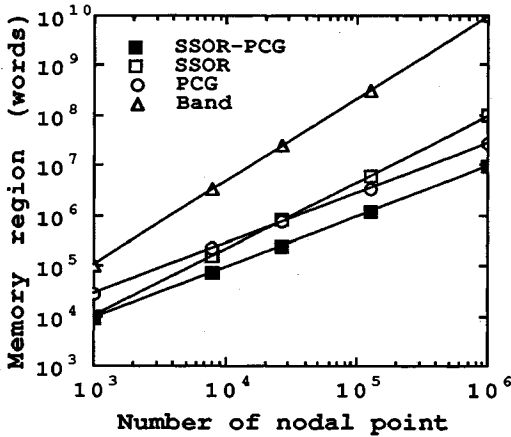


Fig.4 Matrix size versus number of nodal point

$$B = D^{-1}$$

$$A = D + E + F \dots \dots \dots (11)$$

ここに、 D : A の対角要素から成る対角行列

E : A の左下三角行列で対角を除いたもの

F : A の右上三角行列で対角を除いたもの

である。このように B として D^{-1} を選ぶと、計算が簡単であるだけでなく、 B のための記憶が不要となる。この手法を本研究では PCG 法と呼ぶ。PCG 法の有効性の検証については西垣ら (1990) に述べられている⁹⁾。

PCG 法のアルゴリズムを達成するのに必要な全体透水マトリックス A の記憶容量 M は次式で表わせる。

$$M = \sum_{i=1}^n (N_i + 1) \dots \dots \dots (12)$$

ここに、 N_i は節点 i と直接つながった節点の数で、計算機の内部で節点 1 から n まで、それに関係した透水マトリックスの成分 A_{ij} (i, j は節点番号を示す) およびそのインデックスのための関係節点番号が記憶される。六面体要素が規則正しく列んだ三次元モデルではモデル周辺部の節点を除くと N_i は 26 となり、同様に四角形要素が規則正しく列んだ二次元モデルではモデル周辺部の節点を除くと N_i は 8 となる (Fig.3 参照)。したがって、計算機の記憶すべき一節点当りの A_{ij} の数は三次元モデルでは二次元モデルの約三倍となる。PCG 法のために必要な A_{ij} の数は、三次元モデルに直接 PCG 法を用いる場合と、本方法のように SSOR 法を用いて

三次元モデルを多数のスライス面の集合に分割した上で、各スライス面に関して PCG 法を用いてマトリックス式を解く方式 (SSOR-PCG 法) の場合とでは約三倍の違いとなる。さらに、外部記憶を用いて主記憶容量の縮小化を図るならば、前述のように、SSOR 法では通常の PCG 法の $2/N_s$ 倍となるため、SSOR-PCG 法では、三次元問題に直接、PCG 法を用いた場合に比べて、記憶容量はその $1/3$ 倍の $2/(3N_s)$ 倍まで小さくなる (N_s : スライス面の数)。

通常のパンドマトリックス法、SSOR 法、PCG 法および SSOR-PCG 法の記憶容量の違いを示すために、直方体の各辺を $(n-1)$ 分割して、 n の三乗個の節点から成るメッシュを例にとり、外部記憶方式を用いないときの透水マトリックスの記憶容量と節点数の関係を Fig.4 に示す。分割数 n および節点数が増加するに従い、SSOR-PCG 法が記憶容量の点で最も有利になっている。

(3) 解析の手順

飽和・不飽和を含む多孔質媒体の浸透は、透水係数および比水分容量が毛管水頭とともに変化するため、非線形問題として解析しなければならない。本手法では、解析に従来の Picard 反復による反復解法 (ループ 1) が適応される。SSOR-PCG 法による反復解法は Picard 反復の内側のループに SSOR 法の反復のためのループ 2 があり、その内側に PCG 法の反復のためのループ 3 がある。Fig.5 に解法の流れ図を示す。以下に解析の手順について述べる。

a) 要素マトリックスの計算

式 (2) で示される各要素マトリックスについて計算する。このとき要素を構成する節点の圧力水頭が負の場合には、不飽和特性曲線からその圧力水頭を示す体積含水率の比透水係数 k_r および比水分容量 $C(\theta)$ を求め、 A_{ij} 、 B_{ij} と F_i の計算に用いる。

b) 全体マトリックスの作成

通常は各要素マトリックスを式 (3) の形になるように全体マトリックスの中に組み込む。本手法では、式 (8) で示される $1 \sim L$ のスライス面に関して PCG 法のための記憶場所へ格納される。この時、式 (8) の左辺のマトリックスの組み込みについて Picard 反復の最初の繰り返しのみ実行される。それに対し、式 (9) の解の修正に伴い、右辺ベクトルの修正が SSOR 法の繰り返し中、毎回実行される。

c) 解の算出と反復修正

SSOR 法を用いた反復過程では毎回、各面の節点について未知水頭が解かれる。全スライス面について PCG 法によって解かれた全節点の水頭値の中で、 i 回と $(i-1)$ 回の差の絶対値が許容誤差範囲内であれば SSOR の反復処理は終了し、つぎの Picard 反復の処理

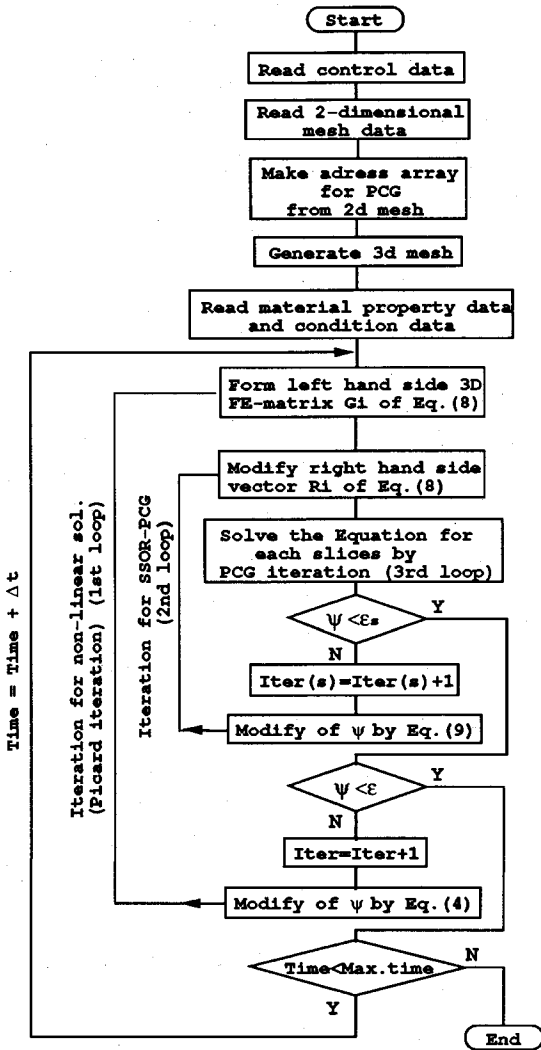


Fig.5 Flow chart of SSOR-PCG method in 3-dimensional seepage flow analysis

に移行する。Picard 反復では、式 (4) で示される解の修正がおこなわれ、 j 回と $(j-1)$ 回目の反復の節点水頭の差の絶対値が許容誤差範囲内になり、d) の条件が満足すれば反復処理は終了し、次の時間ステップの計算が開始する。

d) 節点流量の算出と大気境界面処理

大気との境界にある節点は浸出面になり得る。Picard 反復の最後に節点流量の計算と定義された大気境界面上の節点について、その圧力水頭と流出量から浸出面となるか否か条件が判定され、その節点の境界条件の変更が行われる。

(4) 掘削と不連続性の取扱い

トンネルのような掘削は掘削する部分の要素のマトリックスを作成しないようにすることで簡単に取り扱うことが可能である。掘削する部分の要素のマトリックス

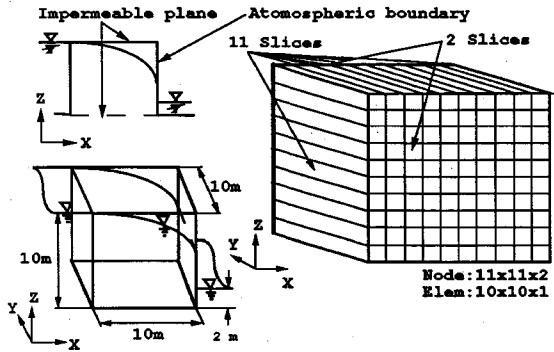


Fig.6 Schematic diagram of a square embankment model

Table 1 Physical properties used in the simulation of steady flow through a square embankment

Physical properties	
Saturated hydraulic conductivity, k	0.01 m/day
Residual water saturation, S_{rr}	0.2
Constitutive relations:	
$S_e = a / (a + \phi ^g)$, $\phi < 0$	
$S_e = 1$, $\phi \geq 0$	
$kr = S_e^u$	
where $a=10m^4$, $g=4$, $u=4$, $S_e = (S_r - S_{rr}) / (1 - S_{rr})$,	
ϕ : Pressure head (m) and S_r : Water saturation	

は全体マトリックスに組み込まれないし、また、そのためにできた全体マトリックスの零の成分はPCG 解法のなかで計算しないように飛ばす。掘削によって出現した大気境界は上述の d) の取扱いが適応される。不連続性の取扱いについても、掘削のそれと全く同様の処理がとられる。

4. 解析例

本解析コードを用いた五つの解析例をここで取り扱う。解析は何れもアイソパラメトリック要素内の積分点は 8 点 ($2 \times 2 \times 2$) とし、PCG の反復打ち切り許容誤差は 10^{-3} 、式 (4) の β は 0.5、式 (2)、(3) の w は 1 とし後退差分近似を用いた。

(1) 堤体内の定常浸透

堤体の定常浸透問題は、Huyakorn et al. (1986)¹⁰⁾により解かれており、同じ形状モデルを用いて本手法の妥当性の検証を行う。シミュレーションに用いたモデルの幾何形状と境界条件を Fig.6 に、物性を Table 1 に示す。モデルは $x=y=z=10$ m の立方体を x および z 方向に 10 分割した節点数、242 (121×2)、要素数、100 の三次元メッシュで、左端の全水頭 H を 10 m に、右端の全水頭を 2 m と一定に保った際の堤体内の二次元定常浸透を解析する。モデルの上下面は不透水面とする。モデルは不飽和内の浸透を含み、Picard の反復計算の過程で右側 YZ 面上の節点の浸出面の判定が行われる。Picard の反復計算の許容誤差 ϵ_p は 0.01 m、SSOR の反復計算の許容誤差 ϵ_s は 0.005 m、オーバーリラクゼーション

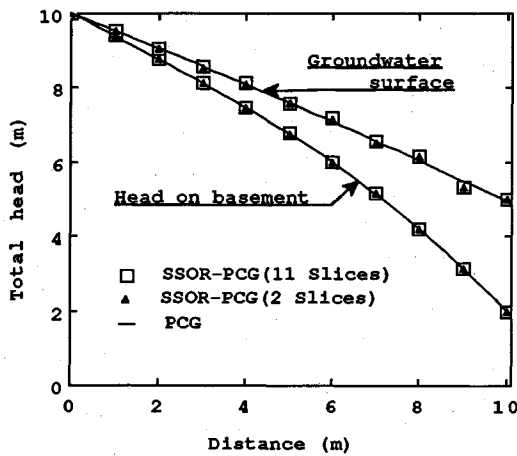
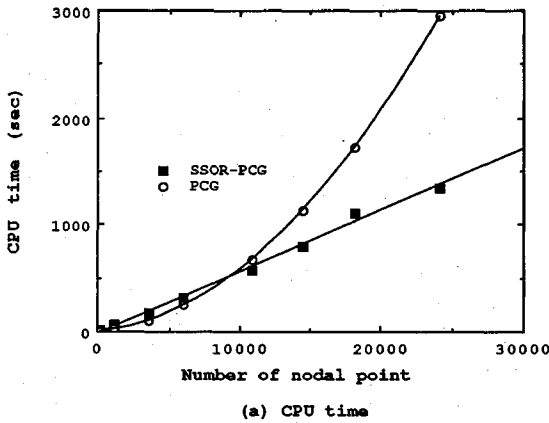
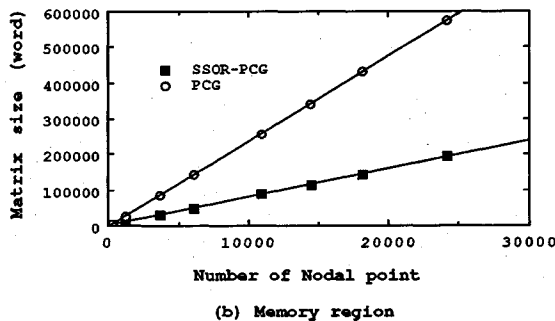


Fig.7 Computed profiles of total head on xz plane



(a) CPU time



(b) Memory region

Fig.8 Execution time and occupied memory of global matrix required to achieve 3-dimensional FE analysis

ファクタ Ω を 1.0 とし, $Y=0\text{m}$, $Y=10\text{m}$ の XZ 面をスライス面としたモデル 1 と, 11 枚の YZ 面をスライス面としたモデル 2 の 2 通りについて, SSOR-PCG 法によって解析した結果を PCG 法の結果 (モデル 3) とともに Fig.7 に示す. 三者の結果はよく一致している. 煩雑さを避けるため図に示していないが, Huyakorn et al. (1986)¹⁰⁾ の結果ともよく一致している. SSOR-PCG

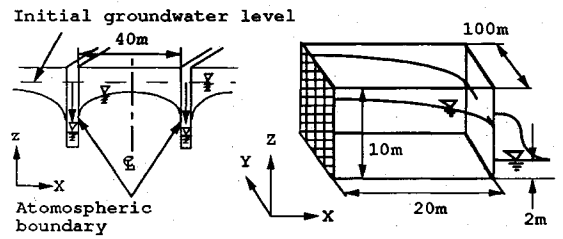


Fig.9 Schematic diagram of parallel ditches model

Table 2 Physical properties used in the simulation of transient flow between the parallel ditches

Physical properties	
Saturated hydraulic conductivity, k	0.1 m/day
Specific storage, S_s	0.0001 1/m
Porosity, n	0.25
Residual water saturation, S_{rr}	0.2
Constitutive relations:	
$S_e = a / (a + \phi ^\alpha)$, $\phi < 0$	
$S_e = 1$, $\phi \geq 0$	
$k_r = S_e^u$	
where $a=10\text{m}$, $\alpha=1$, $u=1$, $S_e = (S_r - S_{rr}) / (1 - S_{rr})$,	
ϕ : Pressure head (m) and S_r : Water saturation	

法で解く場合, スライス面の選び方に左右されず同じ解が得られている. モデル 1 では Picard 反復回数 $IT=4$, SSOR の反復回数 (サブイテレーション数) $IT_s=32$, モデル 2 では $IT=9$, $IT_s=51$, モデル 3 では $IT=4$ で収束している. また, 浸出面からの浸出量は 3 モデルとも数パーセントの精度で一致している. 別途, 被圧状態である場合についても解析したが, その時にも二次元定常浸透に関して 3 解析法とも同じ解が得られている.

次にモデル 1 について, スライス面 (XZ 面) の数を増やし, より大きな三次元モデルをシミュレーションする. 節点数が増えてもシミュレーションに用いた境界条件や物性は等しい. モデルの節点数と計算に要した時間 (CPU タイム (CRAY X-MP/18)) および全体マトリックスの占める記憶容量の関係を各々 Fig.8 (a), (b) に SSOR-PCG, PCG の両手法について示す. 全モデルとも収束に至った反復回数はいずれも $IT=4$, $IT_s=32$ である. Fig.8 (a) より, 節点数が少ない間は PCG 法の方が計算時間が速いが, 節点数が増えるに従い SSOR-PCG 法の方が速くなっているのが分かる. また, SSOR-PCG 法の方は節点数と CPU 時間の関係が直線で表わされるのに対し, PCG 法の場合は計算時間が節点数の二乗に比例して増大している. 記憶容量については Fig.8 (b) に示すように SSOR-PCG 法は PCG 法の 3 分の 1 程度に減少していることが判る.

(2) 平行溝の非定常浸透

次に平行に掘られた溝の水位低下にともなう自由水面の経時変化をシミュレートした例を示す. 用いたモデルの幾何形状と境界条件を Fig.9 に, 物性を Table 2 に示す. モデルは $x=40\text{m}$, $y=100\text{m}$, $z=10\text{m}$ の直方体の領域で, YZ 面に対して対称であるためモデルの半分を

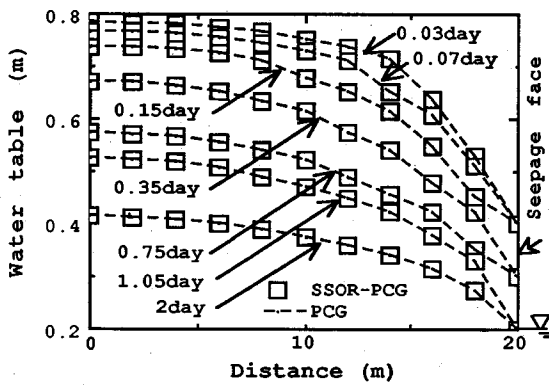


Fig.10 Computed profiles of water table on xz -plane

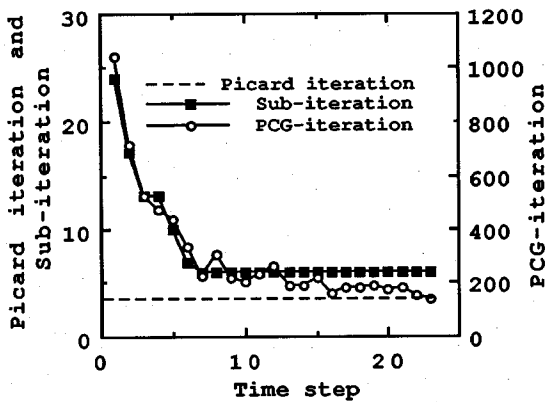


Fig.11 Relation between number of iteration and time step

シミュレーションに用いた、 xz 面を10分割した節点数242 (121×2), 要素数100の2枚の xz 面をスライス面とする三次元メッシュで、マトリックス式のための主記憶容量はSSOR-PCG法で1922ワード、PCG法で3844ワードである。初期の全水頭 $H=8$ mから溝の水位を下げ、全水頭を2 mと一定に保ち、溝間の自由水面の変化を解析する。モデルの上下面および対称面であるYZ面は不透水面とする。モデルは不飽和内の浸透を含み、Picard反復の過程で溝に相当するYZ面上に浸出面があるものとして取り扱う。例(1)と同様 ε_p を0.01 m, ε_s を0.005 m, Ω を1.0とした。対称面から溝までの距離と自由水面の経時的な低下をFig.10に示す。自由水面の低下が時間とともに進行しているのがよく分かる。また、本手法とPCG法は同じ結果を得ている。計算のためのCPU時間(CRAY X-MP/18)はSSOR-PCG法で49.7秒、PCG法で27.0秒であった。

解析に要した反復数の合計は $IT=69$, $IT_s=180$, 各スライス面に関するPCG反復数の合計 $IT_p=6922$ で、Fig.11に各反復数と時間ステップの関係を示す。サブイタレーション IT_s とPCG反復 IT_p はともに時間ステップの進行とともに減少し、特に時間ステップの初期

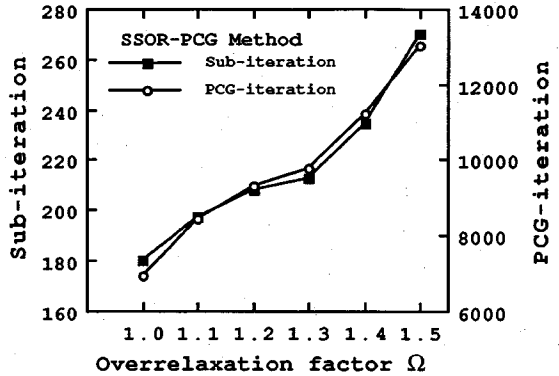


Fig.12 Relation between number of iteration and overrelaxation factor

Table 3. Physical properties used in the simulation of transient flow in raining in a soil

Physical properties	
Saturated hydraulic conductivity, k	10 cm/day
Specific storage, S_s	0.0001 1/m
Porosity, n	0.45
Residual water saturation, S_{rr}	0.333
Maximum rain intensity	50 mm/day
Constitutive relations:	
$S_e = (S_r - S_{rr}) / (1 - S_{rr})$, $\phi < 0$	
$S_e = 1$, $\phi \geq 0$	
$k_r = S_e$	
$\phi = -100(1 - S_r) / (1 - S_{rr})$	

where ϕ ; Pressure head(m) and S_r ; Water saturation

に激減している。

次にオーバーリラクスエーションファクタ、 Ω の影響を見るため、 Ω を1.0~2.0の間で変化させて同じモデルを解析した。反復数と Ω の関係をFig.12に示す。このモデルの場合、 Ω の増加とともに解析に要した反復数が増大している。また、 $\Omega > 1.5$ では解が発散し、解は得られなかった。従って、計算時間に対して Ω は大きな影響を与えるだけでなく、 Ω の選択によっては解が不安定になると考えられる。この解析例では Ω を1.0とした時に、最も速く収束した。一般には、 $1 < \Omega < 1.5$ を選択する。

(3) 降雨浸透問題

降雨浸透による不飽和流の問題を検証するため、Huyakorn et al. (1986)¹⁰と同じモデルを用いて媒質内の水頭分布の経時変化をシミュレーションする。用いたモデルの物性をTable 3に示す。モデルは $x=50$ cm, $y=100$ cm, $z=200$ cmの直方体で、 z 方向に40等分した164 ($41 \times 2 \times 2$) 節点数、40要素数で2枚の xz 面をスライス面とする三次元メッシュで、マトリックス式のための主記憶容量はSSOR-PCG法で968ワード、PCG法で1936ワードである。初期の圧力水頭分布は全領域とも不飽和で $\phi = -97$ cmで、媒体表面は $\phi = -90$ cmに、底面に自由水面が存在するよう底面の圧力水頭を零にする。50 mm/dayの降雨を10日間地表面に与え、そ

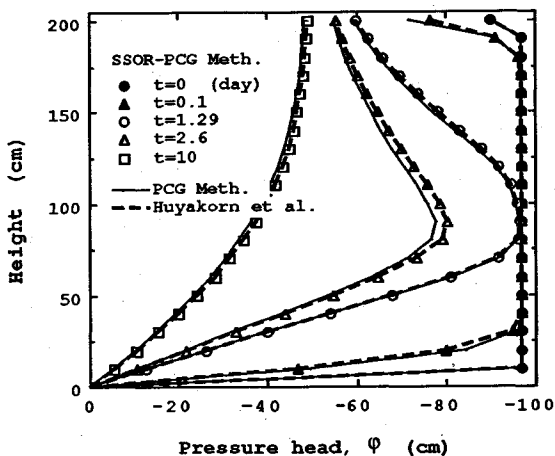


Fig.13 Computed pressure head profiles during infiltration in soil column

の間の水頭分布の経時変化をシミュレーションする。例 (1) と同様 ϵ_p を 0.01 cm, ϵ_s を 0.005 cm, Ω を 1.0 とした。Z 軸に対する圧力水頭分布の経時変化を Fig.13 に示す。不飽和帯内の圧力水頭分布が時間と共に零に近づいている様子がよくわかる。本手法 (SSOR-PCG 法) は三次元の PCG 法の結果とよく一致している。また、Huyakorn et al. (1986) の SSOR 法だけの結果とも一致した。計算のための CPU 時間 (CRAY X-MP/18) は SSOR-PCG 法で 40.4 秒、PCG 法で 11.1 秒であった。

(4) 原位置注水試験

均質な異方性多孔質媒体内への注水に伴う水頭の経時変化は、三次元場のポテンシャル問題として、Hsieh et al. (1985) により理論解が得られている¹³⁾。彼らは、注水源を点とみなしたとき、任意の点での水頭増分の経時変化は式 (13) で与えられることを導いた。

$$\Delta h = \frac{Q}{4\pi\sqrt{G_{xx}}} \text{Erfc} \left(\frac{\sqrt{S_s G_{xx}}}{\sqrt{4Dt}} \right) \dots \dots \dots (13)$$

ここに、 Q : 一定の注水流量, S_s : 比貯留係数,
 k_{ij} : 透水係数テンソル ($i, j=1, 2, 3$),
 $G_{xx} = x^T A x = x_i x_j A_{ij}$, ($i, j=1, 2, 3$),
 $A_{ij} = A_{ji} = k_{i1}k_{j1} - k_{i2}k_{j2}$, $A_{ii} = k_{i1}k_{i1} - k_{i2}k_{i2}$,
 $D = |k| = k_{11}k_{22}k_{33} + 2k_{12}k_{23}k_{31} - k_{11}k_{22}^2$
 $- k_{22}k_{13}^2 - k_{33}k_{12}^2$,

Erfc () : 余誤差関数,

x : 注水点を原点とした時の観測点の座標,

Δh : 時間 t のときの水頭と初期水頭の差

本手法の妥当性を検討するために、原位置の注水試験をシミュレーションし、式 (13) で示される理論解と比較する¹⁴⁾。解析に用いたモデルは、直径 8.6 cm の Z 軸 (鉛直) 方向のボーリング孔を中心とした、半径 $r=1000$ m の円柱状モデルで、帯水層厚が 2000 m の被圧

Table 4 Physical properties used in the simulation of injection test for confined aquifer

Physical properties	
Principal hydraulic conductivity ($\times 10^{-8}$ m/s)	
k_{11}	5.0
k_{22}	1.0
k_{33}	0.5
Specific storage, S_s ($\times 10^{-7}$ 1/m)	
	1.0

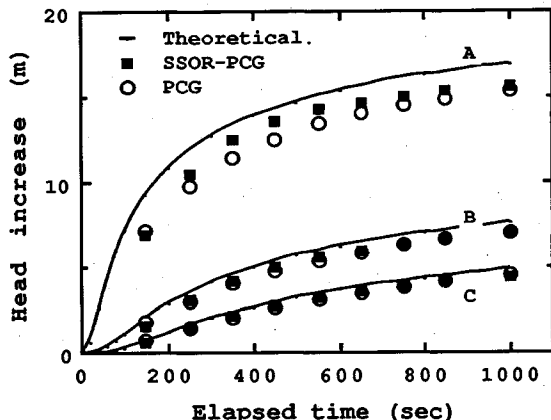


Fig.14 Time history of head increase during water injection test in an anisotropic porous media ; A=(10,0,-950) m, B=(7.1,7.1,-950) m, C=(0,10,-950) m

帯水層モデルである。このモデルを中心を通る 16 枚の鉛直スライス面を放射状に配置した、20832 (42×31×16) 節点、19680 (41×30×16) 要素の三次元メッシュに分割した。各スライス面の一端は孔壁面、他端はモデルの側面を形成する。モデル側面を水頭が一定の境界とした。物性を Table 4 に示す。モデルの中心軸に沿うボーリング孔の深度 950 m の部分に 4 m の注水区間を設定し、一秒当り、 2×10^{-5} m³ の割合で一定量の注水を行って、同一深度の水平距離 10 m 離れた、X 方向、Y 方向および、その中間の 45 度の方向の 3 箇所において、水頭増分の経時変化を計算した。 ϵ_p を 0.01 m, ϵ_s を 0.005 m, Ω は 1.2 とした。マトリックス式のための主記憶容量は SSOR-PCG 法で 180544 ワード、PCG 法で 541632 ワードである。両方法で得られた 3 箇所における水頭増分の経時変化を、式 (13) より求めた理論曲線とともに Fig.14 に示す。Table 4 に示すように、モデルは水理学的な異方性を持つ多孔質媒体であるため、注水区間から等距離にあって方向の異なる観測点の水頭増分の経時変化は各々異なった挙動を示している。式 (13) の理論解は点源を仮定し、実際の注水区間が円柱状をしているのとは異なっているが、SSOR-PCG 法および PCG 法の結果は、理論解とよく一致している。計算に要した CPU 時間 (HP Apollo 9000 モデル 720) は SSOR-PCG 法で 170 分、PCG 法で 189 分であった。

(5) トンネル掘削問題

ここでは本手法の原位置への適用について示すため、

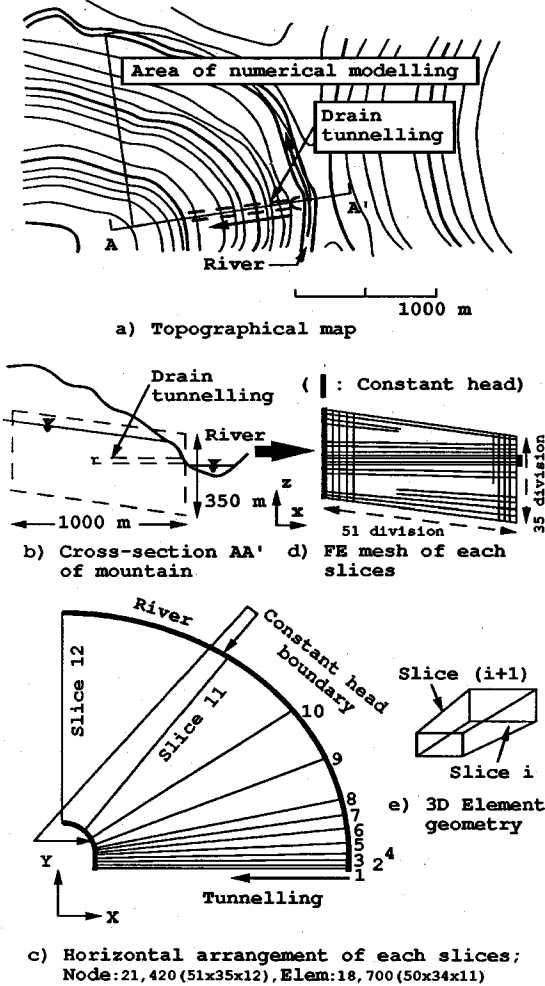


Fig.15 Schematic diagram of tunnel model

Table 5 Physical properties used in the simulation of transient flow in tunnelling through the mountain

Physical properties	
Saturated hydraulic conductivity, k	2.6 m/month
Specific storage, S_s	10^{-7} 1/m
Porosity, n	0.11
Residual water saturation, S_{rr}	0.333
Constitutive relations:	
$S_e = (S_r - S_{rr}) / (1 - S_{rr}), \phi < 0$	
$S_e = 1, \phi \geq 0$	
$kr = S_e$	
$\phi = -100(1 - S_r) / (1 - S_{rr})$	
where ϕ : Pressure head(m) and S_r : Water saturation	

地下発電所建設等にもなる山岳部の排水トンネル掘削による地下水変動がシミュレーションされる。解析に用いたモデルの幾何形状と境界条件を Fig.15 に、物性を Table 5 に示す。モデルは12枚のスライス面から成る 21420 (51×35×12) 節点, 18700 (50×34×11) 要素の三次元メッシュで、マトリックス式のための主記憶容量は SSOR-PCG 法で 186636 ワード, PCG 法で 528802

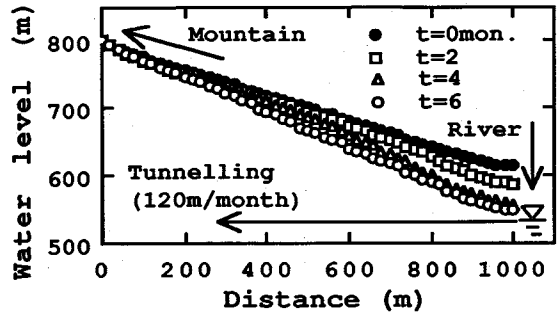


Fig.16 Computed profiles of groundwater level on cross-section AA' of mountain along drain tunnelling

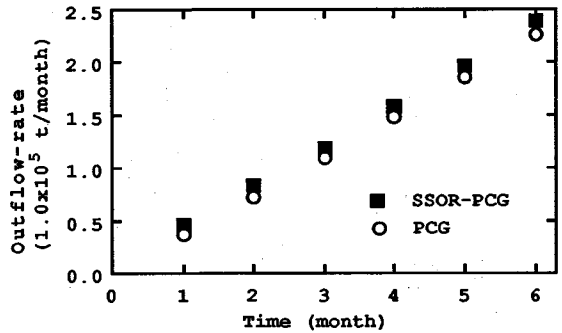


Fig.17 Computed outflow-rate from tunnel surface

ワードである。初期の水頭分布はモデル上面を一定の負圧水頭とした条件下で定常解析により求め、その後直径 10 m のトンネルを月に 120 m の割合で掘進した場合の半年間の水位変動を予測する。解析に用いる ϵ_p を 0.5 m, ϵ_s を 0.1 m, Ω を 1.2 とした。トンネルは裸孔のまま掘削されるものとして、掘削面を浸出境界として取り扱う。トンネル直上の自由水面の経時変化を Fig.16 に示す。また、トンネル掘削面からの湧水量の経時変化を Fig.17 に示す。煩雑さを避けるため、Fig.16 には PCG 法の結果は省略したが、本方法とよく一致していた。このようにトンネル掘削にともなう地下水の低下および湧水量について三次元的な定量予測が可能であることが判る。計算に要した CPU 時間 (HP Apollo 9000 モデル 720) は SSOR-PCG 法で 334 分, PCG 法で 408 分であった。

5. 結 論

飽和・不飽和を含む多孔質媒体の三次元浸透解析モデルとして SSOR 法と PCG 法を組み合わせた SSOR-PCG 法を用いた有限要素モデルを開発し、五つの例題の解析を通じて本手法の妥当性と性能を検討した。ここで得た結論を以下にまとめる。

1) 三次元浸透解析モデルに SSOR-PCG 法を用いた多重反復による FEM 解析の手順を示した。

2) SSOR-PCG 法を用いた三次元浸透解析は従来のものと同様の精度で解が求められることが分かった。

3) SSOR-PCG 法を用いると三次元の有限要素定式化された透水マトリックスを独立な複数のスライス面に関するマトリックス式に分割し、二次元の各マトリックス式を独立に解くことができる。本手法は透水マトリックスのための記憶容量を大幅に減少させることができる。三次元解析に直接、PCG 法を用いた場合の 1/3 に、また外部記憶を用いるときには、スライス面の数を N_s とすると、 $2/(3N_s)$ まで特別なアルゴリズムを用いなくて主記憶容量を縮小することが可能である。

4) また、節点数が 2 万点を超える比較的大きな問題では、本解析法は PCG 法に比べ、主記憶容量だけでなく、CPU 時間を削減できることが判った。

本解析手法では、三次元 FEM モデルを多数のスライス面に分割し、各スライス面に関する浸透の方程式を独立に解くため、内部での解法に並列演算処理の適用がきわめて容易になる。この並列演算処理方法を用いると演算時間は大幅に小さくなる可能性がある。したがって、今後は並列演算処理に本研究で開発した方法を拡張していく予定である。

謝 辞

本研究を行うにあたり、京都大学、大西有三助教授には有益なご助言とご指導をいただきました。また、(株)CRC 総合研究所にはコンピュータ使用に際し、いろいろと便宜を図って頂いたことをここに記して謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Freeze, R. A. : Three-dimensional, transient, saturated-unsaturated flow in a groundwater basin, *Water Resour. Res.*, Vol.7, No.2, pp.347~366, 1971.
- 2) Narasimhan, T. N. and P. A. Witherspoon : An integrated finite difference method for analyzing fluid flow in porous media, *Water Resour. Res.*, Vol.12, No.2, pp.57~64, 1976.
- 3) Segol, G. : A three-dimensional Galerkin-finite element

- model for the analysis of contaminant transport in saturated-unsaturated porous media, in *Finite Elements in Water Resources*, edited by W. G. Gray, G. F. Pinder, and C. A. Brebbia, pp.2.123~2.144, Pentech, London, 1977.
- 4) Frind, E. O., and M. J. Verge : Three-dimensional modeling of groundwater flow systems, *Water Resour. Res.*, Vol.14, No.5, pp.844~856, 1978.
- 5) Akai, K., Y. Ohnishi, and M. Nishigaki : Finite element analysis of three-dimensional flow in saturated-unsaturated soil, 3rd Int'l Conf. on Numerical Methods in Geomech., Aachen, 1979.
- 6) 戸川隼人 : 共役勾配法, 教育出版, pp.5~41, 1977.
- 7) Hill, M. C. : Solving groundwater flow problems by conjugate-gradient methods and the strongly implicit procedure, *Water Resources Res.*, Vol.26, No.9, pp.1961~1969, 1990.
- 8) 西垣・白石・河野 : 有限要素法による飽和-不飽和領域内の三次元浸透解析の改良, 第 22 回土質工学研究発表会論文集, pp.1581~1582, 1987.
- 9) 西垣・白石・猪瀬・河村 : 地下鉄建設による多層地盤での複数地下水位変動の 3 次元浸透解析による予測, 地下水学会誌, 第 32 巻, pp.231~240, 1990.
- 10) Huyakorn, P. S., E. P. Springer, V. Guvanasen and T. D. Wadsworth : A three dimensional finite-element model for simulating water flow in variably saturated porous media, *Water Res. Res.*, Vol.22, No.13, pp.1790~1808, 1986.
- 11) Yeh, G.T. : A subregion block iteration to 3-D finite element modeling of subsurface flow, *Proceedings of the VII International Conf., MIT, USA, June*, pp.133~138, 1988.
- 12) 大西有三・西垣 誠・西野賢治 : 地盤浸透の新しい準三次元解析手法に関する基礎的研究, 土木学会論文集, 第 424 号/III-14, pp.85~96, 1990.
- 13) Hsieh, P. A. and S. P. Neuman : Field determination of the three-dimensional hydraulic conductivity tensor of anisotropic media, 1 Theory, *Water Resources Research*, Vol.21, No.11, pp.1655~1665, 1985.
- 14) 中屋真司・西垣 誠・河野一郎 : 亀裂情報を利用したクロスホール法による岩盤の三次元透水パラメータの測定法, 第 24 回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集, pp.41~45, 1992.

(1991.8.30 受付)

A THREE DIMENSIONAL FINITE ELEMENT METHOD FOR SEEPAGE THROUGH A SATURATED/UNSATURATED POROUS MEDIA BY USING SSOR-PCG METHOD

Makoto NISHIGAKI, Shinji NAKAYA and Ichirou KONO

In this paper a new numerical method to analyze a three-dimensional seepage in saturated / unsaturated porous media is proposed. This method bases on SSOR-PCG method. This method consists of slice successive overrelaxation (SSOR) and preconditioned conjugate gradient (PCG) method ; the former is used for transformation from a three-dimensional finite element mesh to two-dimensional mesh slices and the later is able to solve the matrix-equation for each slices efficiently. The validity and performances are verified through the five kinds of three-dimensional seepage problems. Applying this model to simulate three-dimensional seepage flow problems, computer storage is explosively reduced compared with conventional numerical models and more reasonable analysis is realized.