

薄層要素法による二相系飽和地盤の動的応答解析

風間基樹*・野上仁昭**

本研究では、薄層要素法を二相系飽和地盤に適用し、土粒子および間隙流体の両者の動きを考慮できる薄層要素を開発した。この薄層要素を用いて、排水条件や地盤の透水性の違いが飽和地盤の波動伝播特性及び動的剛性に及ぼす影響を検討した。その結果、動的荷重下の飽和地盤の応答は、間隙流体の体積弾性係数および荷重の載荷速度と地盤の透水係数の相対的關係によって決まることを明らかにした。

Keywords : *thin layered element, fluid saturated two-phase media, permeability, dynamic stiffness, wave propagation*

1. ま え が き

水面下の地盤や海底地盤は、水で飽和しているため土の工学的性質は土粒子骨格自身のみの性質では決まらず、水との相互作用が大きく関係する。粘土地盤の圧密現象や砂地盤の液状化現象などは、土粒子と間隙水の相互作用が関係する代表的な例である。飽和地盤の動的応答を検討する場合も例外ではなく、土粒子と水の両者の動きを考慮する必要があると考えられる。

Solid (固相) と Fluid (液相) の二相から成る多孔質弾性体の基礎理論は、Biot によって作られたものである。Biot は、まず、三次元圧密理論において多孔質弾性体の線形構成関係を示し¹⁾、後に、慣性項を導入し、多孔質弾性体の波動方程式を示した²⁾。これらの研究は、有効応力の原理と多孔質弾性体の線形構成式の間係を検討したものを見なすこともできる。Zienkiewicz らは、Biot の式を一般化するとともに、計算の簡便化のため対象とする現象に応じて導入される種々の仮定の妥当性について検討している^{3), 4)}。ここで言う種々の仮定とは、例えば、圧密現象では、慣性項が無視されるし、比較的透水性の小さな地盤に急速に荷重が加わる場合には、非排水として取り扱われることなどである。

二相系飽和地盤の動的解析には、飽和地盤中を伝播する波の特性⁵⁾、飽和地盤の点加振による変位解を求めたもの⁶⁾、地震や波浪による液状化⁷⁾を取り扱ったものなどがある。これらの研究は、使用する構成式の違い(線形、非線形)、解析の方法、先に述べた解析に用いる基礎方程式によって分類することもできる。解析に使用する構成式としては、線形のものでも有効応力の定義の仕

方によって異なる⁸⁾。また、液状化解析では通常ダイレタンシー特性なども含めて、非線形の取り扱いが行われることが多い⁹⁾。しかし、一般に二相系の基礎方程式を解析的に解くことが困難なため解析解は単純な場合しか得られていない^{5), 10)}。したがって、複雑な問題の解析には、FEM などの数値解析法を用いることになる^{11), 12)}。

一方、多層成層地盤中を伝播する波動の解析法として薄層要素法がある¹³⁾⁻¹⁵⁾。この方法では、半無限地盤中へ逸散する波を取り扱えるため、エネルギー伝達境界としても使用されている。しかし、これら薄層要素は一相系地盤に適用されているものである。

本研究は、間隙流体で飽和した地盤の動的応答が乾燥地盤のそれとどのように異なるかを薄層要素法を用いて検討したものである。本研究では、間隙流体の動きを考慮するため、地盤を土粒子と間隙流体から成る二相系地盤として取り扱った。まず、省略のない Biot の二相系の基礎方程式に薄層要素法を適用し、間隙流体の排水を考慮できる飽和地盤の薄層要素を開発した。次に、開発した薄層要素を用いて排水条件や地盤の透水性の変化が地盤の動的応答に及ぼす効果を検討した。

2. 基礎方程式

土を土粒子骨格 (Solid) と間隙流体 (Fluid) から成る二相系の媒体と見なし、動的荷重下における地盤の動的応答を支配する方程式を示す。なお、土の間隙はすべて流体で満たされているものとし、土は等方の多孔質弾性体として取り扱っている。また、本文中での“土”という用語は、土粒子と間隙流体を加えた混合体を意味するものとして使用した。

(1) 二相系飽和地盤の運動方程式

Biot の二相系飽和地盤に対する運動方程式は土粒子と間隙流体を加えた混合体に対する運動方程式と間隙流体に対する運動方程式から成り、次のように表される²⁾。

* 正会員 運輸省港湾技術研究所 構造部 主任研究官
(〒239 横須賀市長瀬 3-1-1)

** Ph. D. カリフォルニア大学サンディエゴ校 スクリプス
海洋研究所

$$L^T \sigma + \rho b = +\rho \ddot{u} + \rho_f \ddot{w} \dots\dots\dots (1)$$

$$\nabla \pi + \rho_f b = k^{-1} \dot{w} + \rho_f \ddot{u} + (\rho_f/n) \dot{w} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 ρ は土の密度、 ρ_f は間隙流体の密度、 n は間隙率、 π は間隙圧力である。また、 u は土粒子の絶対変位ベクトル、 w は間隙流体の土粒子に対する平均相対変位ベクトルで、間隙流体の絶対変位ベクトルを U とすれば、 w は次式で表される。

$$w = n(U - u) \dots\dots\dots (3)$$

また、 σ は土に作用する全応力ベクトル、 b は物体力ベクトルで、地球上では重力加速度を g とすれば、 $b^T = [0, 0, g]$ である。 $\dot{}$ は時間についての微分を表し、演算子 ∇^T 、 L^T は直交座標系の場合、以下のとおりである。

$$\nabla^T = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \dots\dots\dots (4)$$

$$L^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5)$$

また、 $k^{-1}\dot{w}$ は、ダルシーの法則から間隙流体の土粒子に対する相対速度が動水勾配に比例すると考えて誘導することができ、 k は透水係数 k_0 を流体の単位体積重量で除したものである。すなわち、

$$k = k_0 / \rho_f g \dots\dots\dots (6)$$

である。なお、一般には透水性には方向性があり、ベクトル量として表されるが、以下では透水係数の方向性は考慮しないこととした。

(2) 二層系飽和地盤の弾性構成式

土の間隙中に流体が存在するとき、土に作用する全応力 σ は、有効応力 σ' と間隙圧力 π に分けて考えることができる。

$$\sigma = \sigma' + m\pi \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $m^T = [1, 1, 1, 0, 0, 0]$ である。

次に、Biot^{1),10)}にしたがって、土粒子骨格の全ひずみが間隙圧力による平均ひずみ成分と有効ひずみ成分(間隙圧力以外の応力によって生じたひずみ)の和によって表されるとすれば、全応力および間隙圧力は、

$$\sigma = D Lu + \alpha m \pi \dots\dots\dots (8)$$

$$\pi = \alpha Q m^T Lu + Q \nabla^T w \dots\dots\dots (9)$$

と書ける。ここに、

$$D = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ \text{symm.} & & & & G & 0 \\ & & & & & G \end{bmatrix} \dots\dots\dots (10)$$

λ, G は、ラメの定数であり、 α, Q は次式を満たす。

$$\alpha = 1 - m^T D m / 3 K_s \dots\dots\dots (11)$$

$$1/Q = 1/K_f + (\alpha - n)/K_s \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 K_s は土粒子の体積弾性係数、 K_f は間隙流体の体積弾性係数である。

(3) 解析に用いる基礎方程式 (u-w Form)

単位の土要素および間隙流体に作用している力の釣合式は、式(8)、(9)を式(1)、(2)に代入し、変数 u, w について整理して式(13)~(16)となる。

$$[K] \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} - [C] \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} - [M] \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} L^T (D + \alpha^2 Q m m^T) L & \alpha Q \nabla^T \\ \alpha Q \nabla^T & Q \nabla^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (15)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \rho & \rho_f \\ \rho_f & \rho_f/n \end{bmatrix} \dots\dots\dots (16)$$

なお、式(14)中では、 $\nabla^2 = \nabla \nabla^T$ であり、静的な釣合が動的な釣合に影響を与えないと考え物体力は省略した。上式は、二相系地盤の波動方程式である。また、応力と間隙圧力は、式(8)、(9)から次のように書ける。

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \pi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (D + \alpha^2 Q m m^T) L & \alpha Q m \nabla^T \\ \alpha Q \nabla^T & Q \nabla^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (17)$$

以上の弾性構成式および基礎方程式は、Simonらの文献によった¹⁰⁾。

(4) 非排水条件の基礎方程式 (Undrain Form)

非排水状態では、間隙流体の土粒子に対する相対変位量 w が0と考えればよいので、運動方程式は、式(13)において w に関する項を無視し、

$$L^T (D + \alpha^2 Q m m^T) Lu - \rho \ddot{u} = 0 \dots\dots\dots (18)$$

となる。また応力と間隙圧力は、式(17)より

$$\sigma = (D + \alpha^2 Q m m^T) Lu \dots\dots\dots (19)$$

$$\pi = \alpha Q \nabla^T u \dots\dots\dots (20)$$

となる。したがって、乾燥地盤の解析との違いは通常の応力-ひずみマトリックス D を $D + \alpha^2 Q m m^T$ におきかえ、さらに間隙圧力を評価できる所にある。

ここで、非排水条件のマトリックス $D + \alpha^2 Q m m^T$ の意味を考えてみよう。 $D + \alpha^2 Q m m^T$ を作ると、

$$D + \alpha^2 Q m m^T = \begin{bmatrix} \lambda + 2G + \alpha^2 Q & \lambda + \alpha^2 Q & \lambda + \alpha^2 Q & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2G + \alpha^2 Q & \lambda + \alpha^2 Q & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2G + \alpha^2 Q & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ \text{symm.} & & & & G & 0 \\ & & & & & G \end{bmatrix} \dots\dots\dots (21)$$

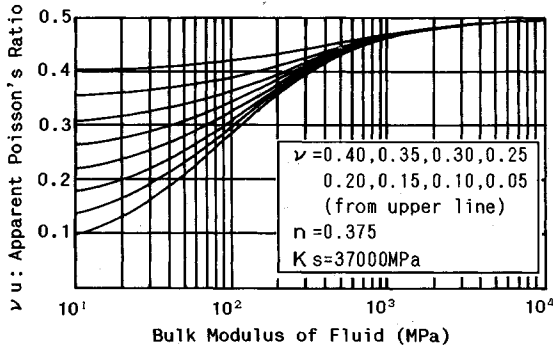


Fig.1 Relation between the bulk modulus of fluid material and apparent Poisson's ratio under undrained condition.

ここで、非排水条件のラムの定数を $\lambda_u = \lambda + \alpha^2 Q$ と定義すれば、非排水条件では乾燥地盤の D マトリックス中の λ を λ_u に置き換えればよいことになる。また、 λ はポアソン比 ν とせん断弾性係数 G を用いて、

$$\lambda = G \cdot 2\nu / (1 - 2\nu) \dots\dots\dots(22)$$

と書けるので、改めて非排水条件下のポアソン比 ν_u を用いて λ_u を表すと、

$$\lambda_u = \lambda + \alpha^2 Q = G \cdot 2\nu_u / (1 - 2\nu_u) \dots\dots\dots(23)$$

と書ける。

ちなみに、水の体積弾性係数 $2.08 \times 10^5 \text{ tf/m}^2$ (2080 MPa)、土粒子の体積弾性係数 $3.7 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$ (37000 MPa)⁵⁾、土中を伝わるせん断波の速度 200 m/s 、土の密度 2.0 t/m^3 、間隙率 0.375 とし、 $\nu = 0.25$ とすれば、非排水条件下の飽和地盤の見かけのポアソン比 λ_u は約 0.48 となる。Fig.1 に、乾燥地盤のポアソン比を 0.05 から 0.4 まで変化させた場合の流体の体積弾性係数と見かけのポアソン比の関係を示す。非排水条件下では、見かけ上乾燥地盤のポアソン比を大きくすることと等価であることがわかる。

なお、式 (13) 中で w を無視して得られる間隙流体に関する第二式 $\alpha Q \nabla^2 u - \rho \ddot{u} = 0$ は、不要である。なぜなら、非排水条件では土粒子骨格と間隙流体は一体となって動くと考えているため、間隙流体の運動だけ個別に考えることは無意味だからである。また、本研究の計算では取り扱っていないが、流体のみを考慮する場合には、間隙比 $n=1$ とし、式 (18) 中で土粒子に関する変数を無視すればよい。

3. 薄層要素法の二相系の基礎方程式への適用

本章では、薄層要素法の二相系の波動方程式への適用について述べる。なお、定式化は三次元で行われているが、以下では、 xz 面内の平面ひずみ状態を考えると、変位も xz 面内で x の正方向に伝播するものを考える。したがって、ここでは多層飽和地盤中を伝播する Rayleigh Wave を考えていることになる。

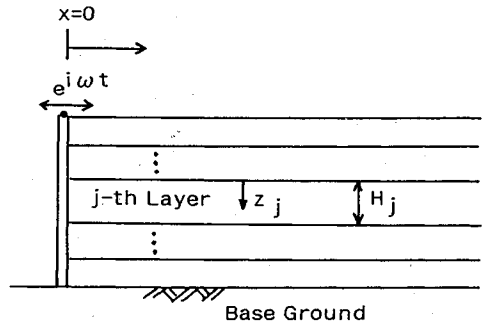


Fig.2 The system used in numerical studies.

(1) 変位の表現

半無限弾性体の表面下向きに Z 軸をとり、表面を $Z=0$ 面とする。また、波動の地表面に沿っての進行方向を x 軸にとる (Fig.2 参照)。

地盤は、深さ方向に L 層の薄層要素に分割されており、第 j 層上面における土粒子の変位を u_j 、間隙流体の土粒子に対する相対変位を w_j とする。

各層中の変位の変化は、上端と下端の変位を線形補間するものとすれば、第 j 層の変位は形状関数 $[M]_j$ を用いて、次のように表される。

$$u(x, z)_j = \exp(i\omega t) [H] [M]_j (u)_{j,j+1} \dots\dots\dots(24)$$

$$(u)^T_{j,j+1} = [u_j, w_j, u_{j+1}, w_{j+1}]$$

ここに、 ω は角振動数である。また、 $[H]$ は $[I]$ を単位行列、 h を波数とすれば、

$$[H] = \exp(-ihx) [I] \dots\dots\dots(25)$$

である。また、 H_j を第 j 層の層厚、 z_j を第 j 層上面を原点とする下向き部分座標とすれば、形状関数は、

$$[M]_j = [(\eta - 1)I, \eta I] \dots\dots\dots(26)$$

であり、 $\eta = z_j/H_j$ は、 0 から 1 の間を変化する。

(2) Galerkin 法による離散化した変位の決定

対象とする地盤の土と間隙流体は、式 (13) の基礎方程式を満たす。また、深さ方向に薄層に分割した各地盤要素は、境界面 s 上に作用する応力および間隙圧力と釣り合う。Galerkin 法にしたがって、基礎方程式および境界条件式の前から離散化に用いた形状関数 $[HM]$ の共役転置行列 $[HM]^T$ を乗じ、領域内で積分し、それを 0 とおくと、各層の変位ベクトルは次式を満たす。

$$\sum_{j=1}^L \left[\int_V [M]^T [H]^T [W] dV - \oint_s [M]^T [H]^T \{ \sigma_s \} ds \right] = 0 \dots\dots\dots(27)$$

ここで、 $[W]$ は二相系地盤の波動方程式で、

$$[W] = ([K] - i\omega[C] + \omega^2[M]) [H] [M]_j (u)_{j,j+1} \dots\dots\dots(28)$$

である。また、境界 s 上に作用する応力は分割された境界面上に作用する応力と間隙圧力を考えればよいから、

$$\{ \sigma_s \}^T = [\tau_{xz}, \sigma_z, 0, \pi] \dots\dots\dots(29)$$

である。式 (27) の積分を行うと、結局解ベクトル ϕ

に関する次の固有方程式に帰着する。

$$(h^2[A] + ih[B] + [E])\{\phi\} = 0 \dots\dots\dots(30)$$

ここで、[A]、[B]、[E]は、式(31)~(36)で示される各薄層要素のサブマトリックス[A]_j、[B]_j、[E]_jを重ね合わせて作られる。

$$[A]_j = \begin{matrix} H_j/6 & \begin{bmatrix} 2(\lambda_u+2G) & 0 & 2\alpha Q & 0 & \lambda_u+2G & 0 & \alpha Q & 0 \\ 0 & 2G & 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 2\alpha Q & 0 & 2Q & 0 & \alpha Q & 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_u+2G & 0 & \alpha Q & 0 & 2(\lambda_u+2G) & 0 & 2\alpha Q & 0 \\ 0 & G & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ \alpha Q & 0 & Q & 0 & 2\alpha Q & 0 & 2Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \dots\dots\dots(31)$$

$$[B]_j = [F]^T_j - [F]_j \dots\dots\dots(32)$$

$$[F]_j = \begin{matrix} 1/2 & \begin{bmatrix} 0 & \lambda_u & 0 & \alpha Q & 0 & -\lambda_u & 0 & -\alpha Q \\ G & 0 & 0 & 0 & -G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha Q & 0 & Q & 0 & -\alpha Q & 0 & -Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_u & 0 & \alpha Q & 0 & -\lambda_u & 0 & -\alpha Q \\ G & 0 & 0 & 0 & -G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha Q & 0 & Q & 0 & -\alpha Q & 0 & -Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \dots\dots\dots(33)$$

$$[E]_j = [Ek]_j + i\omega[Ec]_j - \omega^2[Em]_j \dots\dots\dots(34)$$

$$[Ek]_j = \begin{matrix} 1/H_j & \begin{bmatrix} G & 0 & 0 & 0 & -G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_u+2G & 0 & \alpha Q & 0 & -\lambda_u-2G & 0 & -\alpha Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha Q & 0 & Q & 0 & -\alpha Q & 0 & -Q \\ -G & 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_u-2G & 0 & -\alpha Q & 0 & \lambda_u+2G & 0 & \alpha Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha Q & 0 & -Q & 0 & \alpha Q & 0 & Q \end{bmatrix} \end{matrix} \dots\dots\dots(35)$$

$$[Ec]_j = \begin{matrix} H_j/6 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k^{-1} & 0 & 0 & 0 & k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2k^{-1} & 0 & 0 & 0 & k^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^{-1} & 0 & 0 & 0 & 2k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^{-1} & 0 & 0 & 0 & 2k^{-1} \end{bmatrix} \end{matrix} \dots\dots\dots(36)$$

$$[Em]_j =$$

$$H_j/6 \begin{bmatrix} 2\rho & 0 & 2\rho_f & 0 & \rho & 0 & \rho_f & 0 \\ 0 & 2\rho & 0 & 2\rho_f & 0 & \rho & 0 & \rho_f \\ 2\rho_f & 0 & 2\rho_f/n & 0 & \rho_f & 0 & \rho_f/n & 0 \\ 0 & 2\rho_f & 0 & 2\rho_f/n & 0 & \rho_f & 0 & \rho_f/n \\ \rho & 0 & \rho_f & 0 & 2\rho & 0 & 2\rho_f & 0 \\ 0 & \rho & 0 & \rho_f & 0 & 2\rho & 0 & 2\rho_f \\ \rho_f & 0 & \rho_f/n & 0 & 2\rho_f & 0 & 2\rho_f/n & 0 \\ 0 & \rho_f & 0 & \rho_f/n & 0 & 2\rho_f & 0 & 2\rho_f/n \end{bmatrix} \dots\dots\dots(37)$$

なお、各要素マトリックスは、 $\phi_j^T = [\phi u x_j, \phi u z_j, \phi w x_j, \phi w z_j, \phi u x_{j+1}, \phi u z_{j+1}, \phi w x_{j+1}, \phi w z_{j+1}]$ に対応するものとして示し、要素内の変数の添字 *j* は省略した。

また、数値計算上、固有値を求める行列は、

$$\begin{bmatrix} [E]^{-1}[B] & [E]^{-1}[A] \\ [I] & [0] \end{bmatrix} \dots\dots\dots(38)$$

であり、固有値は *i/h* となる。ただし、マトリックス[A]の $\phi w z$ に対応する行と列はすべて0となるため、実際の固有値計算に使用する行列の大きさは、全自由度の2倍から、間隙流体の *z* 方向の自由度を減じたものとなることに注意されたい。なお、求められる固有値は、土粒子の自由度を *Ms*、間隙流体の *x* 方向の自由度を *M_{wx}*、間隙流体の *z* 方向の自由度を *M_{wz}* とすれば、*s* = (*Ms* + *M_{wx}*) 個の共役の組と *M_{wz}* 個の0の解となる。この求められた *2s* 個の固有値のうち、*x* → ∞ で変位モードが0となるモードのみを選択し半分の *s* 個とする。

固有値に対応する *s* 個の固有ベクトルが求められると各層上面の変位は、

$$\{u\} = [\phi] \{a \exp(-ihx)\} \dots\dots\dots(39)$$

と書ける。ここに、[φ]は固有ベクトルから成るマトリックスで

$$[\phi] = \begin{bmatrix} \phi u x_1 & \dots & \phi u x_s \\ \phi u z_1 & \dots & \phi u z_s \\ \phi w x_1 & \dots & \phi w x_s \\ \phi w z_1 & \dots & \phi w z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_m \\ \phi w z \end{bmatrix} \dots\dots\dots(40)$$

$\{a \exp(-ihx)\}^T = \{a_1 \exp(-ih_1x), \dots, a_s \exp(-ih_sx)\}$ である。また、*u_x* ~ *w_z*、 $\phi u x_1$ ~ $\phi w z_s$ は *L* 個の列ベクトル、*a* は重み係数、 ϕ_m は *s* × *s* の正方行列である。

(3) 薄層要素地盤の剛性マトリックス

x = 0 面における応力と節点力の釣合を考え、*x* = 0 面における薄層要素地盤の節点力-節点変位関係を求める。*x* = 0 面における第 *j* 層、第 *s* 次のモードによる応力と節点力の関係は、

$$\{P\}_{j,s} = -a_s \int_0^H [N]_j^T \{\sigma\}_{x=0} \{s\}_{j,s} dz \dots\dots\dots(41)$$

$$\{P\}^T = [P_{z0}, P_{z0}, P_{\pi}]$$

$$\{\sigma\}_{x=0}^T = [\sigma_x, \sigma_{xz}, \pi]$$

と表される。第1次からすべてのモードまで応力と節点力の関係を第1層から第L層まで重ね合わせると、地盤全体の節点力と節点変位の関係

$$\{P\} = [R] \{u |_{x=0}\} \dots\dots\dots (42)$$

が求められる。ここで、

$$[R] = (i[A][\phi][h] + [F][\phi])[\phi_m]^{-1} \dots\dots\dots (43)$$

であり、 $[h]$ は波数から成る対角マトリックス、 $[F]$ は式(33)で示される各薄層要素のサブマトリックスを重ね合わせて作成されるマトリックスである。

4. 解析結果

ここでは、簡単のため $x=0$ 面に矢板(杭)を挿入し、その頂部を定常水平加振することを考える。この杭頭加振力は、 $x=0$ 面における鉛直水平全応力に対応する荷重である。また、このとき地盤に発生する間隙圧力は未知である。したがって、ここでは $x=0$ 面においては杭によって水平方向に止水されていると考え、 $u_x=0$ なる境界条件を導入する。また、水平杭頭加振によって地盤の z 方向に荷重が伝わらないものとするれば、式(42)の $x=0$ における半無限飽和地盤の荷重-変位関係は、縮約され、

$$\{P_{xy}\} = [R_g] \{u_x\} \dots\dots\dots (44)$$

となる。したがって、杭自身の水平節点力 P_x とモーメント M_p -節点水平変位 u_x 、回転角 θ_p の関係を、

$$\begin{Bmatrix} P_x \\ M_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{p11} & R_{p12} \\ R_{p21} & R_{p22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ \theta_p \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (45)$$

と書けば、杭-半無限地盤系の節点力-節点変位関係は、

$$\begin{Bmatrix} P_x + P_{xy} \\ M_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{p11} + R_g & R_{p12} \\ R_{p21} & R_{p22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ \theta_p \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (46)$$

と書ける。なお、以下の計算に使用した杭の曲げ剛性 EI は $2.0 \times 10^4 \text{ tfm}^2$ (200 MNm^2)、質量密度 ρ_p は 2.0 t/m^3 とし、杭の動的剛性マトリックスは、整合マトリックスを用いた。また、間隙流体として水を想定し、体積弾性係数として $2.08 \times 10^5 \text{ tf/m}^2$ (2080 MPa) を用いた。なお、以下に示す数値計算は、倍精度で実施したものである。

(2) 波動伝播特性

固有方程式は、無次元振動数 $\omega H/V_s$ を決めると解くことができ、固有値から無次元波数 hH を求めることができる。ここで、 H は地盤の層厚、 V_s は地盤のせん断波速度である。求められた各固有モードは、 x 方向に $\exp(-ihx)$ なる関数で変化する。したがって、関数の性質から次のようなことがわかる。

- ① hH の虚数部の符号が負になる場合に $x \rightarrow \infty$ で変位 $\rightarrow 0$ という条件を満たす。
- ② hH が純虚数のとき変位は x 方向に波動的性質を

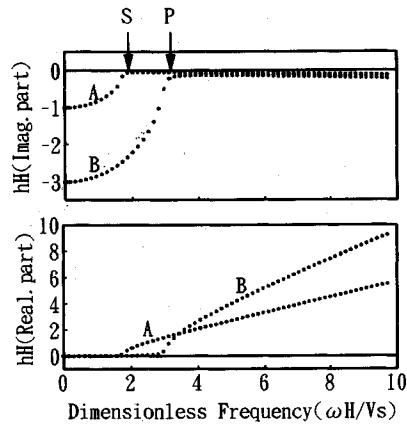


Fig.3 Relation between dimensionless frequency ($\omega H/V_s$) and dimensionless wave number under dry condition.

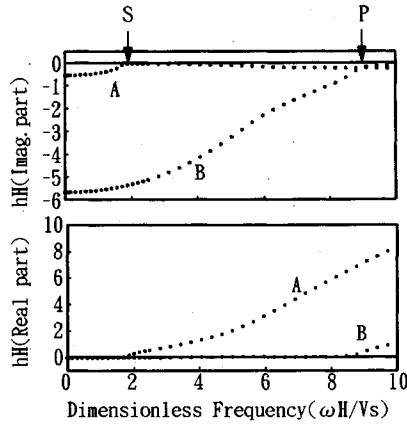


Fig.4 Relation between dimensionless frequency ($\omega H/V_s$) and dimensionless wave number (hH) under undrained condition.

示さず、単調に減衰するだけとなる。

- ③ 虚数部の絶対値が大きいほど x 方向に減衰が早くなる。
- ④ 波長は、 $2\pi/h$ であるから、波数が大きいほど波長の短い波となる。
- ⑤ hH が 0 となるとき、変位は x 方向に変化せず z 方向のみの関数となる。この時の振動数は、鉛直方向に伝わる P 波および S 波の固有振動数を示している。

Fig.3 は、剛基盤上に一様な乾燥地盤 ($\nu=0.25$) がある場合の $hH \sim \omega H/V_s$ 関係を示したものである。計算では、地盤を一層としているため、この場合 A, B 二つの波のモードが現れる。0 Hz から P 波および S 波の固有振動数までは、 hH は純虚数となり、地盤変位は x 方向に波動的性質を示さない。

a) 非排水条件下の性状

Fig.4 は、非排水条件下での $hH \sim \omega H/V_s$ 関係を示し

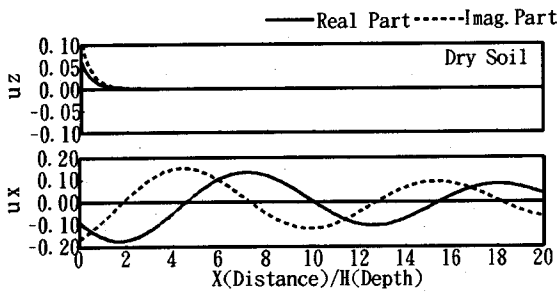


Fig.5 Displacement amplitude at various distance from loading point along the ground surface under dry and undrained condition ($\omega H/V_s=2$).

たものである。同図は、Fig.3で示した乾燥地盤の間隙を水で飽和させた場合に相当する。

まず、 $(hH)=0$ となる振動数(すなわちP波およびS波の固有振動数)を比較すると、S波の固有振動数は、飽和地盤でも乾燥地盤でも同じとなる。これは、水の存在によって、せん断剛性が変化しないからである。一方、P波の固有振動数は、非排水飽和地盤の方が乾燥地盤より大きくなる。これは、水の体積剛性によって地盤全体の体積剛性が増加するためである。

Fig.5は、地表面の変位のx軸に沿った変化の様子を示したものである。図の無次元振動数は、 $\omega H/V_s=2$ である。 $\nu=0.25$ の場合には、固有方程式の上下と水平の連成項がなくなるため、水平方向と上下方向のモードは連成しない。このため、それぞれの方向で単一のモードの波が伝播する。z方向変位においては、x方向に波動的性質を示さず単調にしかもすぐ減衰するBのモードだけとなる。非排水条件($\nu_w=0.48$)になると、水平方向と上下方向のモードは連成し、それぞれの方向の変位はA、Bの2つのモードを重ね合わせたものとなる。Aのモードは、乾燥地盤の場合よりも波長が長くなり、減衰が小さくなる。一方、Bのモードは、 u_z の振幅変化に見られるように、乾燥地盤の場合よりも減衰の仕方が大きくなる。このように、非排水状態になると遠方に伝わり安い波長の長いモードAとすぐ減衰してしまう波長の短いモードBの差が大きく現れてくる。

b) 地盤の透水性の影響

排水状態と非排水状態との差は、間隙流体の土粒子に対する相対変位を許すか許さないかにある。また、排水状態では、間隙流体の土粒子に対する相対変位を許すことによって、土粒子と間隙流体の間に相互作用力が現れる。この力は流体が土粒子の骨格中を流れるとき生じる粘性抵抗力であり、透水係数に反比例する力として表されている。したがって、排水状態で透水係数を限りなく小さくすると、非排水状態に収束していくと考えられる。

Fig.6, 7は、透水係数が 10^{-1} m/sと 10^{-3} m/sの場合の $hH \sim \omega H/V_s$ 関係を示したものである。排水条件下

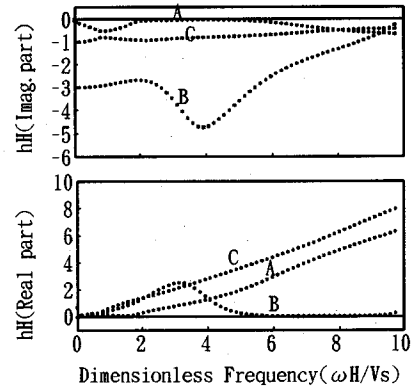
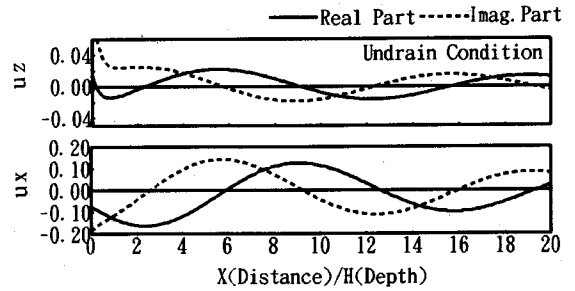


Fig.6 Relation between dimensionless frequency ($\omega H/V_s$) and dimensionless wave number (hH) under drained condition ($k_0=10^{-1}$ m/s).

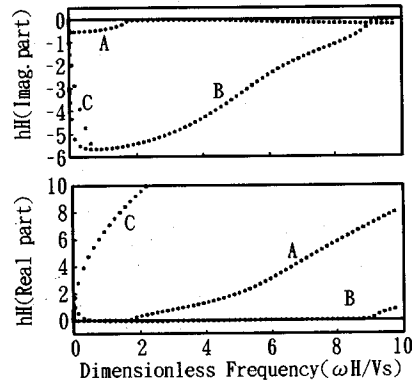


Fig.7 Relation between dimensionless frequency ($\omega H/V_s$) and dimensionless wave number (hH) under drained condition ($k_0=10^{-3}$ m/s).

では、間隙流体の動きの存在によって、新たにもう一つのモードCが現れる。これらの図と非排水状態のFig.4を比較すると、透水係数が 10^{-3} m/sの方が非排水状態に近い。特に 10^{-3} m/sの場合には、振動数の非常に低い所を除いて求められた3つの波数のうち2つ(A、B)は非排水状態の波数とほとんど一致している。残りの一つの波数は、振動数が大きくなると、虚数部がすぐに大

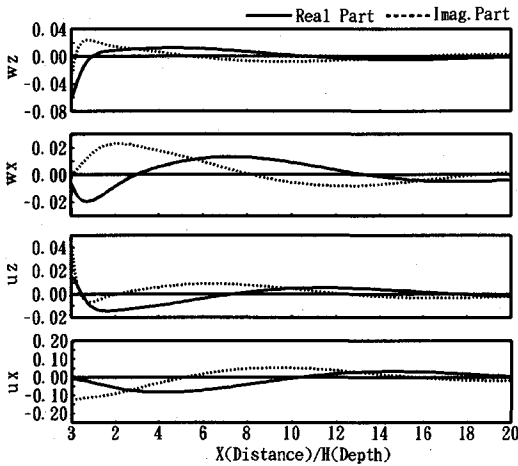


Fig.8 Displacement amplitude at various distance from loading point along the ground surface under drained condition ($\omega H/V_s=2$, $k_0=10^{-1}$ m/s).

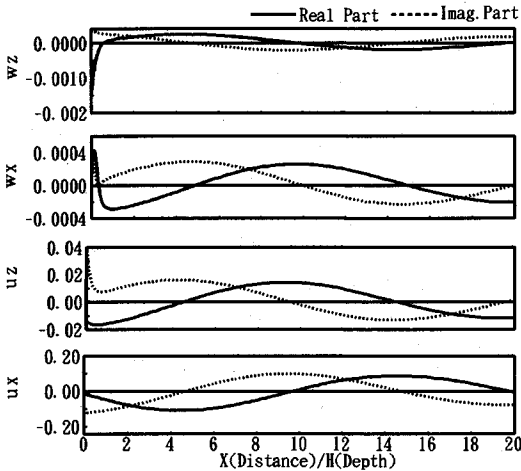


Fig.9 Displacement amplitude at various distance from loading point along the ground surface under drained condition ($\omega H/V_s=2$, $k_0=10^{-3}$ m/s).

きくなる性状(すなわち減衰の大きくなる)を示す。しかも、その虚数部の大きくなるなりかたは、透水係数の小さい方が、低振動数領域から顕著となる。以上のような性状は、Fig.8, 9に示す地表面上の変位の変化の様子にもよく現れている。透水係数が小さくなると、間隙流体の応答の絶対値が小さくなっていくと同時に、土粒子の応答は非排水状態の応答(Fig.5)に近づいていく。

次に、静的状態($\omega=0$)について見てみると、Fig.6, 7に示すように、三つのモードの波数は透水係数に無関係に一定で、 0 、 $-i$ 、 $-3i$ となる。後者の2つは乾燥状態で静的な波数に一致する。すなわち、排水条件での静的な荷重では水に生じる圧力はなく、乾燥状態と一致する。

(3) 動的地盤剛性

半無限地盤の端部に位置する杭の杭頭を単位水平加振

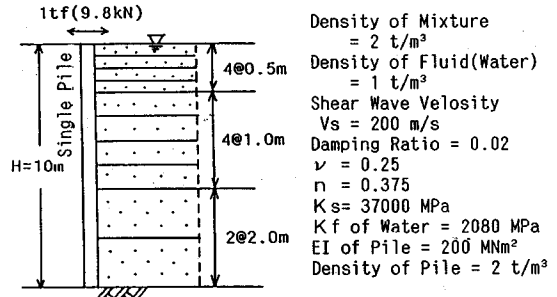


Fig.10 Geometry and physical properties of the model.

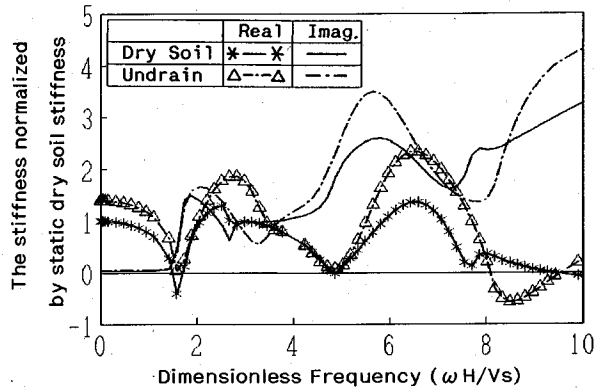


Fig.11 Comparison of the dynamic stiffness under undrained condition with one for dry soil.

し、 $(x, z) = (0, 0)$ の点における土粒子骨格の水平応答を用いて動的地盤剛性を評価する。すなわち、ここでの動的剛性とは、 $1/u_{x1}|_{x=0}$ とした。なお、剛性は、乾燥状態における静的な剛性の実部の絶対値で正規化した。また、地盤の層分割は、Fig.10に示すとおりである。

a) 非排水状態と乾燥地盤の比較

Fig.11は、乾燥地盤と非排水飽和地盤の動的地盤剛性を示したものである。非排水状態の場合、土粒子骨格変位=間隙流体の絶対変位であるから、地盤の剛性は土粒子骨格の剛性と間隙流体の体積剛性の和として表される。このため、非排水条件下の動的地盤剛性は、乾燥地盤のそれより一般に大きくなるのがわかる。特に、非排水条件の静的剛性は、乾燥地盤の約1.4倍になっている。

b) 透水性の影響

Fig.12は、透水係数の変化(10^{-1} m/s~非排水)によって、地盤の剛性がどのように変化するかを示したものである。まず、振動数を限りなく0に(すなわち静的荷重に)近づけていくと、乾燥状態における剛性に収束していくことがわかる。また、透水係数が大きいほど低振動数領域の剛性は、より高い振動数まで乾燥地盤の剛性に近くなる。荷重の荷重速度が十分遅い場合には、荷重の荷重速度より間隙圧力の逸散速度の方が速いため、間隙

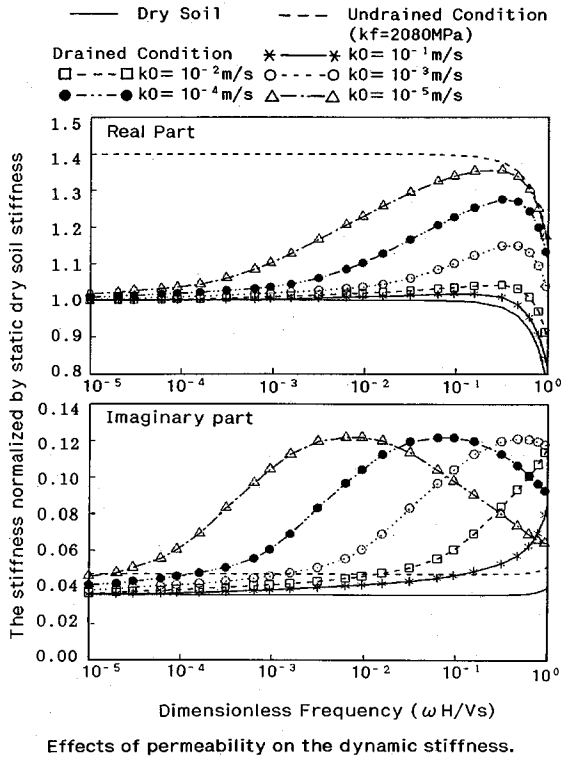


Fig.12 Effects of permeability on the dynamic stiffness.

流体の剛性は全体剛性に影響しないと言える。したがって、非排水条件の仮定の是非は、载荷速度と透水係数の相対的關係によって決まると言える。また、剛性の虚部において、排水条件を仮定した方が最大で乾燥状態の約3倍の大きな値を示すことも特徴である。すなわち、間隙流体が土粒子骨格中を動くことによって、付加的な減衰効果をもたらすと言える。

実際の地盤の透水係数は、きれいな砂でも 10^{-3} m/s 程度である。例えば、 $H=10$ m, $Vs=200$ m/s とすると、おおむね周期 0.3 秒以下 ($\omega H/Vs \geq 1$) の波については、非排水状態を仮定しても大きな誤りはないと考えられる。しかし、地盤の層厚が厚くせん断波速度の小さい場合には、この限りではない。また、透水係数 10^{-4} m/s 以下の地盤については、地震による弾性的変形を解析する場合、非排水状態を仮定し、飽和地盤を二相系として取り扱う必要は必ずしもない。一方、透水係数が 10^{-1} m/s 程度に大きくなると、間隙流体の土粒子に対する相対変位量が非常に大きくなる。透水係数 10^{-1} m/s の地盤は碎石のような極端なポーラスな地盤に相当する。このような状況下では、飽和地盤を二相系として取り扱うか、または見かけのポアソン比を解析する振動数に応じて適切に与える必要がある。

(4) 応力分布

Fig.13, 14 は、 $x=0$ 面における応力振幅の深さ方向

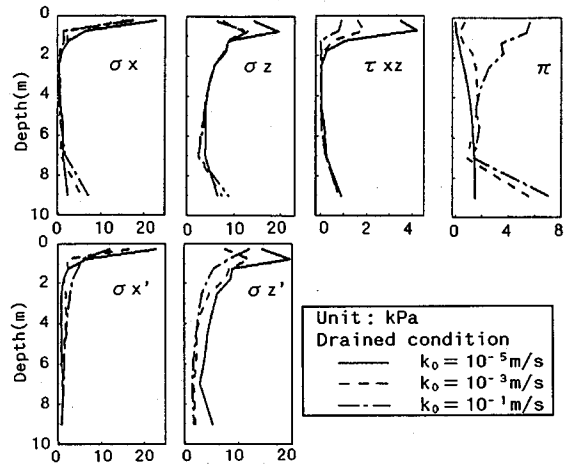


Fig.13 Distribution of the stress and pore pressure under various permeabilities ($\omega H/Vs=2$).

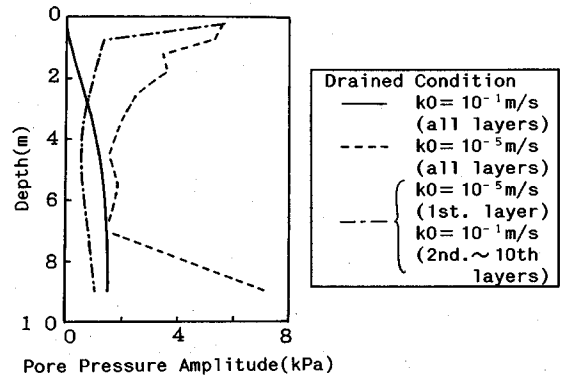


Fig.14 Effects of the drainage condition of surface layer on distribution of the pore pressure ($\omega H/Vs=2$).

の分布を示したものである。各層の応力は、各層の中間点で評価したものである。応力は、定常状態において荷重の周期と同じ周期で調和振動する。通常の一次元の純粋せん断のみを考慮した液状化解析とは異なり、全応力の定常的变化が生じている。したがって、過剰間隙圧力の発生は、この全応力の変化によって生じている。

Fig.13 は、透水係数の差によって応力がどのように変化するかを検討したものである。透水係数 10^{-3} m/s と 10^{-5} m/s の地盤は $\omega H/Vs=2$ 程度の振動数においては、全応力 σ_z , σ_x はほとんど一致している。しかし、せん断応力及び間隙圧力分布は、透水係数の差によって上部と下部で異なっている。また、その間隙圧力の大きさは、透水係数が大きいほど小さい。特に、透水係数が 10^{-1} m/s ~ 10^{-3} m/s の場合、全応力が地表面付近で大きいにもかかわらず、地表面付近の間隙圧力は小さな値となる。これは排水によって、間隙圧力が大きく蓄積しないためと考えられる。

Fig.14 は、Fig.10 と同一の層分割で全層の透水係数

が 10^{-1} m/s および 10^{-5} m/s の場合と、第一層の透水係数が 10^{-5} m/s で第 2 層から第 10 層の透水係数が 10^{-1} m/s の場合の間隙圧力の深さ方向分布を示したものである。地盤全体としての透水性は、最上層にある低い透水係数の層によって決まると考えられる。しかし、間隙圧力の深さ方向の分布は、地盤全体の透水係数が 10^{-5} m/s で一様なものとはかなり異なる結果となっている。間隙圧力の深さ方向の分布は、地盤の深さ方向の透水性の違いに大きく影響されると考えられる。

5. 結 論

本研究では、Biot の式に基づく二相系の波動方程式に、薄層要素法を適用し、飽和地盤の動的応答を検討した。本研究は、成層構造を持つ半無限多層飽和地盤を伝播する Rayleigh Wave の特性を検討したことに相当する。また、本研究では、飽和地盤の全体をマクロな連続体とみなし、応力-ひずみ関係は線型と仮定した。したがって、地盤に発生する間隙圧力は、波動が二次元的に伝わることによる土粒子骨格の体積変形に応じて発生し、純粋にせん断変形する場合には発生しないことになる。実際には、あるせん断ひずみレベル以上になると、せん断による体積変化が生じ、間隙圧力の変化をもたらす事はよく知られているとおりである。したがって、本研究で取り上げた間隙圧力の生成、消散の原理は、一次元の地盤のせん断振動で発生する間隙圧力の原理とは異なるものである。実際の強震時の間隙圧力の発生の原因はこの両者に起因するものと考えられる。

本研究の結論を要約すると、以下のとおりである。

- (1) 間隙流体の排水を考慮できる二相系飽和地盤の薄層要素を開発した。
- (2) 開発した飽和地盤の薄層要素を用いて、飽和地盤の動的応答を検討し、以下の結論を得た。
 - ① 飽和地盤を非排水状態と考えたとき、動的地盤剛性は、間隙流体の体積剛性があるため、乾燥地盤のそれよりも大きい。非排水条件を仮定することは、乾燥地盤のポアソン比を見かけ上大きくすることと等価である。
 - ② 飽和地盤に排水を許す場合、荷重の載荷速度が地盤の透水係数よりも十分小さいならば、地盤の動的応答は、乾燥地盤のそれに近くなる。極端な場合、荷重が静的に載荷されるならば、乾燥地盤と飽和地盤の差はない。
 - ③ 逆に、荷重の載荷速度が地盤の透水係数に比較して大きくなるほど、その挙動は非排水条件に近づく。
 - ④ 飽和地盤に発生する応力や間隙圧力は、地盤の透水性の影響を受ける。

参 考 文 献

- 1) Biot, M.A. : General Theory of Three-Dimensional Consolidation, J. of Applied Physics, Vol.12, pp.155~164, 1941.
- 2) Biot, M.A. : Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media, J. of Applied Physics, Vol.33, No.4, pp.1482~1498.
- 3) Zienkiewicz, O.C. and Bettles, P. : Soil and Other Saturated Media under Transient, Dynamic Conditions ; General Formulation and the Validity of Various Simplifying Assumptions, Soil Mechanics Transient and Cyclic Loads edited by Pande, G.N. and Zienkiewicz, O.C. and Wiley, J., 1980.
- 4) Zienkiewicz, O.C. and Shiomi, T. : Dynamic Behaviour of Saturated Porous Media ; The Generalized Biot Formulation and its Numerical Solution., Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol.8, No.1, pp.71~96, 1984.
- 5) 小堀鐸二・立川 剛 : 飽和砂質地盤への複合物理理論の適用性について, 日本建築学会論文報告集, 第 222 号, pp.23~30, 1974.
- 6) 高谷富也・北村泰寿 : 半無限多孔質飽和弾性体内部の鉛直点加振力による変位解, 土木学会論文集, 第 404 号 / I-11, pp.297~303, 1989.
- 7) Soil Mechanics Transient and Cyclic Loads edited by Pande, G.N. and Zienkiewicz, O.C. and Wiley, J., 1980.
- 8) 小田匠寛 : 岩石・岩盤における有効応力の原理, 土と基礎, Vol.36, No.6, pp.19~24.
- 9) 地盤と土構造物の地震時の挙動に関するシンポジウム発表論文集, 土質工学会, 1989.
- 10) Simon, B.R., Zienkiewicz, O.C. and Paul, D.K. : An Analytical Solution for the Transient Response of Saturated Porous Elastic Solids, Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol.8, No.4, pp.381~398, 1984.
- 11) Ghaboussi, J. and Wilson, E.L. : Variational Formulation of Dynamics of Fluid-Saturated Porous Elastic Solids, J. of Eng. Mech. Div. ASCE, Vol.98, EM4, pp.947~963, 1972.
- 12) Simon, B.R., Wu, J.S.-S., Zienkiewicz, O.C. and Paul, D.K. : Evaluation of u-w and u- π Finite Element Methods for the Dynamic Response of Saturated Porous Media Using One Dimensional Models., Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol.10, No.5, pp.461~482, 1986.
- 13) Lysmer, J. and Waas, G. : Shear Waves in Plane Infinite Structures, J. of Eng. Mech. Div. ASCE, Vol.98, EM1, pp.85~105., 1972.
- 14) Kausel, E. and Roesset, J.M. : Dynamic Stiffness of Circular Foundations, J. of Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.101, EM6, pp.771~785, 1975.
- 15) 田治見宏・下村幸男 : 3 次元薄層要素による建物-地盤系の動的解析, 日本建築学会論文報告集, 第 243 号, pp.41~51, 1976.
- 16) 土質工学ハンドブック : 土質工学会編, 第 5 章 土の圧縮と圧密, 1982 年版.

(1991. 4. 19 受付)

DYNAMIC RESPONSE ANALYSIS OF THE SATURATED TWO-PHASE LAYERED MEDIA BY THIN LAYERED ELEMENT METHOD

Motoki KAZAMA and Toyoaki NOGAMI

Geotechnical engineering problems in coastal area are often related to the behavior of the porewater. Typical examples of these problems include consolidation of soft clay and liquefaction of loose sand. In this report the dynamic response analysis for saturated layered media influenced by drainage condition and loading rate is presented. Saturated ground is dealt with as a two-phase material based on the formulation of Biot. A thin layered element for describing the dynamic behavior of a fluid saturated porous layered medium is developed. The dynamic stiffness and wave propagation characteristics of the saturated two-phase grounds are given comparing with those for dry soil by using developed method.
