

# EK-WLI法と有限要素法を用いた逆解析

須藤敦史\*・星谷 勝\*\*

カルマンフィルタは、ベイズ理論により未知の状態量を観測値に含まれる情報として、条件付き期待値として漸化的に推定することが可能である。

本研究は、地盤等の観測値の有限な情報を有効に活用するために、カルマンフィルタにおける変換行列の線形化に伴う誤差の影響を減少させる手法(EK-WLI法)を用いている。また、この手法と有限要素法を組み合わせるために、定式化を行うとともに、カルマンフィルタ中の変換行列の近似的算定法を示し、逆解析問題を確率的に推定する手法の検討を行っている。

**Keywords** : extended kalman filter, FEM back analysis, EK-WLI procedure

## 1. 目 的

地盤の応力や変形問題を解析的に予測する有効な手法として有限要素法が用いられている。ところが有限要素法による地盤の解析は、必要な地盤定数を正確に与えることが難しいことなどから、信頼性の高い予測解析が困難となることが多い。

一般には各種物性値試験等により現地盤の諸定数を定めて解析を行うが、現地盤の初期応力や地盤定数を正確に把握することは非常に難しく、その挙動を十分な精度で予測するのに十分であることはまれである。そこで、この情報の欠如を補うために工事施工中に計測を行い、その結果にもとづき施工を進める情報化施工が実施されている。

また、地盤構造物において設計時に評価した条件を再検討したり、また施工過程に応じて得られる観測値を合理的かつ積極的に利用して構造物全体の安定性評価を行うために、地盤の初期応力や地盤定数を同定する逆解析の研究が行われている<sup>1)~4)</sup>

一方、現場計測により得られる観測値は、そのばらつきが大きいものと考えられるため、ベイズの理論により確率的にデータを取り扱うカルマンフィルタを用いた逆解析手法の研究も行われている。この確率論的手法は、観測値を確率量の実現値としてとらえ、観測値が得られる前の地盤定数等の事前分布を観測値により更新し事後分布を推定する手法である。

確率論手法を用いた地盤の静的逆解析の研究では、村上・長谷川は、カルマンフィルタと有限要素法により観測節点配置を考察し<sup>5)</sup>、斉藤らは、山留め掘削による地盤定数の推定<sup>6)</sup>や地下空洞計測による異方性岩盤の物性

値や初期応力の推定<sup>7)</sup>を行っている。また、鈴木・石井は、カルマンフィルタの初期入力値を確率統計的に求め地盤定数の分布推定<sup>8)</sup>を行っている。

本研究では、拡張カルマンフィルタのアルゴリズムを基本とした著者らの提案した拡張カルマンフィルタ重み付きローカルな繰り返し法(以下EK-WLI法と記述する。)<sup>9)</sup>を用い、有限要素法と組み合わせたEK-WLI-FE法による逆解析の適用性について論じたものであり、本論は次の基本事項の検討を行っている。

(1) EK-WLI法は、状態ベクトル推定に際し観測方程式の非線形性と推定誤差共分散行列の減少による影響を重みにより修正する手法であり、この手法に有限要素法を組み込むことにより逆解析問題の適用範囲を広げ、またWLI法における重み(W)により地盤定数の収束安定性を改善している。そして、数値解析例を用いて検証している。

(2) 実地盤の逆解析では、地盤定数が空間的に分布すること、また土質調査や試験等には誤差が介在することに対して、これらを拡張カルマンフィルタにおける状態ベクトル(本論では未知の地盤定数)のノイズとし、その影響を考慮し実地盤モデルを想定した解析を行っている。

## 2. EK-WLI法の逆解析への適用

EK-WLI法に有限要素法を組み込み、観測変位を用いた状態ベクトル推定のための定式化を行う。

拡張カルマンフィルタは、カルマンフィルタ理論と同様なアルゴリズムであるが、非線形連続型状態方程式と非線形離散型観測方程式を基本式として構成したものである。

$$dXt/dt = f(Xt, t) + Gwt \dots \dots \dots (1)$$

$$Yt_k = h(Xt_k, t_k) + vt_k \dots \dots \dots (2)$$

$Xt, Xt_k$  : 連続型, 離散型状態ベクトル

\* 正会員 武蔵工業大学 客員研究員 (株)地崎工業 技術開発室 (〒105 港区西新橋 2-23-2)

\*\* 正会員 Ph.D. 武蔵工業大学教授 土木工学科

$Y_k$ : 観測ベクトル  
 $w$ : システム雑音ベクトル  
 $v_k$ : 観測雑音ベクトル  
 $G$ : 変換行列

この基本式に対するアルゴリズムは、式(1)、(2)を推定状態ベクトル近傍で線形化し漸化的な最適状態ベクトルの推定アルゴリズムを構成したものである。(以下、本節の記号は APPENDIX I を参照)

(1) 観測方程式

一般に、有限要素法の荷重と変位の関係は、次式の剛性方程式で示される。

$$[K]u = f \dots\dots\dots (3)$$

$[K]$ : 剛性マトリクス  
 $u$ : 変位ベクトル  
 $f$ : 荷重ベクトル

これより、変位ベクトルは次式となる。

$$u = [K]^{-1}f \dots\dots\dots (4)$$

一方、拡張カルマンフィルタにおける観測方程式は式(2)に示される様に、観測値は変位量に観測雑音を加えたものである。この観測方程式を有限要素法の剛性方程式の形で表すと式(5)、(6)のようになる。

$$Y = u + v = h(X) + v \dots\dots\dots (5)$$

$$h(X) = [K]^{-1}f \dots\dots\dots (6)$$

ここで、剛性マトリクスは地盤定数である状態ベクトルの関数となる。

また、ここで対象とする問題は観測値がある時刻において計測された値であり、その計測値より状態ベクトルの推定を行う。したがってEK-WLI法では、状態ベクトル推定の繰り返し計算  $t_k$  は時間に関係なく繰り返しステップの回数になる。式(5)を離散表示すると式(7)のように表すことができる。

$$Y_k = h(X_k) + v_k \dots\dots\dots (7)$$

(2) 状態方程式

地盤定数を要素とする状態ベクトルは、時間的に遷移しないと仮定し、状態遷移マトリクス  $F[ ]$  は単位マトリクス  $I$  として状態方程式(1)を離散表示すると式(8)のようになる。(APPENDIX I 参照)

$$\hat{X}(t_{k+1}|t_k) = [I]\hat{X}(t_k|t_k) \dots\dots\dots (8)$$

ここで式(8)は、状態ベクトルに地盤定数の空間分布や試験値等の誤差などのシステムノイズが混入しない場合である。

(3) 拡張カルマンフィルタ (EK-WLI法)

有限要素法中の変換行列

拡張カルマンフィルタ中の変換行列は、式(7)を各状態ベクトルで偏微分して得られ、拡張カルマンフィルタのアルゴリズム中の変換行列  $M(t_k; \hat{X}(t_k|t_{k-1}))$  は式(9)のように表される。

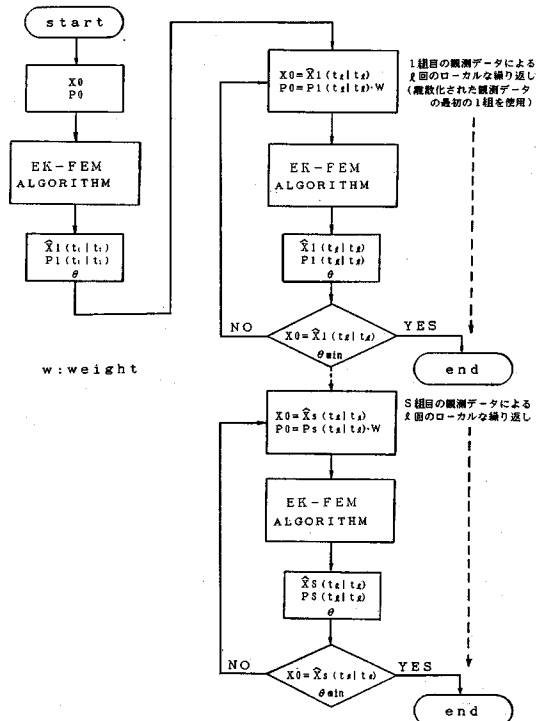


図-1(a) 拡張カルマンフィルタ (EK-WLI法) 有限要素法の逆解析フロー図

$$M(t_k; \hat{X}(t_k|t_{k-1})) = \left[ \frac{\partial h_i(X t_k, t_k)}{\partial x_j} \right], \quad X t_k = \hat{X}(t_k|t_{k-1}) \dots\dots\dots (9)$$

$h_i(X t_k, t_k)$ :  $h(X t_k, t_k)$  の要素  
 $x_j$ :  $X$  または  $X t_k$  の要素

ここで、式(7)に示されるように状態ベクトルは剛性マトリクス中にあり変換行列を直接偏微分により求める必要がある。ここでは、この変換行列を影響係数法により近似的に算出する<sup>9)</sup>。影響係数法は、状態ベクトルを順次微量変化させ有限要素法の順解析より求められ式(10)のように表される<sup>6),7)</sup>。

$$\frac{\partial h_i(X t_k)}{\partial x_j} = \frac{h_i(x_j t_k + \Delta x_j e_j) - h_i(x_j t_k)}{\Delta x_j} \dots\dots\dots (10)$$

$h_i(x_j)$ :  $h(X)$  の  $j$  番目の観測点  
 $\Delta x_j$ :  $x_j$  の微量増分  
 $e_j$ :  $j$  番目の要素

これにより、拡張カルマンフィルタのアルゴリズム中の変換行列が直接微分を行うことなく近似的に求められ、有限要素法による逆解析に拡張カルマンフィルタを用いる解析が可能である。

EK-WLI法に有限要素法を組み込んだ逆解析のフローを図-1(a), (b)に示す。

状態ベクトル(地盤定数)推定は、図-1(a)に示すように初期値  $X_0, P_0$  が与えられると、カルマンフィル

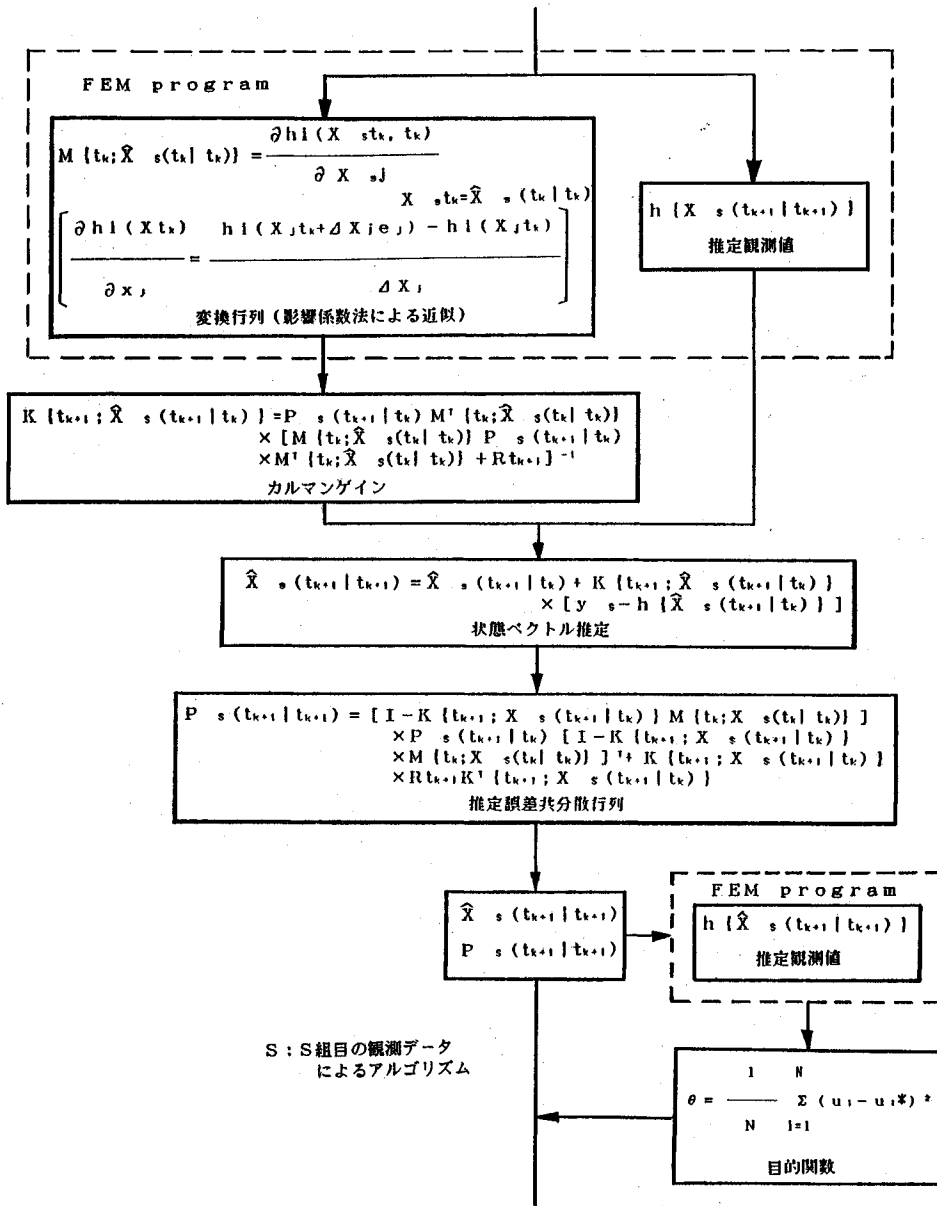


図-1(b) EK-WLI-FEM Algorithm

タのアルゴリズムにより最適状態ベクトル推定を行う。この時に観測ベクトルは、複数の観測点である時刻に得られるデータを1組とし、最初の1組目の観測データ  $y_1$  を用い計算を行う。(a) 図の右側における繰り返し2回目以降には、推定誤差共分散行列に観測方程式の非線形性の影響の減少をはかり、且つ推定誤差共分散行列の過度の減少を軽減するために、重み(W)を乗じ再び1組目のデータを用いて、ローカルな繰り返しを1回行い状態ベクトルを推定する。

この1組目の観測データによる推定で、状態ベクトル

が収束しない場合や、または目的関数が最小にならない場合には、2組目の観測データである  $y_2$  を用い、同様に1回のローカルな繰り返しを行い最適状態ベクトルの推定を行う。以降、状態ベクトルが収束するまで同様の手順を繰り返し行う。

次に、図-1(a)におけるEK-FEMのアルゴリズムの詳細は図-1(b)に示すように、 $X_0, P_0$  が与えられると有限要素法のプログラムを用いて変換行列  $M$  を影響係数法により求め、同時に与えられた推定状態ベクトルより推定観測値  $h(\hat{X}_1(t_0 | t_1))$  を求める。また、変換行

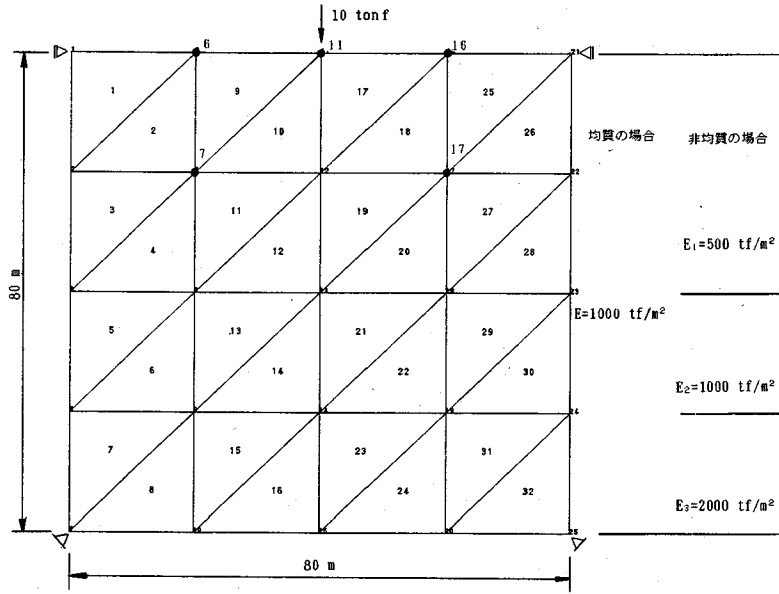


図-2 地盤解析モデル (1)

列  $M$  よりカルマンゲイン  $K$  を求め、観測ベクトル  $y_1$  より最適推定状態ベクトルおよび推定誤差共分散行列が求められる。しかし EK-WLI 法では、ローカルな繰り返しの際に推定誤差共分散行列に重みを乗じているため状態ベクトルの収束性を求める必要がある。

そこで、得られた推定状態ベクトルより推定観測値を有限要素法により計算し、目的関数を求める。

目的関数は、各観測点に対応する推定変位と計測変位の差の二乗平均値が最小になる推定状態ベクトルを最適推定値とするものである。

目的関数を式 (11) に示す。

$$\theta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i - u_i^*)^2 \dots \dots \dots (11)$$

- $N$ : 観測点数
- $u_i$ : 解析変位
- $u_i^*$ : 観測変位

### 3. EK-WLI-FEM 法による数値解析例

EK-WLI-FEM 法と有限要素法の適用性を検証し、地盤の挙動に対する逆解析に用いるため、簡単な解析モデルの解析を行う。また均質あるいは非均質から成る地盤の地表面に荷重を作用させた場合の地盤変形量を観測値として用いて、地盤の弾性係数の推定を行う。

なお、地盤定数のうちポアソン比は重要な定数であるが、問題を簡単にするために確定値 0.3 を用いている。

ここでは、EK-WLI-FE 法の収束性とともこの手法で用いる重み ( $W$ ) の影響と観測ベクトル中の誤差の大きさが収束に与える影響の検討を行っている。

なお、初期入力値である推定誤差共分散行列  $P_0$  の対角項は、それぞれ  $P = 1.0 \times 10^2$ 、観測ベクトルのノイズがある場合の分散は  $R_{ik} = 1.0 \times 10^{-2}$  を用いており、観測値はあらかじめ真の弾性係数を与えて有限要素法より求めた値を用い、ローカルな繰り返し回数は 4 回で検討を行った。

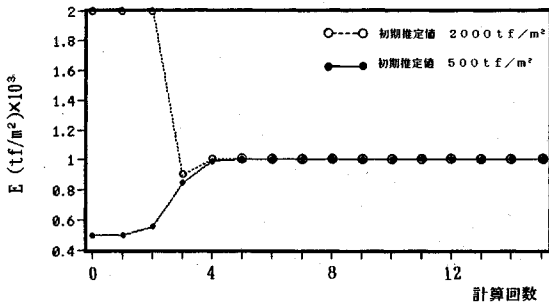
図-2 に示す 32 要素の有限要素モデルを用いて解析する。解析モデルは、一辺の長さ 80 m × 80 m の正方形を用い、二次元平面ひずみの三角形要素より構成され、外力はモデル上端の中心節点に鉛直下方に 10 tonf の荷重を与えている。

観測節点は、事前に感度解析<sup>5)</sup>により求めた No. 6, 7, 11, 16, 17 の地表部近傍の 5 点としている。この計算例では、観測節点 5 点の観測値を 1 組のデータとし 2 組目以降でも同じデータを用い 4 組で計算を行い、各組のデータでローカルな繰り返し計算を実施している。したがって計算回数 4 回で 1 組のデータを処理しており、重みは  $W = 1000$  を用いている。

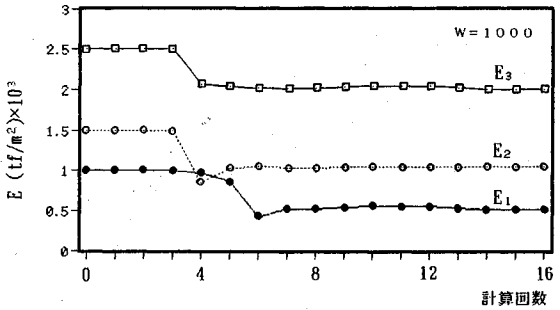
地盤が均質・非均質の場合の解析結果をそれぞれ図-3, 図-4 に示す。

均質の場合、初期弾性係数の推定値を変え、 $E_0 = 2000 \text{ tf/m}^2$ 、 $E_0 = 500 \text{ tf/m}^2$  の 2 ケースに対して弾性係数の推定を行った。図-3 から分かるように推定初期値が真値 ( $E_T = 1000 \text{ tf/m}^2$ ) より離れている場合でも計算回数はほぼ同じ 4 回~5 回で収束している。

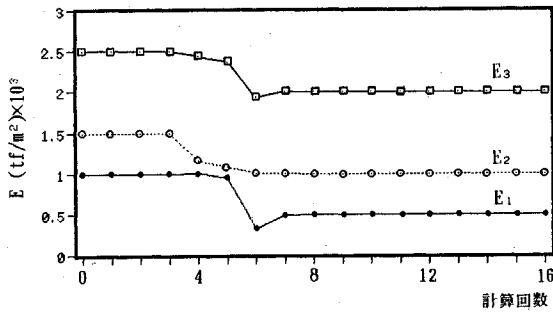
また、図-4 に見られるように非均質の場合でもこの計算回数は 7 回~8 回で真値 ( $E_1 = 500 \text{ tf/m}^2$ 、 $E_2 = 1000 \text{ tf/m}^2$ 、 $E_3 = 2000 \text{ tf/m}^2$ ) に収束しており、観測誤差の



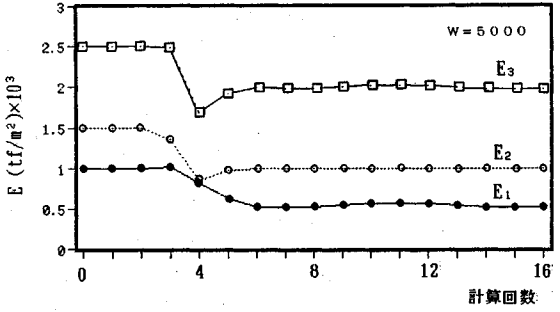
図—3 均質 (1層) 地盤の場合



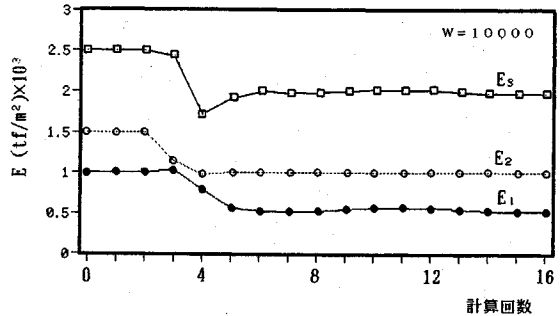
図—5(a) 観測量に 5% ノイズ (W=1000)



図—4 非均質 (3層) 地盤の場合



図—5(b) 観測量に 5% ノイズ (W=5000)



図—5(c) 観測量に 5% ノイズ (W=10000)

影響がない場合は 1 組の観測値による地盤定数の推定である。

次に、実際の地盤において変位量を計測する際には、時系列に観測値が得られ、また種々の原因により計測値中に誤差が混入する。カルマンフィルタ理論では、この計測誤差を観測ベクトル中のノイズとして評価している。ここでは非均質の場合の計測値の誤差を観測ノイズとし、そのノイズの変位量に含まれる割合を変え、推定弾性係数の収束性の検討を行っている。さらに EK-WLI 法中の重み (W) による状態ベクトルの収束性の検討も行っている。

観測ベクトルに与えるノイズは、観測節点の変位量の平均値の 5% と 10% の標準偏差をもつ平均値 0 の正規性のノイズを作成し各変位量に加えている。

観測ベクトルに含まれるノイズが 5% の時に、EK-WLI 法の重み (W) を変化させた場合の解析結果を図—5(a), (b), (c) に示す。

観測ベクトルに含まれるノイズが 5% の場合、図—5 からも分かるように推定弾性係数は計算回数 6 回～7 回で収束しており推定値の精度もよい。重み (W) の値は、大きい値ほど収束に至るまでの計算回数は減少する傾向にあると言える。

また、観測ベクトルに含まれるノイズ 10% の場合の解析結果を図—6(a), (b) に示す。

次に観測ベクトル中に含まれるノイズが 10% の場合には、図—6 に見られるように推定弾性係数が収束する

までには多くの繰り返し計算が必要であり、推定値の精度も悪い。これは、観測ベクトルに含まれる真の情報量の比率が小さく、推定精度を高めるにはより多くの観測データを必要とするからである。

また、EK-WLI 法中の重み (W) が図—6(b) のように大きい場合には、推定弾性係数が発散する現象が見られる。これは、重み (W) の値が大きいため、推定誤差共分散行列が過度に大きくなり推定弾性係数が発散したものと考えられる。

以上の点より、実際の地盤より計測される観測値はその値に含まれる誤差の割合が不明であるため、EK-WLI 法を用い逆解析を行う際に観測誤差の比率が大きい場合には、重み (W) の小さい値を選定する必要がある。

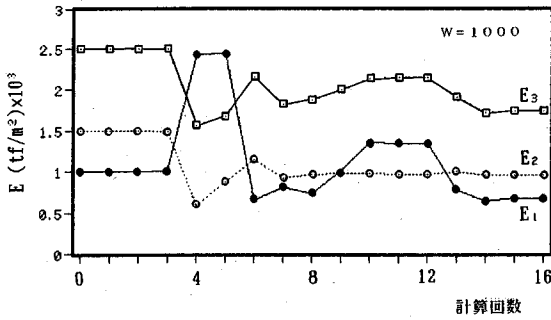


図-6(a) 観測量に10%ノイズ (W=1000)

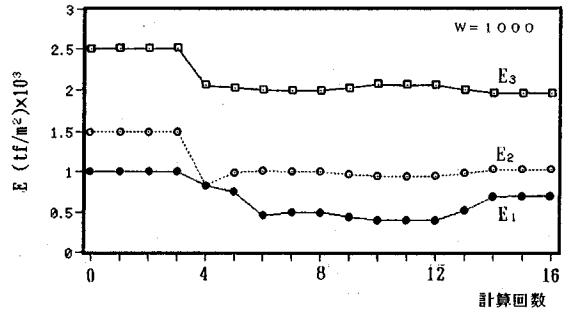


図-7(a) 状態量に0.5%・観測量に5%ノイズ (W=1000)

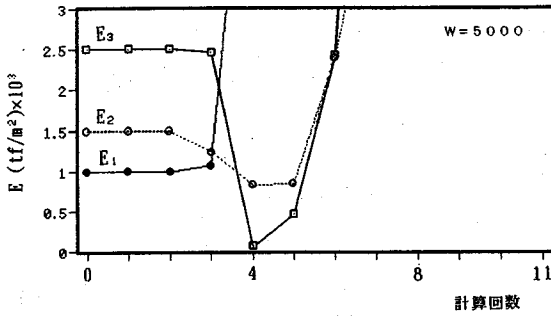


図-6(b) 観測量に10%ノイズ (W=5000)

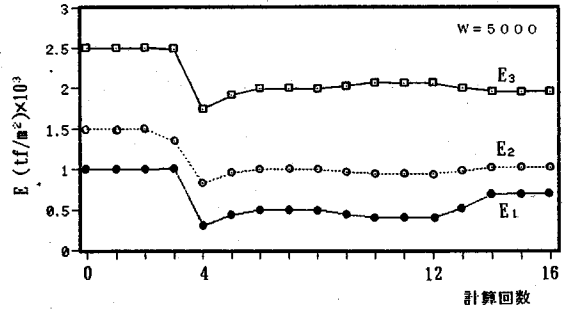


図-7(b) 状態量に0.5%・観測量に5%ノイズ (W=5000)

#### 4. 状態ベクトルのノイズ (地盤定数の誤差)<sup>11)</sup>

地盤定数は、一般の設計や数値解析などでは確定値を用いることが多い。しかし土質調査や試験等より求められた試験値は、測定誤差や試験誤差を有する値であり、測定や試験等より求められる力学特性は、地盤内の特定箇所値であり地盤全体の特性とは、異なる場合が多い。また、解析対象地盤の試験値であってもその数が少ないのが現状であり、同じ地盤の力学的特性が分布する場合も多々ある。すなわち解析対象地盤は、土質調査や試験等により空間的ばらつきのある地盤中のある箇所の物性値があらかじめ既知であると考えられる。

ここでは、地盤内の力学的特性は空間的なばらつきを有するものとし、試験値等の測定誤差を評価するため、拡張カルマンフィルタの状態方程式中のシステムノイズを状態ベクトルの空間的なばらつき、または試験値等の誤差と仮定し状態方程式の定式化をおこなう。

状態ベクトルにノイズが混入する場合は、状態方程式(8)にシステムノイズ  $w_i$  を加え式(12)のように表せる。

$$\hat{X}(t_{k+1}|t_k) = [I]\hat{X}(t_k|t_k) + w_i \dots \dots \dots (12)$$

ここでの解析条件は、二次元平面ひずみとし、前記図-2のモデルの非均質(三層モデル)の場合を用い、荷重も同様にモデル上端節点に10 ton鉛直下方に加える。

また、状態ベクトルのノイズは、弾性係数(三層)の

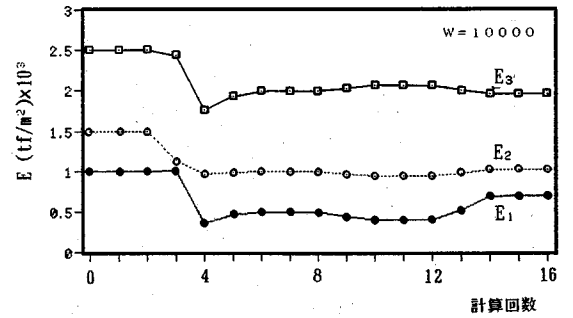


図-7(c) 状態量に0.5%・観測量にノイズ (W=10000)

平均をとり、その平均値の0.5%の標準偏差をもつ平均値0の正規性のノイズを作成し、モデルの各要素の弾性係数に加えたものを実際の地盤と仮定し、あらかじめ順解析を行い変位量を算出している。

次に、算出された変位量のうち観測節点の変位量の平均値の5%の標準偏差をもつ正規性のノイズを作成し、順解析により計算された変位量に加え逆解析に用いる観測ベクトルとしローカルな繰り返し回数は前節と同じ4回で解析を行っている。

解析結果を図-7(a), (b), (c)に示す。

逆解析の結果は、いずれの場合も計算回数5回~7回で収束しており、重み(W)は大きい方が収束までの計算回数が少なくなる傾向を示す。しかし計算回数12回以降、推定弾性係数が収束した値からそれる傾向が読み

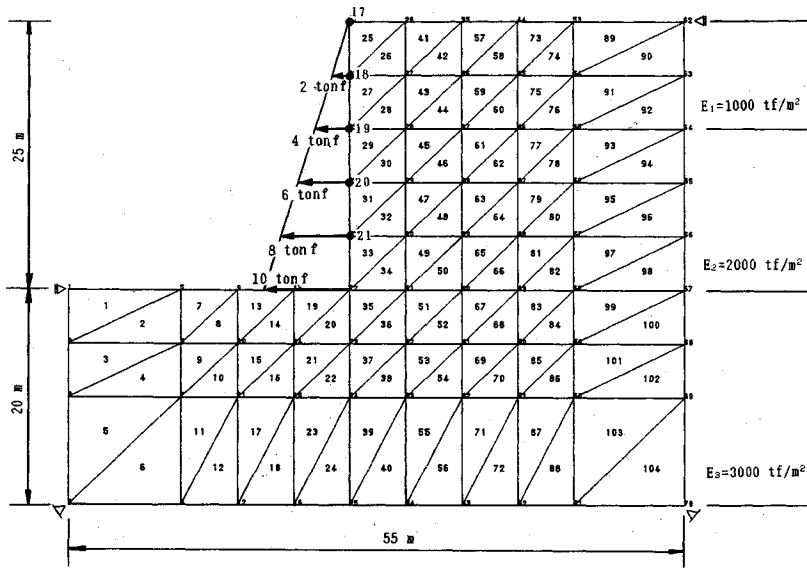


図-8 地盤解析モデル図 (2)

表-1 推定状態ベクトル (弾性係数)

回数	E1(1000tf/m <sup>2</sup> )	E2(2000tf/m <sup>2</sup> )	E3(3000tf/m <sup>2</sup> )
0	1500.0	2500.0	3500.0
1	1500.0	2500.0	3500.0
2	1499.4	2499.4	3499.9
3	1153.1	2214.9	3403.8
4	934.1	1976.2	2862.4
5	970.0	2009.0	2899.5
6	983.5	2038.7	2911.2
7	983.2	2039.9	2911.2
8	983.2	2038.9	2911.2
9	924.5	2075.7	2945.9
10	875.9	2106.3	2984.2
11	880.1	2103.3	2985.6
12	879.8	2103.5	2985.5
13	949.5	2044.8	3042.9
14	1026.3	1983.3	3101.7
15	1026.5	1984.7	3100.8
16	1026.5	1984.7	3100.8

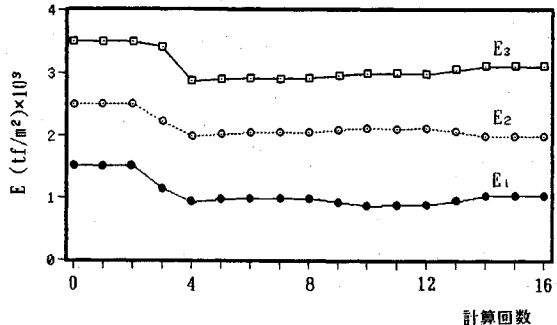


図-9 状態ベクトル (弾性係数) 推定結果

取れる。これは、観測点の数が少なく観測ベクトル中のノイズの偏差により推定弾性係数に影響を与えたものと考えられる。

なお、この解析で用いた初期推定弾性係数は、真値より離れた値を使用するため、前節で用いた値を初期値としている。しかし実地盤の解析に適用する際の初期値は、対象において土質調査や試験等より推定される事前のサンプル値を用いるのが最適であると考えられる。

### 5. 地盤モデルによる逆解析

実際の地盤モデルを想定し、本手法による未知弾性係数の推定を行う。解析に使用したモデルは、図-8に示すように三層の地盤定数から成る掘削地盤モデルである。

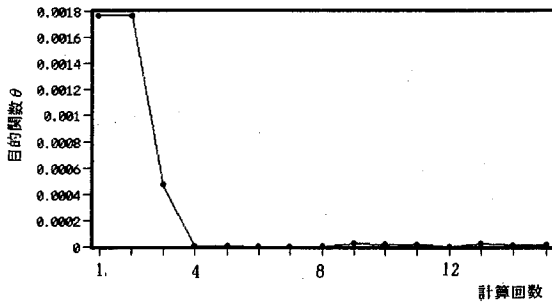
前節のように地盤定数は、空間的ばらつきもしくは試験誤差を有するとし、地盤定数の平均値の1.0%の標準偏差をもつ正規性の平均0のノイズをシステムノイズとして与えて実際の地盤と想定したこととし、順解析により変位量を算出している。次に、各観測節点の変位量の平均値の5%の標準偏差をもつ正規性の観測ノイズを加え観測データとしている。

この観測データを用いて、本手法により未知弾性係数の推定を行い、推定された弾性係数を数値比較により収束性と精度の検討を行う。

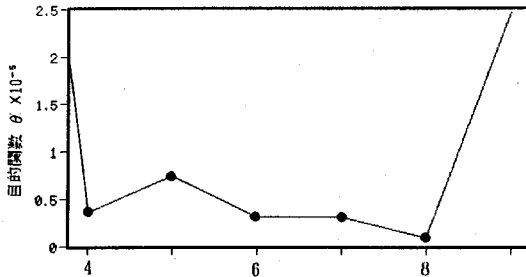
観測節点は、No. 17, 18, 19, 20, 21の掘削前面の5点とし、繰り返し回数は4回で計算を行っている。

本手法では、EK-WLI法により観測点のデータを逐次取り込み、繰り返し計算により未知弾性係数の推定を行う。また弾性係数の空間的ばらつきと観測誤差等の考慮を行っているため、状態ベクトルの推定値は必ずしも真値になるとは限らない。

そこで実際の地盤の解析に適用した際に、推定された



図—10(a) 目的関数



図—10(b) 目的関数

状態ベクトルを何らかの手法で最適推定値として判断する必要が生じる。その値を最適推定値として判断するために、前記した目的関数を用いる。

実地盤モデルによる逆解析結果を表—1に推定弾性係数の収束過程を図—9に示す。

また、目的関数の収束過程を図—10(a)に、目的関数の極小点付近を拡大したものを図—10(b)、目的関数の結果を表—2に示す。

図—9に示したように推定弾性係数は、計算回数5回～6回で収束し、真値と比較して推定誤差も少ないことが分かる。

また、図—10(a)より目的関数も推定弾性係数の収束過程と同様に減少し安定している。しかし目的関数の最小値は図—10(b)より計算回数8回目のときである。このとき解析誤差が最小となり、推定弾性係数の最適推定値は8回目の値 ( $E_1=983.2 \text{ tf/m}^2$ ,  $E_2=2038.9 \text{ tf/m}^2$ ,  $E_3=2911.2 \text{ tf/m}^2$ ) であると言える。

## 6. 結 論

本研究で提案した手法は、拡張カルマンフィルタ理論を用いたEK-WLI法に有限要素法を組み込んだ逆解析の手法である。ここで、その定式化を行った。そして、観測値に含まれる誤差の影響とEK-WLI法中の重みの大きさによる収束性等の基礎検討を行った。

また、地盤中の定数の空間分布もしくは、試験誤差をEK-WLI法中の状態方程式のノイズと仮定し解析を実施し、さらに実地盤のモデルを想定し目的関数を用いて

表—2 目的関数

回数	目的関数 $\theta$
1	$1.768 \times 10^{-3}$
2	$1.766 \times 10^{-3}$
3	$4.613 \times 10^{-4}$
4	$3.633 \times 10^{-6}$
5	$7.479 \times 10^{-6}$
6	$3.166 \times 10^{-6}$
7	$3.186 \times 10^{-6}$
8	$9.457 \times 10^{-7}$
9	$2.464 \times 10^{-5}$
10	$1.745 \times 10^{-5}$
11	$1.740 \times 10^{-5}$
12	$2.706 \times 10^{-5}$
13	$2.332 \times 10^{-5}$
14	$1.117 \times 10^{-5}$
15	$1.116 \times 10^{-5}$

最適推定値を求める解析を行った。

以上の逆解析結果より以下の点が明らかになった。

(1) 本手法は、著者らの提案した拡張カルマンフィルタの特性を生かしたEK-WLI法を用い、直接定式化法のアルゴリズムと有限要素法を組み合わせた逆解析手法であり、状態ベクトルの推定が可能である。

また、状態ベクトルの推定精度は観測ベクトルに含まれるノイズの割合に依存し、推定値の収束までの計算回数はEK-WLI法の重み(W)の大きさに左右される。

(2) 地盤定数の空間分布のばらつき、もしくは土質調査や試験誤差等の混入する場合の逆解析では、EK-WLI法中の状態方程式にシステムノイズを考慮することにより直接評価することが可能であり、状態ベクトル推定値も安定した結果が得られた。

今回の検討では、EK-WLI法と有限要素法を組み合わせた逆解析の適用性の検討を数値解析を通して確認した。今後は、本手法による地盤の逆解析で観測位置の逆解析に与える影響の検討、および状態ベクトル(地盤定数)が時間に対して依存する系に対する検討を行う予定である。

また、この手法で用いている影響係数法は拡張カルマンフィルタ中の変換行列を求める際に、未知状態ベクトルの要素数プラス1回の有限要素法の計算を行わなければならない未知状態ベクトルの要素数が多い時には計算回数が多くなり不利である。今後は、この変換行列を求める際の計算回数を減らす手法の検討も行う予定である。

最後に、本研究は第二著者の指導のもとで第一著者が行ったものであり本論文の数値計算および結果の整理にあたっては、武蔵工業大学学生 佐藤公彦君 樋口友行君の協力を得ている。

## APPENDIX I

本文中の式(1),(2)に対する最適状態推定のアルゴリズムを以下に示す。

$$\hat{X}(t_{k+1}|t_k) = \hat{X}(t_k|t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f[X(t|t_k), t] dt \dots (A-1)$$



$$P(t_{k+1}|t_k) = \phi[t_{k+1}, t_k; \hat{X}(t_k|t_k)]P(t_k|t_k) \times \phi^T[t_{k+1}, t_k; \hat{X}(t_k|t_k)] + \Gamma t_k Q t_k \Gamma^T \dots \dots \dots (A-2)$$

$$\hat{X}(t_{k+1}|t_{k+1}) = \hat{X}(t_{k+1}|t_k) + K[t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)] \times [Y_{t_{k+1}} - h(\hat{X}(t_{k+1}|t_k), t_{k+1})] \dots \dots \dots (A-3)$$

$$P(t_{k+1}|t_{k+1}) = [I - K(t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k))] \times M(t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)) P(t_{k+1}|t_k) \times [I - K(t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k))] M(t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k))]^T + K(t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)) R t_{k+1} K^T(t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)) \dots \dots \dots (A-4)$$

$$K(t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)) = P(t_{k+1}|t_k) \times M^T(t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)) \times [M(t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)) P(t_{k+1}|t_k) \times M^T(t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)) + R t_{k+1}]^{-1} \dots \dots \dots (A-5)$$

ここで、

$\hat{X}(t_k|t_k)$ :  $Y_{t_k}$  が得られた時の  $t_k$  時間における推定状態ベクトル (最適推定値)

$P(t_k|t_k)$ :  $\hat{X}(t_k|t_k)$  と真値  $X_{t_k}$  との差の共分散行列

$\hat{X}(t_{k+1}|t_k)$ :  $Y_{t_k}$  が得られた時の  $t_{k+1}$  時間における推定状態ベクトル

$P(t_{k+1}|t_k)$ :  $\hat{X}(t_{k+1}|t_k)$  と真値  $X_{t_{k+1}}$  との差の共分散行列

$K(t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k))$ :  $t_{k+1}$  時間でのフィルタゲイン行列

$Y_{t_k}$ :  $(y_{t_1} \dots y_{t_k})$ ,  $I$ : 単位行列

このアルゴリズムは、式 (A-1)、(A-2) の予測アルゴリズムと式 (A-3)~(A-5) のカルマンゲインによるフィルタリングアルゴリズムより構成される。

アルゴリズム中の変換行列  $M(t_k; \hat{X}(t_k|t_{k-1}))$  と  $\phi[t_{k+1}, t_k; \hat{X}(t_k|t_k)]$  は、

$$M(t_k; \hat{X}(t_k|t_{k-1})) = \left[ \frac{\partial h_i(X t_k, t_k)}{\partial x_j} \right] X t_k = \hat{X}(t_k|t_{k-1}) \dots \dots \dots (A-6)$$

$$\phi[t_{k+1}, t_k; \hat{X}(t_k|t_k)] = I + \Delta F[t_k; \hat{X}(t_k|t_k)] \dots \dots (A-7)$$

$$F(t_k; \hat{X}(t_k|t_k)) = \left[ \frac{\partial f_i(X t, t)}{\partial x_j} \right] X t = \hat{X}(t_k|t_k) \dots \dots \dots (A-8)$$

$\Delta$ : 時間刻み

$h_i(X t_k, t_k)$ :  $h(X t_k, t_k)$  の要素

$f_i(X t, t)$ :  $f(X t, t)$  の要素

上記アルゴリズムに初期状態ベクトル  $X(t_0|t_0)$  と初期の推定誤差共分散行列  $P(t_0|t_0)$  が得られれば、観測ベクトル  $Y_{t_k}$  を順次取り込み漸化的に最適推定値 (最適状態ベクトル) を求めることができる。

参考文献

- 1) 桜井春輔・竹内邦文: トンネル掘削時における変位計測結果の逆解析, 土木学会論文集, No. 337, pp. 137~145, 1983.
- 2) Gioda, G.: Some remarks on back analysis and characterization problems in geomechanics. Proc. 5th International Conference on Numerical method in Geomechanics, pp. 47~61, 1985.
- 3) 久武勝保: トンネルにおける三次元逆解析法の開発, 土木学会論文集, No. 376, pp. 259~265, 1986.
- 4) 荒井克彦・片瀬貫文: トンネル内空変位計測に基づく地盤変形・強度定数の推定, 土質工学会論報告文集, Vol. 24, No. 2, pp. 171~179, 1984.
- 5) 村上 章・長谷川高士: Kalman フィルタ有限要素法による逆解析と観測点配置, 土木学会論文集, No. 388, pp. 227~235, 1987.
- 6) 斉藤悦郎・古賀重利・鎌田正孝: 拡張カルマンフィルタ一支援による山留め工事計測管理手法, 土木学会論文集, No. 391, pp. 115~124, 1988.
- 7) 門田俊一・斉藤悦郎・和久昭正・後藤哲雄: 繰り返し拡張カルマンフィルタによる異方性岩盤物性の同定と地下空洞計測管理への適用, 土木学会論文集, No. 406, pp. 107~116, 1989.
- 8) 鈴木 誠・石井 清: 拡張カルマンフィルタによる土質定数の空間分布推定, 土木学会論文集, No. 406, pp. 71~78, 1989.
- 9) 須藤敦史・星谷 勝: 拡張カルマンフィルタの基本的考察とEK-WLI法の提案, 土木学会論文集, No. 437, pp. 203~211, 1991.
- 10) W. G-W, Yeh. Review of Parameter Identification Procedures in Groundwater Hydrology: The Inverse Problem. Water Resources Research, 22 (2): pp. 95~108, 1986.
- 11) 中桐 滋・久田俊明: 確率有限要素法入門, 培風館, pp. 78~95, 1985.

(1991. 3. 4 受付)

BACK ANALYSIS BY FINITE ELEMENT METHOD USING EK-WLI PROCEDURE

Atsushi SUTOH and Masaru HOSHIYA

A back analysis using extended Kalman Filter-weighted local iteration-finite element method (EK-WLI-FE method) has been developed in geotechnical engineering problems, where the extended Kalman Filter-weighted local iteration procedure which was previously proposed by the present authors is used incorporated with the finite element method in order to identify unknown parameters.

Numerical analysis are carried out to show the usefulness of this method in identification of elastic modulus of soil foundation.