

# 有限フーリエ級数を用いた内挿関数の改良

草間孝志\*・大上俊之\*\*

Lagrange 多項式は内挿関数として広く用いられている。しかしながら、高次多項式は、Runge の問題、Bernstein の問題などのように曲線に対する適合性がよくない場合がある。本文は線形関係を包含し、かつ枢軸値の個数が増大しても、安定した内挿値が得られるような内挿関数の誘導と、対称性を考慮した内挿関数を求めたもので、計算例により、曲線内挿、曲面内挿に適用して有効性を検証した。

**Keywords** : finite Fourier series, interpolation function, numerical analysis, finite element method, boundary element method, grid generation

## 1. はじめに

内挿関数は関数値の補間あるいは微分方程式の数値解析など、数値計算法の基本として古くより用いられている<sup>1),2)</sup>。特に、近年は有限要素法、境界要素法などの電子計算機による数値解析、あるいは図形処理など多くの分野で使われている。中でも従来はあまり用いられなかった多項式で表現された Lagrange の方法は広く用いられるようになり、精度の向上を図るため、時には高次の多項式が利用されている。

しかしながら、高次の多項式は曲線に対する適合性がよくない場合があることが知られている。

高次多項式による内挿値の精度に関する有名な例として、区間  $[-5, 5]$  上の  $f(x) = 1/(1+x^2)$  は  $|x| > 3.63 \dots$  に対し、等間隔にとられた枢軸値 (pivotal value) の個数を増すと最大誤差が無限大に近づくことが知られている<sup>3),4)</sup>。この証明は Runge によってなされたことから<sup>5)</sup>、Runge の問題と呼ばれている。同様な傾向をとる例題として、Bernstein は区間  $|x| \leq 1$ ,  $f(x) = |x|$  は  $|x| < 1$  に対して、多項式近似の場合、次数を増大すると枢軸値の間ではげしく振動し、内挿値が発散することを示している<sup>4)</sup>。このように高次の多項式は曲線に対する適合性が必ずしもよくない。

筆者らは、さきに有限フーリエ級数による内挿関数の誘導と、その 2 次元境界要素への応用ならびにその有効性について論じた<sup>6)</sup>。内挿関数の式形として有限フーリエ級数を採用した理由は、有限フーリエ級数のもつリンク効果<sup>7)</sup>を利用することによって、連続な閉曲線を完全に表現することができるからである。

文献 6) では、閉曲線要素におけるリンク効果の除去

に対して、実際の節点とは別に、終点の値と同じ値をもつダミー点を要素の終点に数点設けることにより、始点と終点の相互関係を断ち切る方法を用いた。

誘導された内挿関数を 2 次元境界要素法に適用した結果、計算例については一応は期待する解を得たが、閉曲線要素のリンク効果を除去する際の適切なダミー点の数については経験によらずにはならなかった。さらに、基本式は線形関係を表現することができるように誘導された内挿関数であるにもかかわらず、終点に同一な値をもつダミー点を付加したことによって、線形関係を厳密に表現することができないという新たな欠点が生じた。

本文の目的は

- 1) 線形関係を包含し、かつ枢軸値の数が増大しても、安定した内挿値が得られるような内挿関数の誘導
- 2) 対称条件を考慮した解析に適用できる内挿関数として、曲線の始点、終点、あるいは両者の点で 1 階導関数が 0 の内挿関数

を求めることである。

以上について得られた内挿関数を基本的な例題に適用したところ、妥当な結果が得られたのでここに報告する。

## 2. 有限フーリエ近似による内挿関数

### (1) 一般の開曲線

いま、パラメータ  $t$  によって決まる関数を  $u(t)$ 、内挿関数を  $\mathcal{P}_j(t)$  とすると、 $j=0 \sim n$  の  $n+1$  個の  $u_j$  をとおる近似関数  $u(t)$  は

$$u(t) = \sum_{j=0}^n \mathcal{P}_j(t) u_j \dots \dots \dots (1)$$

と表すことができる。

内挿関数に付録の式 (A・2) を用いると、曲線の始点と終点との接続によるリンク効果<sup>7)</sup>が現れ、始点と終点の近傍で誤差が生ずる。これを除去するために、式 (2) を満足するような  $n+1$  から  $2n$  までの  $n$  個のダミー点

\* 正会員 工博 信州大学教授 工学部社会開発工学科 (〒380 長野市若里 500)

\*\* 正会員 工博 信州大学助手 工学部社会開発工学科

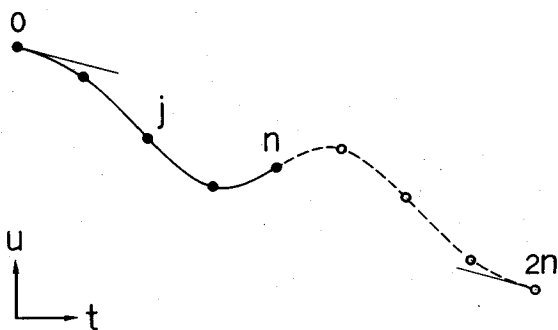


図-1 リンク効果を除去するためのダミー点

(白丸)を付加する(図-1)。

$$u_{2n-j} = 2u_n - u_j \quad (j=0, 1, \dots, n-1) \dots\dots\dots (2)$$

このようにすると、 $t=0$ と $t=n$ の点でのリンク効果は除去される。また、この方法によって作られた内挿関数は、 $u(t)$ が線形の場合に対しても線形関係を乱すことはない。

なお、付加するダミー点の数は必ずしも  $n$  個でなくともよいが、 $n$  個とすると式形が比較的簡単になる。

付録に示した基本内挿関数の式(A・1)の  $n$  を  $2n$  とおき、式(2)の関係を代入し整理すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \Psi_0 &= \Phi_0 - \Phi_{2n} \\ &= 1 - \frac{1}{n} \left[ t + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin(\lambda_k) \cos(\lambda_k/2)}{\sin(\lambda_k/2)} \right] \\ \Psi_j &= \Phi_j - \Phi_{2n-j} \\ &= \frac{(-1)^j \sin \lambda_j \sin(n\lambda_j)}{n(\cos \lambda_j - \cos \lambda_i)} \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \\ \Psi_n &= 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \Psi_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

$|n\zeta|$  が小さいときには

$$\Psi_j = \frac{1}{D} \left[ 1 - \frac{(n\zeta)^2}{6} + \frac{(n\zeta)^4}{120} - \dots \right] \sin \lambda_j \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \dots\dots\dots (4)$$

となる\*)。ここに

$$\begin{aligned} D &= \left[ 1 - \frac{\zeta^2}{6} + \frac{\zeta^4}{120} - \dots \right] \sin \lambda_j \\ &+ \zeta \left[ \frac{1}{2} - \frac{\zeta^2}{24} + \frac{\zeta^4}{720} - \dots \right] \cos \lambda_j \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

である。

(2) 始点で1階導関数が0の開曲線

図-2に示すように式(6)を満たす  $3n$  個のダミー点を付加すると、リンク効果によって  $t=0$  と  $t=4n$  点

\*) 式(4),(8),(9),(13),(16),(17)は、 $|n\zeta|$  あるいは  $\pi t$  が  $0.001$  より小さい場合、2乗の項までとると、少なくとも有効桁数10桁まで正しく得られる。

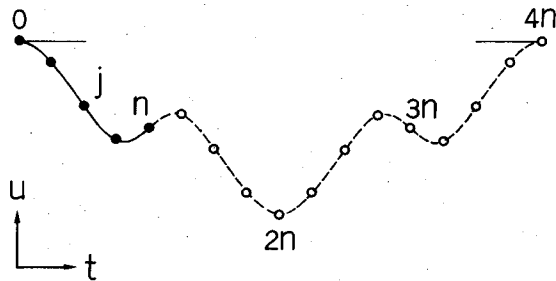


図-2 始点で1階導関数が0になるダミー点

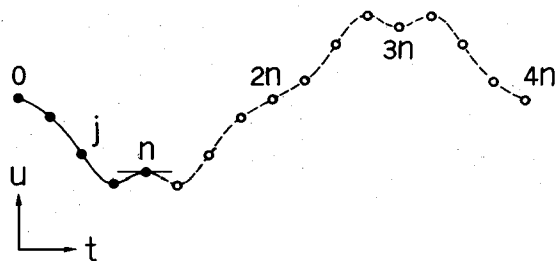


図-3 終点で1階導関数が0になるダミー点

での1階導関数は等しく、さらに  $t=4n$  から曲線は再び繰り返されるから、始点の1階導関数は0になる。

$$\left. \begin{aligned} u_{2n-j} &= 2u_n - u_j \quad (j=0, 1, \dots, n-1) \\ u_{2n+j} &= 2u_n - u_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \\ u_{4n-j} &= u_j \quad (j=0, 1, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

この場合の内挿関数  $\Psi$  は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \Psi_0 &= \Phi_0 - \Phi_{2n} + \Phi_{4n} = \frac{\sin(n\lambda_i)}{2n \sin(\lambda_i/2)} \\ \Psi_j &= (\Phi_j - \Phi_{2n+j}) - (\Phi_{2n-j} - \Phi_{4n-j}) \\ &= \frac{(-1)^j 2 \sin(n\lambda_j) \sin(\lambda_j/2) \cos(\lambda_j/2)}{n(\cos \lambda_j - \cos \lambda_i)} \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \\ \Psi_n &= 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \Psi_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$$\begin{aligned} \Psi_n &= 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \Psi_j \\ n\lambda_i (= \pi t) & \text{ が小さいときには} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= 1 - \left[ 1 - \frac{1}{4n^2} \right] \frac{(\pi t)^2}{6} \\ &+ \left[ 1 - \frac{5}{6n^2} + \frac{7}{48n^4} \right] \frac{(\pi t)^4}{120} \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$|n\zeta|$  が小さいときには

$$\Psi_j = [A \sin \lambda_j + B \zeta (\cos \lambda_j + 1)] / D \dots\dots\dots (9)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 - \frac{4n^2 + 3}{24} \zeta^2 + \frac{16n^4 + 40n^2 + 5}{1920} \zeta^4 - \dots \\ B &= \frac{1}{2} - \frac{4n^2 + 1}{48} \zeta^2 + \frac{48n^4 + 40n^2 + 3}{11520} \zeta^4 - \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

で、 $D$  は式(5)で与えられる。

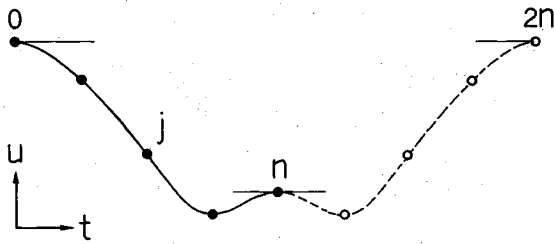


図-4 始点と終点で1階導関数が0になるダミー点

(3) 終点で1階導関数が0の開曲線

図-3に示すように、式(11)を満たす3n個のダミー点を付加すると、 $t=n$ での1階導関数は0になる。

$$\left. \begin{aligned} u_{2n-j} &= u_j & (j=0, 1, \dots, n-1) \\ u_{2n+j} &= 2u_0 - u_j & (j=1, 2, \dots, n) \\ u_{3n+j} &= 2u_0 - u_{n-j} & (j=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \dots\dots(11)$$

式(11)を用いると、内挿関数  $\Psi$  は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \Psi_0 &= 1 - \sum_{j=1}^n \Psi_j \\ \Psi_j &= (\Phi_j - \Phi_{2n+j}) + (\Phi_{2n-j} - \Phi_{4n-j}) \\ &= \frac{(-1)^j 2 \sin(n\lambda_j) \cos(\lambda_j/2) \sin(\lambda_j/2)}{n(\cos\lambda_j - \cos\lambda_i)} & (j=1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} \dots\dots(12)$$

$$\Psi_n = \Phi_n - \Phi_{3n} = \frac{(-1)^{n+1} \sin(n\lambda_i)}{2n \cos(\lambda_i/2)}$$

$|n\zeta|$  が小さいときには

$$\left. \begin{aligned} \Psi_j &= [A \sin\lambda_j + B\zeta(\cos\lambda_j - 1)] / D \\ \Psi_n &= 1 - \frac{4n^2 - 1}{24} \zeta^2 + \frac{48n^4 - 40n^2 + 7}{5760} \zeta^4 - \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots(13)$$

ここに、 $A, B$  は式(10)で、 $D$  は式(5)で与えられる。

(4) 始点と終点で1階導関数が0の開曲線

図-4に示すように、式(14)を満たす  $n$  個のダミー点を付加すると、 $t=0$  と  $t=n$  の点で1階導関数は0になる。

$$u_{2n-j} = u_j \quad (j=0, 1, \dots, n-1) \dots\dots(14)$$

さきと同様にして計算すると、内挿関数  $\Psi$  は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \Psi_0 &= \Phi_0 + \Phi_{2n} = \frac{\sin(n\lambda_i) \cos(\lambda_i/2)}{2n \sin(\lambda_i/2)} \\ \Psi_j &= \Phi_j + \Phi_{2n-j} = \frac{(-1)^j \sin(n\lambda_i) \sin\lambda_j}{n(\cos\lambda_j - \cos\lambda_i)} & (j=1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} \dots\dots(15)$$

$$\Psi_n = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \Psi_j = \frac{(-1)^{n+1} \sin(n\lambda_i) \sin(\lambda_i/2)}{2n \cos(\lambda_i/2)}$$

$\lambda_i$  が小さいとき

$$\Psi_0 = 1 - \frac{2n^2 + 1}{12} \lambda_i^2 + \frac{6n^4 + 10n^2 - 1}{720} \lambda_i^4 - \dots\dots(16)$$

$|n\zeta|$  が小さいとき

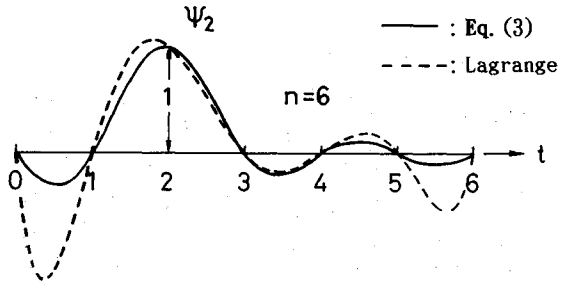
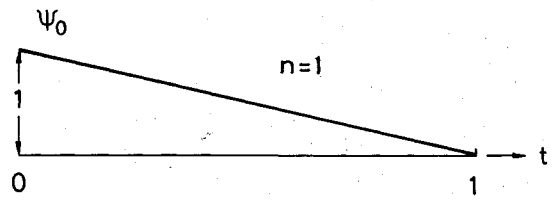


図-5 一般の開曲線の内挿関数の例

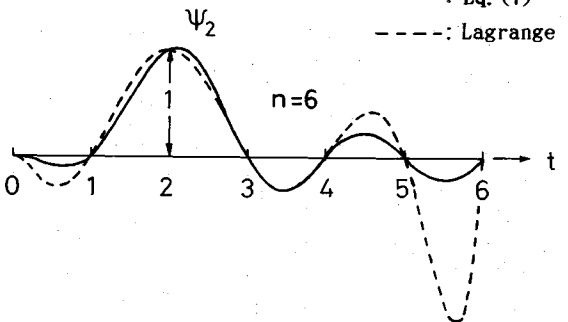
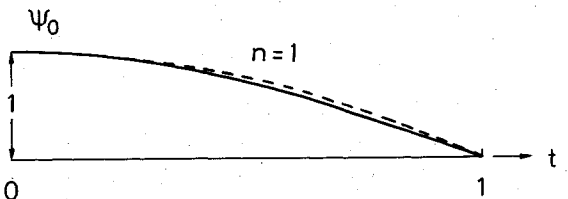


図-6 始点で1階導関数が0の内挿関数の例

$$\Psi_j = [A_1 \sin\lambda_j + B_1 \zeta \cos\lambda_j] / D \dots\dots(17)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 1 - \frac{n^2 + 3}{6} \zeta^2 + \frac{n^4 + 10n^2 + 5}{120} \zeta^4 - \dots \\ B_1 &= 1 - \frac{n^2 + 1}{6} \zeta^2 + \frac{3n^4 + 10n^2 + 3}{360} \zeta^4 - \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots(18)$$

3. 内挿関数のグラフ

以上示した内挿関数を図示し、Lagrange内挿関数によるものと比較すると、例えば、 $n=1, n=6$  の場合について図-5から図-7を得る。

図-5は一般の開曲線の内挿関数の例であり、図-6は始点で1階導関数が0、図-7は始点と終点で1階導

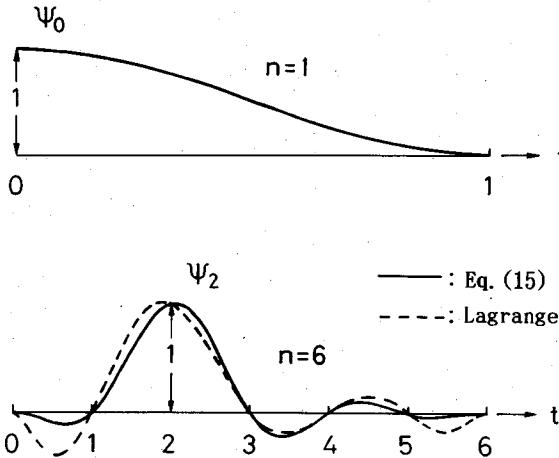


図-7 始点と終点で1階導関数が0の内挿関数の例

関数が0の内挿関数の例を示したものである。なお、図-5の点線は通常のLagrange多項式による内挿関数であるが、図-6と図-7のLagrangeと書かれた点線は始点または始点と終点で1階導関数が0になる条件を満足するように作られた $n+1$ 次、または $n+2$ 次の多項式である。

終点で1階導関数が0になるときの内挿関数は、始点で1階導関数が0になるときの図-6の左右を反転した曲線となることから図示を省略した。

これらの図からLagrange多項式による内挿関数は高次のものほど端点近傍で値が増大することがわかる。この傾向は高次のものほど顕著である。これに対し、本法による内挿関数は単位1を与えた節点から遠ざかるにしたがって節点間の山は次第に減少している。このことが、高次の内挿関数を用いても、本法によれば安定した解が得られることを示唆している。

#### 4. 多次元内挿式

以上の内挿関数を用いて、多次元の内挿式に拡張することは容易である。

例えば、3次元空間での曲面は、パラメータ $t_1, t_2$ を導入すれば、空間内に与えられた $(n_1+1) \times (n_2+1)$ 個の点をとる曲面 $(x, y, z)$ は次式によって表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} x(t_1, t_2) &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \Psi_i(t_1) \Psi_j(t_2) x_{ij} \\ y(t_1, t_2) &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \Psi_i(t_1) \Psi_j(t_2) y_{ij} \\ z(t_1, t_2) &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \Psi_i(t_1) \Psi_j(t_2) z_{ij} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

ここに、 $x_{ij} = x(i, j)$ であり、 $y_{ij}, z_{ij}$ についても同様である。なお、 $t_1, t_2$ は、それぞれ、 $0 \leq t_1 \leq n_1, 0 \leq t_2$

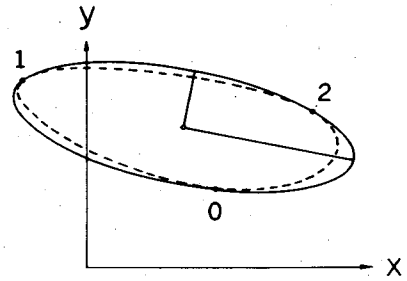


図-8 3節点を与えた閉曲線

$\leq n_2$ を満たす実数である。

式(19)の $x(t_1, t_2), y(t_1, t_2), z(t_1, t_2)$ に関する $\Psi_i(t_1)$ と $\Psi_j(t_2)$ は全てが同じ内挿関数である必要はない。例えば、 $x(t_1, t_2)$ に対する $\Psi_i(t_1)$ には周期内挿関数を、 $y(t_1, t_2)$ には一般閉曲線の内挿関数を採用し、 $y(t_1, t_2)$ あるいは $z(t_1, t_2)$ に対する $\Psi_i(t_1)$ には始点で1階導関数が0の内挿関数を、 $\Psi_j(t_2)$ には終点で1階導関数が0の内挿関数を採用してもよい。どのような内挿関数を用いるかは、表現しようとする曲面形状の性質によって定められる。

#### 5. 計算例

本文で示した内挿関数がどのような性質を有するかを調べるために、まず、少ない節点数について簡単な図形を描くことから始め、次に内挿関数に高次のLagrange多項式を用いると値が発散する問題について、本文の内挿関数を適用して検証し、さらに、3次元空間での曲面内挿への応用例を取り扱うことにする。

##### (1) 連続な閉曲線

節点0(0.8, 0.5), 1(-0.4, 1.2), 2(1.4, 1)の3点をとる連続な閉曲線を求める。この場合、閉曲線であるから、節点0の座標値に一致する節点3があるものとして、 $n=3$ とおき、内挿関数 $\Psi_j(t)$ には周期内挿関数の式(A・9)を用いて、任意点の $(x, y)$ を次式で表す。

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \sum_{j=0}^3 \Psi_j(t) x_j \\ y(t) &= \sum_{j=0}^3 \Psi_j(t) y_j, 0 \leq t \leq 3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

得られた曲線を図-8に示す。この曲線は3節点による三角形の図心を中心とし、長軸=1.07727, 短軸=0.36444, 長軸の傾き=-11.45°の楕円となる。なお、図中の点線は3次のパラメトリック周期スプライン補間<sup>9)</sup>による閉曲線で、文献9)のプログラムを使用した。

このように、直線上にない3点を与えて、式(A・9)の内挿関数を用いれば、閉曲線は楕円を描くことがわかる。また、記述を省略するが、正多角形の頂点をとる

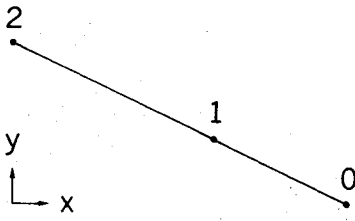


図-9 節点が一直線上にある開曲線

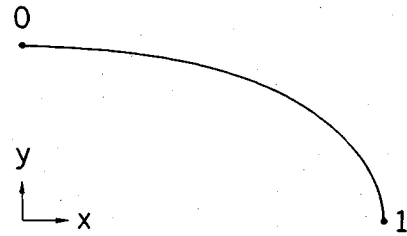


図-11 x, y 軸に対称な楕円

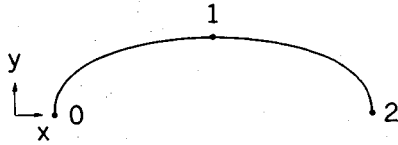


図-10 x 軸に対称な楕円

閉曲線は円を描くことが証明される。

(2) 一般の開曲線

直線上にある3節点, 0 (10, 0), 1 (6, 2), 2 (0, 5) をとる連続な開曲線を求める.  $n=2$  において, 内挿関数には式 (3) を用い, 任意点の  $(x, y)$  を次式で表す.

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \sum_{j=0}^2 \Psi_j(t) x_j \\ y(t) &= \sum_{j=0}^2 \Psi_j(t) y_j, \quad (0 \leq t \leq 2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

図-9のように内挿された点は直線を描く. この例の場合,  $x_j, y_j$  がともに等間隔に与えられているとすると, 式 (3) の  $\Psi_j$  に関しても式 (A・7) の関係が成立するから,  $x(t), y(t)$  はともに  $t$  に関して線形となる.

(3) 対称条件を考慮した開曲線要素 (1)

図-10に示すように, 節点0 (0.5, 0), 1 (2.5, 1), 2 (4.5, 0) の3節点を与える. この場合も  $n=2$  となり,  $x(t), y(t)$  を式 (21) で表す.

ただし,  $x(t)$  に関する内挿関数  $\Psi_j(t)$  には始点と終点で1階導関数が0の内挿関数 (15) を用い,  $y(t)$  に関する内挿関数  $\Psi_j(t)$  には一般の開曲線内挿関数の式 (3) を用いることにする. このようにすると, 得られる曲線は始点と終点で  $x$  軸に直交する.

計算結果を図示すると,  $x$  軸に対称な 1/2 楕円を得る. この方法は, 対称性を考慮して 1/2 部分のみを対象として解析する際に利用することができる. なお, この例の場合,  $x_1 = (x_0 + x_2)/2$  にとると, 1/2 卵形を描く.

(4) 対称条件を考慮した開曲線要素 (2)

図-11に示すように, 節点0 (0, 1), 1 (2, 0) の2節点を与える. この場合は  $n=1$  であるから,  $x(t), y(t)$  は次式となる.

$$x(t) = \sum_{j=0}^1 \Psi_j(t) x_j, \quad y(t) = \sum_{j=0}^1 \Psi_j(t) y_j, \quad (0 \leq t \leq 1)$$

ただし,  $x(t)$  に関する内挿関数  $\Psi_j(t)$  には終点で1

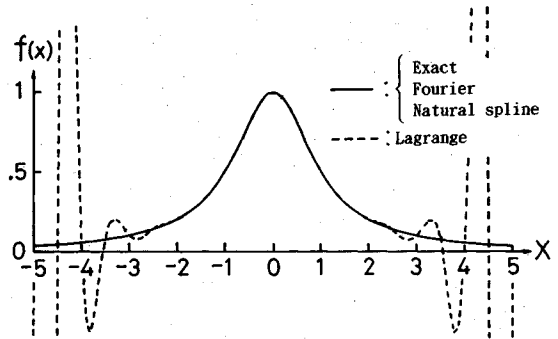


図-12 Runge の問題

階導関数が0の式 (12) を用い,  $y(t)$  に関する内挿関数  $\Psi_j(t)$  には始点で1階導関数が0の式 (7) を用いることにする. このようにすると, 曲線は始点では  $y$  軸に, 終点では  $x$  軸に, それぞれ直交し,  $x$  軸と  $y$  軸に対称な 1/4 楕円を得る. この方法は対称性を考慮して, 1/4 部分のみを対象とした解析に役立つ.

(5) Runge の問題<sup>3),4)</sup>

Lagrange 多項式は, 次数  $n$  の増大とともに節点間で次第にはげしく振動し解が発散することがある. このような例として, 区間  $[-5, 5]$  上の  $f(x) = 1/(1+x^2)$  を取り上げる. この例題は, 等間隔に節点をとって Lagrange 式を採用すると, Runge の問題として知られているように,  $|x| > 3.63\dots$  に対し, 次数  $n \rightarrow \infty$  のとき最大誤差が無限大に近づく.

いま, 節点数  $= n+1$ , 刻み  $h = (x_n - x_0)/n$  の等間隔に節点を設け, 節点値  $(x_j, f_j)$  を与えて, 本文の一般の開曲線内挿関数である式 (3) を用いて次式により計算する.

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \Psi_j(t) f_j \dots\dots\dots (22)$$

ここに

$$t = n(x - x_0)/(x_n - x_0) = (x - x_0)/h$$

$$x_0 = -5, \quad x_n = 5$$

である.

計算結果を図-12に示す. この図は  $n=20, h=0.5$  の場合である. 図中, Fourier と記した曲線は式 (22) による結果である. Lagrange 多項式以外は与えられた

表-1 Runge の問題に対する 2 乗誤差

節点数	$h$	Fourier	Natural spline	Lagrange
3	5.0	1.81	1.71	2.07
5	2.5	$3.19 \times 10^{-1}$	$1.99 \times 10^{-1}$	$7.79 \times 10^{-1}$
9	1.25	$2.01 \times 10^{-2}$	$4.32 \times 10^{-3}$	1.36
11	1.0	$5.60 \times 10^{-3}$	$5.12 \times 10^{-4}$	3.37
21	0.5	$1.01 \times 10^{-5}$	$7.73 \times 10^{-6}$	$1.42 \times 10^3$
41	0.25	$1.08 \times 10^{-10}$	$2.45 \times 10^{-8}$	$1.95 \times 10^9$
51	0.2	$3.58 \times 10^{-11}$	$3.08 \times 10^{-9}$	$3.19 \times 10^{12}$

表-2 Bernstein の問題に対する 2 乗誤差

節点数	$h$	Fourier	Natural spline	Lagrange
3	1.0	$4.55 \times 10^{-2}$	$3.81 \times 10^{-2}$	$6.67 \times 10^{-2}$
5	0.5	$6.56 \times 10^{-3}$	$3.98 \times 10^{-3}$	$1.73 \times 10^{-2}$
9	0.25	$8.60 \times 10^{-4}$	$4.73 \times 10^{-4}$	$2.54 \times 10^{-2}$
11	0.2	$4.43 \times 10^{-4}$	$2.42 \times 10^{-4}$	$8.14 \times 10^{-2}$
21	0.1	$5.59 \times 10^{-5}$	$3.02 \times 10^{-5}$	$7.21 \times 10^2$
41	0.05	$7.00 \times 10^{-6}$	$3.78 \times 10^{-6}$	$7.63 \times 10^{12}$
51	0.04	$3.59 \times 10^{-6}$	$1.94 \times 10^{-6}$	$1.83 \times 10^{18}$

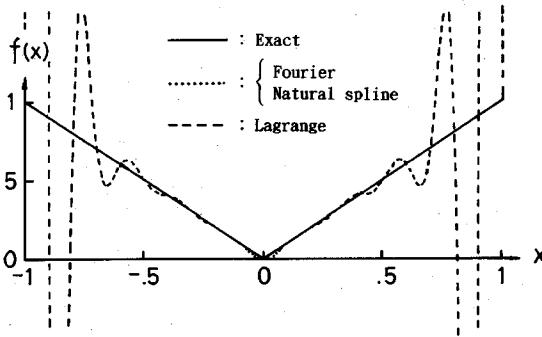


図-13 Bernstein の問題

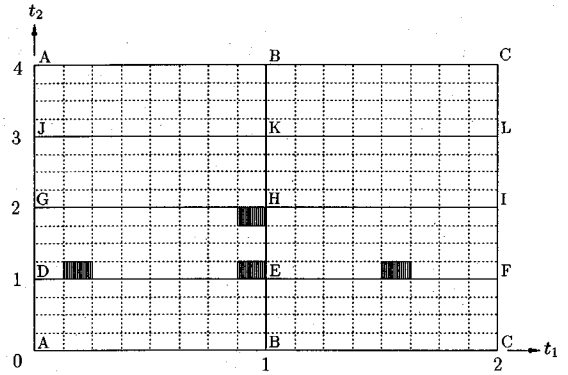


図-14  $t_1, t_2$  座標での節点

関数によく一致する解が得られた。表-1は近似関数の精度を比較するため2乗誤差を示したものである。2乗誤差の計算には Gauss の数値積分公式を用いた。

表-1に示すように、本法による値は節点数が多い程正しい値に近づくことがわかる。これに対し Lagrange 多項式の場合には誤差が増大する。

なお、一般の開曲線の場合、この例題のように等間隔に節点をとると、節点  $j$  では  $x_j = x_0 + jh$  となり、式 (A-7) の関係を用いれば、 $x(t) = \sum \psi_j(t) x_j = x_0 + ht$  を得る。すなわち  $x$  と  $t$  とは線形関係にあるから、この例題の場合には式 (22) が成立する。節点が不等間隔の場合には、 $x$  と  $t$  とは線形関係にないから、式 (20) の形で  $f(t)$  と  $x(t)$  を与えることになる。

(6) Bernstein の問題<sup>4)</sup>

区間  $|x| \leq 1$  での  $f(x) = |x|$  は前述の例題と同様、等間隔に節点をとって Lagrange 多項式を用いると、次数  $n$  が大きいときには  $0 < |x| < 1$  で発散することが知られている<sup>4)</sup>。

前述の例と同様にして、一般開曲線の内挿関数を採用し、式 (22) を用いて計算した結果を図-13に示す。図は  $n=20, h=0.1$  の場合である。この例題は、 $f(x) = -x$  と  $f(x) = x$  の2つの直線が  $x=0$  で交わるのが与えられた関数である。したがって、連続な曲線でおきかえた近似関数による曲線は、いずれの場合も、主として  $x=0$  の点の近傍で誤差が生ずることはやむを得ない。しかし、その点を除くと Lagrange 多項式以外は与えられた関数によく一致している。

表-3 用いた内挿関数

座 標	$\psi_i(t_1)$	$\psi_j(t_2)$
$x(t_1, t_2)$	始、終点で直交	閉曲線
$y(t_1, t_2)$	一般開曲線	閉曲線
$z(t_1, t_2)$	一般開曲線	閉曲線

この例の2乗誤差を表-2に示す。表より明らかのように、この例でも本法による値は節点数が多い程正しい値に近づくことがわかる。これに対し Lagrange 多項式の場合には節点数が増すと誤差が増大する。

(7) 曲面内挿への応用例

多次元内挿への応用例として、式 (19) による曲面内挿を取り上げる。いま、 $n_1=2, n_2=4$  とすると、図-14の実線の交点に記号を付した15個の節点を得る。図中の点線の交点は内挿する節点である。

式 (19) を適用するにあたり、用いた内挿関数を表-3に示す。すなわち、求める曲面は  $t_2=0$  と  $t_2=n_2$  で一致し、かつ連続的に閉じるものとして  $\psi_j(t_2)$  には周期内挿関数 (閉曲線) を用いることにする。また、曲面は  $t_1=0$  と  $t_1=n_1$  において  $x$  軸に直交するとして、 $x(t_1, t_2)$  に関する  $\psi_i(t_1)$  には式 (15) を用いることにする。その他の内挿関数には一般開曲線の内挿関数を用いる。

計算に用いた12個の節点 (A~L) の座標値を表-4に示す。式 (19) による計算結果を図示すると、図-15の回転楕円体を得る。内挿により細分化された要素の内、縦線を施した要素は、それぞれ図-14の縦線を施した

表-4 計算に用いた各節点の座標値

点	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
$t_1$	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$t_2$	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3
$x$	-2	0	2	-2	0	2	-2	0	2	-2	0	2
$y$	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0
$z$	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

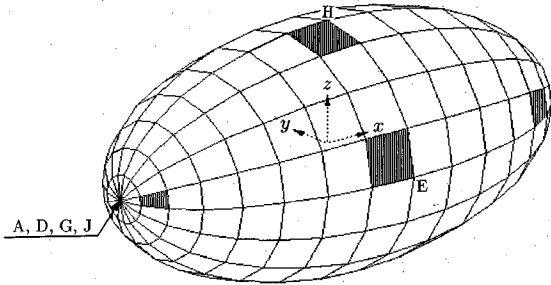


図-15 回転楕円体

表-5 用いた内挿関数

座標	$\psi_i(t_1)$	$\psi_j(t_2)$
$x(t_1, t_2)$	始, 終点で直交	閉曲線
$y(t_1, t_2)$	始, 終点で直交	閉曲線
$z(t_1, t_2)$	一般開曲線	閉曲線

表-6 計算に用いた各節点の座標値

点	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
$t_1$	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$t_2$	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3
$x$	-4	0	4	-3	0	3	-2	0	2	-3	0	3
$y$	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	1	1	1
$z$	0	-3	0	0	-2	0	0	-1	0	0	-2	0

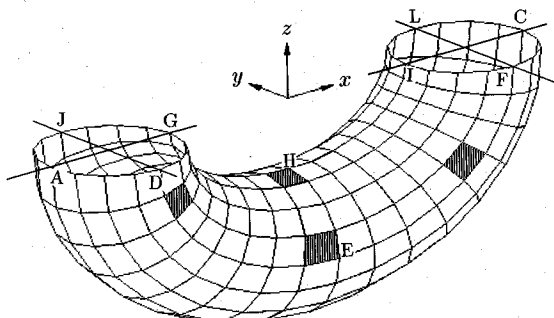


図-16 1/2楕円に曲がったU字管

要素に対応している。

次に,  $t_1, t_2$  平面は先と同様に図-14とすると, この場合も  $n_1=2, n_2=4$  となる。用いた内挿関数を表-5に示す。また, 節点の座標値には表-6を用いることに

する。

計算結果を図-16に示す。得られた図は半径1の円管の中心が, 短軸の長さ2, 長軸の長さ3の1/2楕円に曲がっているU字管を表している。

この計算例は, 図-14に示す1枚の紙の上下端を結合して円筒を作り, 図-15の場合は, その円筒の左右端を連続な曲面になる(尖点とならない)ように1点に集めたときにできる曲面を表し, 図-16の場合は, その円筒を1/2楕円に曲げたときの曲面を表している。

## 6. 結 論

本文は先に報告した有限フーリエ級数による内挿関数の改良を試みたものである。有限フーリエ級数のもつリンク効果は, 例えば振動問題等において, 時には好ましくない現象として考えられている。ここでは, このリンク効果を積極的に取り入れることによって, 周期関数(または閉曲線)あるいは曲線の端点で1階導関数が0になる内挿関数の誘導を試みた。

得られた結果を要約すると次のとおりである。

1) 有限フーリエ級数特有のリンク効果を利用することによって, 完全に連続な周期関数(または閉曲線)を表現する内挿関数が得られる。この内挿関数を用いれば, 円あるいは楕円等は容易にかつ正確に表すことができる。

2) リンク効果を除去した一般の開曲線要素に対する内挿関数が求められた。この内挿関数は線形関係を包含する。また, 高次多項式による内挿関数では解が発散するといわれる Runge の問題および Bernstein の問題についても, 本法による内挿関数を用いれば安定した解を得ることができることがわかった。

3) 対称問題の解析, あるいは曲面要素の生成等への利用を目的とした, 開曲線の一端または両端における1階導関数が0になる内挿関数が求められた。これらの内挿関数を曲線内挿および曲面内挿へ適用した結果, 予期した結果が得られることが検証された。

本文では, 曲面内挿への応用例として, 表-3あるいは表-5に示すように,  $x, y, z$  の内挿関数  $\psi_i(t_1)$  および  $\psi_j(t_2)$  をそれぞれに1種類ずつ与えた。

更に複雑な形状表現への拡張としては,  $t_1, t_2$  を要素座標系での座標軸とし, 図-15または図-16の曲面のある1要素での曲面と考え, これに内挿関数が異なる他の要素の曲面を結合すれば, 複合要素からなる複雑な曲面を表現することが可能となろう。

有限要素法の発展とともに, 複雑な形状に対する要素自動生成法の進歩も著しい<sup>10)</sup>。本法はその一助として利用できるものと思われる。

このように, 本文で求めた内挿関数は, 種々な数値解析に利用することができるのではないかと考えている。

7. 付 録

(1) 内挿関数の基本形<sup>6)</sup>

パラメータ  $t$  の関数を  $u(t)$  とする. いま,  $n+1$  個の点  $t=j (j=0, 1, 2, \dots, n)$  における  $u$  の値  $u_j$  が与えられているとき, これらの点をとおる連続な近似関数  $u(t)$  は次のように表される.

$$u(t) = \sum_{j=0}^n \Phi_j(t) u_j \dots\dots\dots (A \cdot 1)$$

ここに,  $\Phi(t)$  は内挿関数で, 次のように表される.

なお, 以下すべての場合について,  $t$  は  $0 \leq t \leq n$  を満たす実数とする.

a)  $n$  が偶数の場合

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{2} - t - \sum_{k=1}^{n/2-1} \frac{\sin[(2t-1)\lambda_k]}{\sin\lambda_k} \right] \\ &\quad + \frac{\cos(\pi t)}{2n} \\ \Phi_j(t) &= \frac{1}{n} [ {}_n C_1 \cos^2 \zeta - {}_n C_3 \sin^2 \zeta \cos^{n-2} \zeta \\ &\quad + {}_n C_5 \sin^4 \zeta \cos^{n-4} \zeta - \dots ] \\ &= \frac{\sin(n\zeta)}{n \sin \zeta} \cos \zeta \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \\ \Phi_n(t) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{2} + t + \sum_{k=1}^{n/2-1} \frac{\sin[(2t+1)\lambda_k]}{\sin\lambda_k} \right] \\ &\quad + \frac{\cos(\pi t)}{2n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A \cdot 2 a)$$

b)  $n$  が奇数の場合

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{2} - t - \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{\sin[(2t-1)\lambda_k]}{\sin\lambda_k} \right] \\ \Phi_j(t) &= \frac{1}{n} [ {}_n C_1 \cos^{n-1} \zeta - {}_n C_3 \sin^2 \zeta \cos^{n-3} \zeta \\ &\quad + {}_n C_5 \sin^4 \zeta \cos^{n-5} \zeta - \dots ] \\ &= \frac{\sin(n\zeta)}{n \sin \zeta} \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \\ \Phi_n(t) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{2} + t + \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{\sin[(2t+1)\lambda_k]}{\sin\lambda_k} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A \cdot 2 b)$$

ここに,

$$\lambda_k = \pi k/n, \lambda_j = \pi j/n, \lambda_i = \pi t/n \dots\dots\dots (A \cdot 3)$$

$$\zeta = \lambda_i - \lambda_j \dots\dots\dots (A \cdot 4)$$

である.

$|n\zeta|$  が小さいときには, 近似的に次式が成り立つ.

$$\Phi_j(t) = \begin{cases} 1 - \frac{n^2+2}{6} \zeta^2 + \frac{3n^4+20n^2-8}{360} \zeta^4 & (n=even) \\ 1 - \frac{n^2-1}{6} \zeta^2 + \frac{3n^4-10n^2+7}{360} \zeta^4 & (n=odd) \end{cases} \dots\dots (A \cdot 5)$$

$(j=1, \dots, n-1)$

なお,

$$\Phi_0(t) + \Phi_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin(n\lambda_i) \cos \lambda_i}{n \sin \lambda_i} & (n=even) \\ \frac{\sin(n\lambda_i)}{n \sin \lambda_i} & (n=odd) \end{cases} \dots\dots\dots (A \cdot 6)$$

$$\sum_{j=0}^n \Phi_j(t) = 1, \sum_{j=0}^n j \Phi_j(t) = t \dots\dots\dots (A \cdot 7)$$

が成立する.

(2) 周期内挿関数 (連続な閉曲線)

$u_n = u_0$  であるから,  $\Psi_0(t) = \Phi_0(t) + \Phi_n(t)$ ,  $\Psi_j = \Phi_j(t)$  とおくと,

$$u(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \Psi_j(t) u_j \dots\dots\dots (A \cdot 8)$$

ここに

$$\Psi_j(t) = \begin{cases} \frac{\sin(n\zeta)}{n \sin \zeta} \cos \zeta & (n=even) \\ \frac{\sin(n\zeta)}{n \sin \zeta} & (n=odd) \end{cases} \dots\dots\dots (A \cdot 9)$$

$(j=0, 1, \dots, n-1)$

$|n\zeta|$  が小さいときには, 式 (A・5) が  $j=0, 1, \dots, n-1$  に対して成り立つ.

また,  $j=0$  で  $t=n$  の場合,  $\zeta = \pi$  になる. このときは  $\pi - \zeta$  を  $\zeta$  とおいて, 式 (A・5) を適用すればよい.

参 考 文 献

- 1) 例えば, 日高孝次: 数値積分法, 上巻, 岩波書店, 1936.
- 2) 同, 下巻, 1943.
- 3) Hamming, R.W.: Numerical Methods for Scientists and Engineers, 2nd ed., McGraw-Hill Kogakusha, p.240, 1973.
- 4) Davis, P.J.: Interpolation and Approximation, Blaisdell, p.78, 1963.
- 5) Isaacson, E. and Keller, H.B.: Analysis of Numerical Methods, Wiley, 1966.
- 6) 草間孝志・大上俊之・三井康司: 有限フーリエ級数を用いた内挿関数と二次元境界要素への応用, 土木学会論文集, 第416号/I-13, pp.205~213, 1990.
- 7) 大崎順彦: 地震動のスペクトル解析入門, 鹿島出版会, 1983.
- 8) 桜井 明: スプライン関数入門, 東京電機大学出版局, p.124, 1981.
- 9) 桜井 明・吉村和美・高山文雄: パソコンによるスプライン関数, 東京電機大学出版局, pp.83~88, 1988.
- 10) Thompson, J.F., Warsi, Z.U.A. and Mastin, C.W.: Numerical Grid Generation, North-Holland, 1985.

(1990. 8. 27 受付)



## IMPROVEMENT OF INTERPOLATION FUNCTION USING FINITE FOURIER SERIES

Takashi KUSAMA and Toshiyuki OHKAMI

Lagrange polynomials are widely used as interpolation functions in engineering. But polynomials of high degree exhibit occasionally considerable oscillation, hence calculated values by polynomials are often inaccurate. Indeed, C. Runge proved that equidistant interpolation over  $|x| \leq 5$  to the function  $f(x) = 1/(1+x^2)$  diverges for  $|x| > 3.63\dots$ . In order to improve an accuracy of the approximation, new interpolation functions using finite Fourier series are proposed. Several numerical experiments are performed to check the validity of the proposed method. It is found that the present interpolation functions are more reliable and efficient than Lagrange polynomials.