土木学会論文集 No. 446／I-19, pp. 157~166, 1992. 4

摂動解による同調質量ダンパー(TMD)—構造物系の動特性の理解と制振評価

阿部雅人*・藤野陽三**

2自由度線形系としてモデル化したTMD—構造物系の複素固有値（振動数，減衰）を摂動法により陽な形で表わした．摂動解により，TMDの最適化の意味がとらえやすくなること，種々のタイプの外力に対するTMDの制振効果，TMDの振幅の予測が陽な形で比較的簡単に表わされること，また，その精度が高いことを示した．

Keywords ： *TMD-structure system, perturbation solution, nonproportional damping, optimization*

1. はじめに

近年，建設系構造物では，振動を抑えるために同調質量ダンパー（TMD）が広く用いられている[1]．

振動が問題となるような構造物では一般にその構造減衰が低い．一方，TMDはその固有振動数を構造物の固有振動数に同調させた上で，減衰をかなり大きめにするので，TMD—構造物系は，強い非比例減衰系となる．

非比例減衰系は，振動モードが複素数，すなわち，位相差のあるモード形となって挙動が理解しにくい面がある．また，N自由度系に対して$2N$次の複素固有値解析が必要となる．そこで，摂動法を適用して，複素固有値の陽な形を求めることが試みられている[2)~4)]．

一方，TMD—構造物系の動特性については，これまでにも数多くの研究がなされてきており，各種の荷重条件に対するTMDの最適減衰や最適同調比などは比較的簡単な形で得られている[5),6)]．しかしながら，実際は，TMDのストロークや施工精度などの制約条件があり，必ずしも理論通りの最適なTMDが設置できるとは限らない．制約条件下でのTMDの設計変数は，逐一運動方程式を直接解いたり，複素固有値解析を行って求めることになり，見通しの欠けた煩雑な作業となる．これを避けるために，実用算定式も提案されている[7)]．ただし，文献7）で示されている算定式は，実用性という点では十分満足のいくものであるが，数値解析結果を関数近似して求めており，物理的な意味に欠けるものとなっている．

TMDは，構造物のある特定の振動モードの制振を目的として設計される．よって，本論文では，構造物のある1つのモードに着目し，すなわち，1自由度系と考えて，TMD—構造物系を線形2自由度としてとらえる．この場合，固有値は，4次の特性方程式の根となる．4次方程式の根は，Ferarriの方法[8)]により，陽な形で表現することができるが，この解は形が複雑であり，パラメータ間の関係がつかめない．

Igusaら[2),3)]は，本体構造物に配管などの2次構造物が付加された系を2自由度系としてモデル化し，その複素固有値（固有振動数，モード減衰）の摂動解を求め，同調比，非比例減衰などがランダム応答に及ぼす影響を解析的に調べている．

本論文では，TMD—構造物系において重要なパラメータである同調比に注目した上で，Igusaら[2),3)]の方法に修正を加え，複素固有値を陽な形で求める．さらに，この結果に基づいて通常TMDに用いられる同調比や減衰の範囲における制振効果，およびTMDの振幅を種々の外力条件に対して比較的簡単な陽な形で表現し，その精度が高いことを示す．

この解を用いて，TMDの最適化についても論じる．TMDの最適値については，数多くの研究があるが，いずれも数学的諸関係に基づくもので，物理的にみて必ずしもわかりやすいものではない[5),9)~13)]．ここでは，簡単な陽な解に基づいて最適化を論じ，その手順を物理的な変数の関係として示す．また，その過程で最適同調比のときの有効かつ簡単な評価式が導かれる．

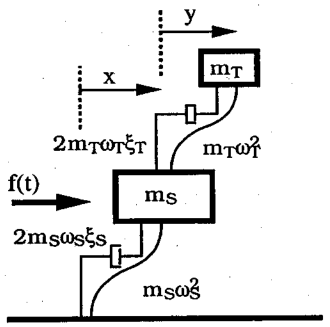
2. TMD—構造物系の固有値の表現

(1) 運動方程式

制振の対象となるモード付近に近接したモードがないとすれば，TMD—構造物系は図—1に示すような，2自由度系として考えることができる[6)]

xを構造物のTMD取付点でモード変数，yをTMDの構造物に対する相対変位とすると，運動方程式は以下

＊学生会員　工修　東京大学大学院　土木工学専攻
（ノースウェスタン大学留学中）
＊＊正会員　Ph.D　東京大学教授　土木工学科
（〒113　東京都文京区本郷7-3-1）



図―1　TMD―構造物系

のようになる．

$$\boldsymbol{M\ddot{X}}+\boldsymbol{C\dot{X}}+\boldsymbol{KX}=\boldsymbol{F} \quad \cdots\cdots(1)$$

ただし，

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m_S & 0 \\ m_T & M_T \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 2m_S\omega_S\xi_S & -2m_T\omega_T\xi_T \\ 0 & 2m_T\omega_T\xi_T \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} m_S\omega_S^2 & -m_T\omega_T^2 \\ 0 & m_T\omega_T^2 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} f_{(t)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

ここで，添字の S は構造物，T は TMD を表わし，m は質量，ξ は減衰定数，ω は固有振動数をそれぞれ表わすものとする．$f_{(t)}$ は外力である．また，各係数の関係を表わす以下の諸量を導入する．

$\omega_a\equiv(\omega_S+\omega_T)/2$，　$\gamma\equiv\omega_T/\omega_S$（同調比），

$\xi_a\equiv(\xi_S+\xi_T)/2$ ……（2）（3）（4）

$\xi_d\equiv\xi_S-\xi_T$，　$\mu\equiv m_T/m_S$（質量比）……（5）（6）

振動モード形を $\boldsymbol{\Phi}=[\phi_x,\phi_y]^T$ とし，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\Phi}\exp(\lambda t)$ とすれば特性方式は，

$$[\lambda^2\boldsymbol{M}+\lambda\boldsymbol{C}+\boldsymbol{K}]\boldsymbol{\Phi}=0 \quad \cdots\cdots(7)$$

となる．このモード形が意味のある値になるためには，式（7）の行列式が0になることが必要条件である．したがって，

$$\lambda^4+2[\omega_S\xi_S+(1+\mu)\omega_T\xi_T]\lambda^3+[\omega_S^2+(1+\mu)\omega_T^2+4\omega_S\omega_T\xi_S\xi_T]\lambda^2+2\omega_S\omega_T[\omega_T\xi_S+\omega_S\xi_T]\lambda+\omega_S^2\omega_T^2=0 \quad \cdots\cdots(8)$$

これを解くと，一般に2組の複素共役な根 λ_1，$\bar{\lambda}_1$，λ_2，$\bar{\lambda}_2$（―は複素共役の意味）が求まる．なお，j 番目固有値が，a_j，b_j を実数として，

$$\lambda_j=a_j+ib_j \quad (j=1,2\,;\, i=\sqrt{-1}) \quad \cdots\cdots(9)$$

と表わせるとして，各モードの固有振動数 ω_j および減衰定数 ξ_j を，1自由度系のときの定義にしたがって以下のように定義する．

$$\omega_j=\sqrt{a_j^2+b_j^2},\quad \xi_j=-a_j/\sqrt{a_j^2+b_j^2} \quad \cdots\cdots(10)\ (11)$$

（2） 摂動の中心

ε を摂動のパラメータとして，複素固有値を以下のように表わすことを考える．

$$\lambda=i\omega^*\left\{i\xi^*+\sqrt{1-\xi^{*2}}+\varepsilon\right\} \quad \cdots\cdots(12)$$

ここで，摂動の中心となる

$$\lambda^*=-\omega^*\xi^*+i\omega^*\sqrt{1-\xi^{*2}}$$

の設定について考える．よく知られているように，一般には複素固有値 λ_1，λ_2 は $\lambda_1\neq\lambda_2$ である．しかし，与えられた μ，ξ_S のもとで，ω_T，ξ_T がある条件を満たせば，$\lambda_1=\lambda_2$，すなわち重根となる．そのときの固有値 λ を

$$\lambda=a\pm ib \quad \cdots\cdots(13)$$

とすれば，特性方程式は，

$$\lambda^4-4a\lambda^3+(6a^2+2b^2)\lambda^2-4a(a^2+b^2)\lambda+(a^2+b^2)^2=0 \quad \cdots\cdots(14)$$

の形になる．式（8）との係数比較から，

$$\xi_S^2\leq\mu \quad \cdots\cdots(15)$$

のとき，

$$\omega_T=\left(\frac{1}{1+\mu}-\frac{\sqrt{\mu}\,\xi_S}{(1+\mu)\sqrt{1+\mu-\xi_S^2}}\right)\omega_S \quad \cdots\cdots(16)$$

$$\xi_T=\frac{\xi_S}{1+\mu}+\frac{\sqrt{\mu}\sqrt{1+\mu-\xi_S^2}}{(1+\mu)} \quad \cdots\cdots(17)$$

$$\omega^*=\left(\sqrt{\frac{1}{1+\mu}-\frac{\sqrt{\mu}\,\xi_S}{(1+\mu)(1+\mu-\xi_S^2)}}\right)\omega_S \quad \cdots\cdots(18)$$

$$\xi^*=\left(\frac{\xi_S}{1+\mu}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\mu}(1+\mu-2\xi_S^2)}{(1+\mu)\sqrt{1+\mu-\xi_S^2}}\right)\frac{\omega_S}{\omega^*} \quad \cdots\cdots(19)$$

ここで，構造減衰 ξ_S を0とすれば，

$$\omega_T=\frac{1}{1+\mu}\omega_S,\quad \xi_T=\sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}} \quad \cdots\cdots(16\,\mathrm{a})\ (17\,\mathrm{a})$$

$$\omega^*=\sqrt{\frac{1}{1+\mu}}\omega_S,\quad \xi^*=\frac{\sqrt{\mu}}{2} \quad \cdots\cdots(18\,\mathrm{a})\ (19\,\mathrm{a})$$

となる．これは，よく知られている自由振動に対する TMD の最適値[10)~12)]と一致する．また，構造減衰 ξ_S および質量比 μ が微小であるときには，それぞれ1次の項まで残して，

$$\omega_T\approx(1-\mu)\omega_S,\quad \xi_T\approx\sqrt{\mu}+\xi_S \quad \cdots\cdots(16\,\mathrm{b})\ (17\,\mathrm{b})$$

$$\omega^*\approx(1-\mu/2)\omega_S,\quad \xi^*\approx\sqrt{\mu}/2+\xi_S \quad \cdots(18\,\mathrm{b})\ (19\,\mathrm{b})$$

と表せる．まず，振動数については式（16 b）より，

$$\omega_a\equiv(\omega_S+\omega_T)/2\approx(1-\mu/2)\omega_S \quad \cdots\cdots(20)$$

であるから，式（18 b）と比較して

$$\omega^*\approx\omega_a \quad \cdots\cdots(21)$$

とおくことにする．

減衰定数については，同様に式（17 b）より，

$$\xi_a\equiv(\xi_S+\xi_T)/2\approx\sqrt{\mu}/2+\xi_S \quad \cdots\cdots(22)$$

であるから，式（19 b）との比較から，

$$\xi^*\approx\xi_a \quad \cdots\cdots(23)$$

となる．式（16 b），（17 b）を満たすときに $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ となり，そのときの λ は近似的に，

$$\lambda=-\omega_a\xi_a+i\omega_a\sqrt{1-\xi_a^2} \quad \cdots\cdots(24)$$

で表わされる．本論ではこのλを式（12）における摂動の中心λ^*ととることにする．

後の解析で用いる固有振動数ω_S, ω_Tの近接度の基準として，式（16 a）の関係が満たされるときに0になる

$$\beta=\{\omega_S-(1+\mu)\omega_T\}/\omega_a \quad \cdots\cdots(25)$$

を採用することにする．

（3） 固有値の摂動解

建設系構造物では，TMD—構造物系の質量比$\mu\approx 0.01$，すなわち$\sqrt{\mu}\approx 0.1$であり，減衰定数の平均値ξ_aも0.1のオーダーである．また，βについては，0に近いことが望ましいが，0.1程度までは実際上有り得よう．したがって，各パラメータのオーダーを以下のようにおいて摂動法を適用する．

$$O(\beta)\approx O(\xi_a)\approx O(\sqrt{\mu})\approx O(\varepsilon)\ll O(1) \quad \cdots\cdots(26)$$

ω_S, ω_Tをβ, ω_a, μで表わし，式（8）の特性方程式に代入して最低次数の項だけ残すと，

$$4\varepsilon^2-(\beta+i\xi_d)^2-\mu=0 \quad \cdots\cdots(27)$$

となる．式（27）をεについて解くと，

$$\varepsilon=\pm\left(\sqrt{\mu+(\beta+i\xi_d)^2}\right)/2 \quad \cdots\cdots(28)$$

したがって，固有値の摂動解は以下のようになる．

$$\lambda_1=i\omega_a\left(1+i\xi_a+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(\beta)\sqrt{\mu+(\beta+i\xi_d)^2}\right) \cdots (29\text{ a})$$

$$\lambda_2=i\omega_a\left(1+i\xi_a-\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(\beta)\sqrt{\mu+(\beta+i\xi_d)^2}\right) \cdots (29\text{ b})$$

ここで，$\operatorname{sgn}(\beta)$は$\beta$の符号を表す．これは，全ての$\beta$の値について，モード1を，非同調時に構造物卓越型に収束するモードに対応させるためのものである[2]．

式（10）（11）より，モード振動数，モード減衰は以下の通りとなる．（$j=1,2$，複号は$j=1$が上，$j=2$が下）

$$\omega_j=\omega_a\left(1\pm\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(\beta)Re\sqrt{\mu+(\beta+i\xi_d)^2}\right) \cdots\cdots(30)$$

$$\xi_j=\frac{\omega_a}{\omega_j}\left(\xi_a\pm\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(\beta)Im\sqrt{\mu+(\beta+i\xi_d)^2}\right) \cdots\cdots(31)$$

ここで，Re, Imは，実部および虚部をそれぞれ表す．なお，モード振動数，およびモード減衰の差を表すパラメータを以下のように定義する．

$$\tilde{\beta}=(\omega_1-\omega_2)/\omega_a=\operatorname{sgn}(\beta)Re\sqrt{\mu+(\beta+i\xi_d)^2} \quad \cdots\cdots(32)$$

$$\tilde{\xi}_d=\xi_1-\xi_2\approx\operatorname{sgn}(\beta)Im\sqrt{\mu+(\beta+i\xi_d)^2} \quad \cdots\cdots(33)$$

式（30），（31）は，Igusaらによる解[2),3)]と，式（25）に示したβの定義が異なっている．Igusaらは，

$$\beta_I=(\omega_S-\omega_T)/\omega_a \quad \cdots\cdots(34)$$

を採用している．本論文では，TMDの性能が，構造物の固有振動数との同調の度合いに大きく影響されることに着目して，βの定義に特に注意を払い，Igusaらの解に修正を加えている．

（4） 摂動解の精度とその補正

複素固有値解析によって求めたモード振動数，モード減衰と摂動解（式（30），（31））を比較したのが図—2，図—3である．$\xi_S=0$, $\mu=0.01$として，図—2では，同調比γを最適値の$1/(1+\mu)$および$\gamma=0.95$としξ_Tを変数に，図—3ではξ_Tを式（18 a）で与えた最適減衰定数とし，γを変数にとっている．図—3にはIgusaら[2),3)]が定義した式（34）による解も参考として示した．図—3（b）に示したモード減衰で特に顕著であるが，式（25）を用いた本論文の方法の方が，TMDとして重要な$\gamma=1$の付近で著しく精度が向上している．

図からわかるように，式（30），（31）は，ξ_Tの変動に対しては精度はよいが（図—2），振動数が同調を外れると精度が落ちる（図—3）．そこで，Igusaら[2]，Nayfeh[14]にならって，非同調時の解を用いて補正をする．

構造物とTMDが同調していないときを考えると，質量比が小さいため相互作用が小さく，それぞれの1自由度系の固有値が2自由度系の固有値にほぼ対応する．すなわち，

$$\lambda_1\rightarrow-\omega_S\xi_S+i\omega_S\sqrt{1-\xi_S^2} \quad \cdots\cdots(35\text{ a})$$

$$\lambda_2\rightarrow-\omega_T\xi_T+i\omega_T\sqrt{1-\xi_T^2} \quad \cdots\cdots(35\text{ b})$$

また，式（29）でβが大きいときには，

$$\lambda_j=i\omega_a\left[1+i\xi_a\pm\frac{1}{2}(\beta+i\xi_d)\right]=\begin{Bmatrix}i\omega_S-\omega_a\xi_S\\ i\omega_T-\omega_a\xi_T\end{Bmatrix} \cdots\cdots(36)$$

となる．そこで，ξ_Sを$\xi_S\omega_S/\omega_a$に，ξ_Tを$\xi_T\omega_T/\omega_a$にそれぞれ置き換えれば，非同調時においても精度が上がることが予想される．また，これらの補正を加えても，同調しているときには，ω_S/ω_a, ω_T/ω_a共に1に近づくので，同調時にも精度が落ちることはない．以後，式（29）～（31）の解を同調時の解という意味で同調解（Tuned Expression），補正後の解を補正解（Matched Expression）と呼ぶことにする[2),3)]．

補正解によるモード振動数，モード減衰の表現は，

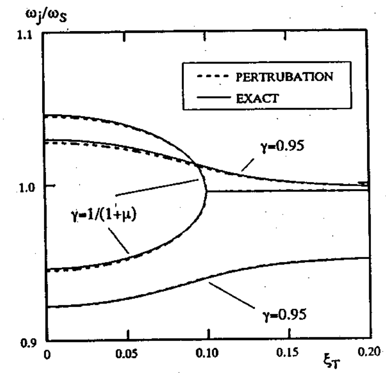
$$\omega_j=\omega_a\left\{1\pm\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(\beta)Re\sqrt{\mu+\left[\beta+i\left(\frac{\omega_S}{\omega_a}\xi_S-\frac{\omega_T}{\omega_a}\xi_T\right)\right]^2}\right\}$$

$$\xi_j=\frac{\omega_a}{\omega_j}\left\{\frac{\omega_S}{\omega_a}\xi_S+\frac{\omega_T}{\omega_a}\xi_T\pm\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(\beta)Im\sqrt{\mu+\left[\beta+i\left(\frac{\omega_S}{\omega_a}\xi_S-\frac{\omega_T}{\omega_a}\xi_T\right)\right]^2}\right\} \cdots\cdots(37)(38)$$

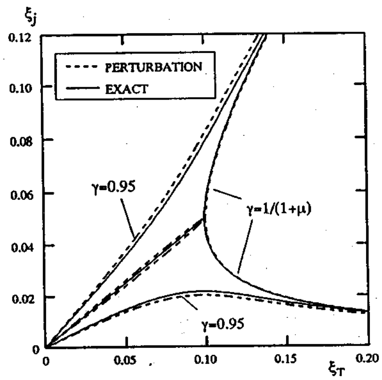
となる．図—3の場合について補正後の式を用いたものが，図—4である．非同調時にも高い精度を得ている．

（5） モード減衰の最適化

過渡振動や衝撃に伴う残留振動を抑えるためには，自由振動，すなわちモード減衰に対してTMDを最適化することが重要である．ここでは，式（31）のモード減衰の摂動解を用いて，最適パラメータを求めてみる．

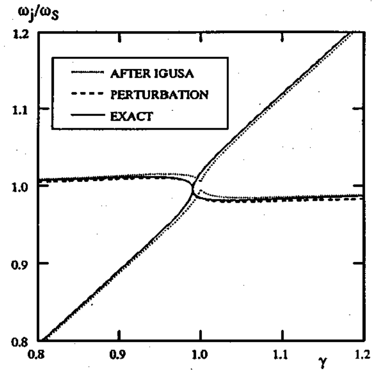


（a） モード振動数 ω_j

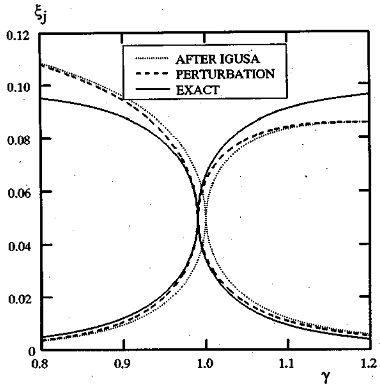


（b） モード減衰 ξ_j

図—2 摂動解と厳密解の比較
—ξ_T による変化—
(μ=0.01；ξ_S=0；$\gamma=1/(1+\mu)$, 0.95)

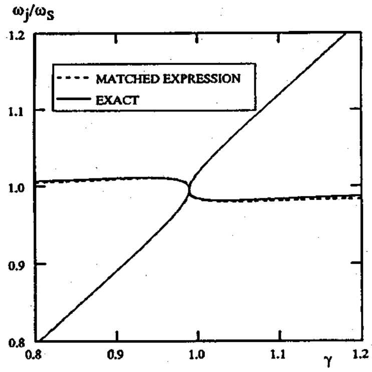


（a） モード振動数 ω_j

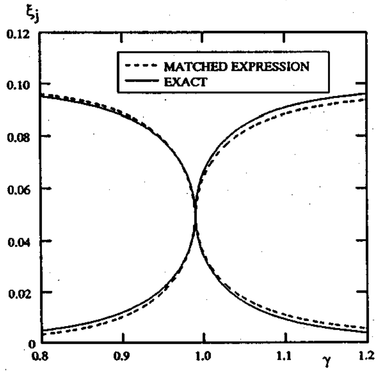


（b） モード減衰 ξ_j

図—3 摂動解と厳密解の比較
—γ による変化—
(μ=0.01；ξ_S=0；$\xi_T=\sqrt{\mu/(1+\mu)}$)



（a） モード振動数 ω_j



（b） モード減衰 ξ_j

図—4 補正解—γ による変化—
(μ=0.01；ξ_S=0；$\xi_T=\sqrt{\mu/(1+\mu)}$)

一般的な初期条件のもとでは，2つのモードが励起されるので，系全体の減衰は小さいほうのモード減衰により支配されることになる．したがって，最適な設計のときは，2つのモード減衰が等しい，すなわち $\xi_1=\xi_2$ となることが要求される．TMD と構造物は同調状態，すなわち，$\omega_j\approx\omega_a$ であるから，モード減衰は式（31）より $\xi_j\approx\xi_a\pm\tilde{\xi}_d/2$ となり，$\tilde{\xi}_d$ が 0 になることが必要条件となる．このためには，式（33）より，ξ_d もしくは β が 0（ただし，$\mu-\xi_d^2\geqq0$）となる．$\omega_S\approx\omega_T$ であることを考えると，ξ_d が 0 になるときは，近似的に比例減衰系となり，その結果，2つのモード減衰が等しくなって，$\xi_1=\xi_2=\xi_a$ となる場合である．$\xi_d=0$ であるから $\xi_a=\xi_S$ となるが，構造減衰 ξ_S が非常に小さいことを考えると，この場合は TMD の最適設計値を与えないことは明らかである．もう一方の条件，すなわち β が 0 のとき，$\xi_1=\xi_2=\xi_a$ となって最適値を与える．$\beta=0$ であるから，最適同調比は，

$$\gamma=1/(1+\mu) \qquad (39)$$

となる．このときモード減衰 ξ_1, ξ_2 ($\xi_1=\xi_2$) を最大にするためには $\tilde{\xi}_d=0$，すなわち，$\mu-\xi_d^2\geqq0$ の条件で，ξ_a を最大にすることを考えることになる．

構造減衰 $\xi_S=0$ の場合を考えると，$\xi_a=\xi_T/2$ であるから，式（39）の最適同調比のもとでモード減衰は以下のように表される．

$$\xi_j=\xi_T/2,\quad (\xi_T\leq\sqrt{\mu}) \qquad (40\,\mathrm{a})$$

$$\xi_j=\xi_T/2\pm\sqrt{\xi_T^2-\mu},\quad (\xi_T\geq\sqrt{\mu}) \qquad (40\,\mathrm{b})$$

モード減衰 ξ_j は，$\mu-\xi_T^2=0$ のときに最大になり，その時の TMD の減衰は，

$$\xi_T=\sqrt{\mu} \qquad (41)$$

そのときのモード減衰は，

$$\xi_j=\sqrt{\mu}/2 \qquad (42)$$

となる．これらは μ が小さいことを考えると，式（16 a）～(19 a）にあげた厳密解のよい近似になっている．

また，式（40 a，b）は，図—2（b）に示した最適同調比のときのモード減衰の予測式になっており，摂動解によって非常に簡便な形で表せることがわかる．

3. ランダム応答

ここでは解析的な取扱いを容易にするために外力 $f(t)$ を白色雑音とする．実際の自然現象は定常でなく，また無限大の振動数成分は含まれないが，大気乱流や地

震動などの外力による構造物の応答を対象とするときのTMDの設計変数は，この外力モデル化にしたがって決定されることが多いようである．その際，TMDの設計は，構造物，およびTMDの2乗平均応答をもとに行われる．

（1） 厳密解

白色雑音外力が働くときの2乗平均応答は，厳密解を解析的に求めることができる[15]．1自由度系では，外力 $m\exp(i\omega t)$ に対する周波数応答関数を $H(\omega)$ とすると，スペクトル密度 S_0 の白色雑音外力 $f(t)$ が働くときの2乗平均応答は，以下の積分に帰着される．

$$E[z^2]=\frac{S_0}{m_s^2}\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2d\omega \qquad (z=x \text{ or } y) \cdots\cdots(43)$$

ここで取り上げている図—1の2自由度系については，周波数応答関数は，x，y についてそれぞれ，

$$H_x(\omega)=(-\omega^2+2i\xi_T\omega_T\omega+\omega_T^2)/\Delta \cdots\cdots(44\text{ a})$$

$$H_y(\omega)=\omega^2/\Delta \cdots\cdots(44\text{ b})$$

ただし，

$$\Delta=\omega^4-2i[\omega_S\xi_S+(1+\mu)\omega_T\xi_T]\omega^3-[\omega_S^2+(1+\mu)\omega_T^2+4\omega_S\omega_T\xi_S\xi_T]\omega^2+2i\omega_S\omega_T[\omega_T\xi_S+\omega_S\xi_T]\omega+\omega_S^2\omega_T^2 \cdots\cdots(44\text{ c})$$

となる．式（48）の積分を実行すると，

$$E[x^2]=\pi S_0\frac{\left\{\begin{array}{l}8\xi_T\omega_T^2[\xi_S(\xi_S\omega_T+\xi_T\omega_S)+(1+\mu)\xi_T\omega_T\\(\xi_S\omega_T/\omega_S+\xi_T)]+2\mu\omega_T^3[\xi_S\omega_T/\omega_S+\xi_T]\\+2\xi_T\omega_T[\omega_S-(1+\mu)\omega_T^2/\omega_S]\end{array}\right\}}{m_s^2D} \cdots\cdots(45\text{ a})$$

$$E[y^2]=2\pi S_0\omega_S\omega_T(\xi_S\omega_T+\xi_T\omega_S)/(m_s^2D) \cdots\cdots(45\text{ b})$$

ただし，

$$D=4\omega_S\omega_T\{\mu\omega_S\omega_T[\xi_S\omega_T+\xi_T\omega_S]^2+\xi_S\xi_T[\omega_S^2-(1+\mu)\omega_T^2]^2+4\xi_S\xi_T\omega_S\omega_T[\omega_S\omega_T(\xi_S^2+(1+\mu)\xi_T^2)+\xi_S\xi_T(\omega_S^2+(1+\mu)\omega_T^2)]\} \cdots\cdots(45\text{ c})$$

となる．これが，2乗平均応答の厳密解である．

1自由度系の応答が

$$E[z^2]=\pi S_0/(2\xi\omega^3m^2) \qquad (z=x \text{ or } y) \cdots\cdots(46)$$

であることにより，TMD—構造物系の等価付加減衰 ξ_{eq} を，

$$\xi_{eq}=\frac{\pi S_0}{2\omega_S^3m_s^2E[x^2]}-\xi_S \cdots\cdots(47)$$

と定義する．また，TMDの相対振幅 y は構造物の振幅 x で無次元化して表現することとし，

$$A_T=\sqrt{E[y^2]/E[x^2]} \cdots\cdots(48)$$

を指標とする．

（2） 摂動解とその補正

式（45）に示したように，2乗平均応答は解析的に表現されるが，前述の摂動解により簡単になる．すなわち，構造物およびTMDの変位の2乗平均応答は，

$$E[x^2]=\pi S_0\frac{\mu\xi_a+2\xi_T(\beta^2+4\xi_a^2)}{4\omega_a^3m_s^2(\xi_S\xi_T(\beta^2+4\xi_a^2)+\mu\xi_a^2)} \cdots(49\text{ a})$$

$$E[y^2]=\pi S_0\frac{\xi_a}{4\omega_a^3m_s^2(\xi_S\xi_T(\beta^2+4\xi_a^2)+\mu\xi_a^2)} \cdots(49\text{ b})$$

と表せる．したがって，等価付加減衰及びTMDの無次元振幅はそれぞれ，

$$\xi_{eq}=\frac{2\omega_a^3}{\omega_S^3}\frac{\xi_S\xi_T(\beta^2+4\xi_a^2)+\mu\xi_a^2}{\mu\xi_a+2\xi_T(\beta^2+4\xi_a^2)}-\xi_S \cdots\cdots(50)$$

$$A_T=\sqrt{\frac{\xi_a}{\mu\xi_a+2\xi_T(\beta^2+4\xi_a^2)}} \cdots\cdots(51)$$

となる．

等価付加減衰およびTMDの無次元振幅を求めて，厳密解と比較したものが図—5，図—6である．等価付加減衰は，同調比が離れると精度が落ちてくるので，固有値のときと同様に，非同調時の解を参考に補正を加える．非同調時には，β が大きくなるので，

$$\xi_{eq}\approx\frac{2\omega_a^3}{\omega_S^3}\frac{\xi_S\xi_T\beta^2}{2\xi_T\beta^2}-\xi_S=\left(\frac{\omega_a^3}{\omega_S^3}-1\right)\xi_S \cdots\cdots(52)$$

となる．ところで，非同調時には，1自由度系の応答に近づき，等価付加減衰は0に近付くと考えられる．そこで式（50）の ω_a/ω_S を1と置き換えれば，非同調時にも適合する解となる．すなわち，

$$\xi_{eq}=2\cdot\frac{\xi_S\xi_T(\beta^2+4\xi_a^2)+\mu\xi_a^2}{\mu\xi_a+2\xi_T(\beta^2+4\xi_a^2)}-\xi_S \cdots\cdots(53)$$

なお，同調時には，$\omega_a/\omega_S\approx1$ であることを考えると，この補正によって，同調時の精度は失われることはない．図—6（a）に，補正解を示すが，精度が向上している．無次元振幅 A_T については，非同調時には0に近づくと考えられるが，式（51）は，そのままで β が大きくなると0に近づくから，補正解を求める必要はない．

（3） 等価付加減衰の最適化

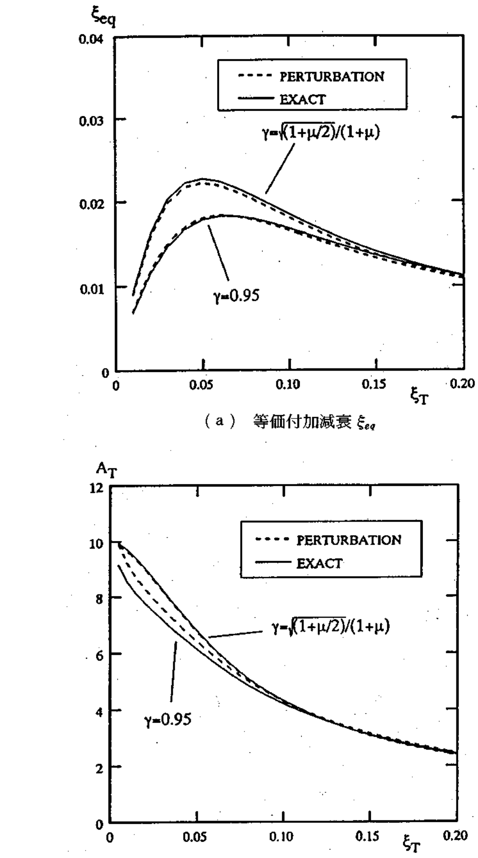
式（45）に示したように，構造物の2乗平均応答 $E[x^2]$ の厳密解は，陽な形で求められているから，これを微分して極値を求めることによって，構造減衰がない場合の最適同調比，および最適減衰定数を求めることができる[5]．すなわち，

$$\frac{\partial}{\partial\omega_T}E[x^2]=0,\quad \frac{\partial}{\partial\xi_T}E[x^2]=0 \cdots\cdots(54\text{ a, b})$$

これらより，

$$\gamma=\frac{\sqrt{1+\mu/2}}{1+\mu},\quad \xi_T=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu(1+3\mu/4)}{(1+\mu)(1+\mu/2)}} \cdots\cdots(55)(56)$$

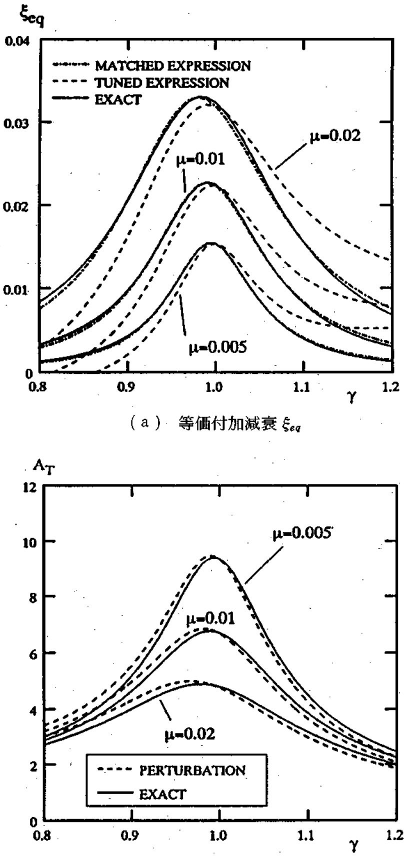
この最適条件下での等価付加減衰及びTMDの無次元振幅は，それぞれ，



（a） 等価付加減衰 ξ_{eq}

（b） TMD の無次元振幅 A_T

図―5 ランダム入力に対する TMD の性能―ξ_T による変化―（$\mu=0.01$, ；$\xi_S=0.01$；$\gamma=\sqrt{1+\mu/2}/(1+\mu)$, 0.95）



（a） 等価付加減衰 ξ_{eq}

（b） TMD の無次元振幅 A_T

図―6 ランダム入力に対する TMD の性能―γ による変化―$\left(\mu=0.005,\ 0.01,\ 0.02;\ \xi_S=0.01;\ \xi_T=\sqrt{\dfrac{\mu(1+3\mu/4)}{(1+\mu)\cdot(1+\mu/2)}}\right)$

$$\xi_{eq}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\mu(1+\mu)}{1+3\mu/4}},\quad A_T=\frac{1+\mu}{\sqrt{2\mu(1+3\mu/4)}} \qquad \cdots\cdots(57)(58)$$

である．

摂動解についても，構造物の2乗平均応答を β，および ξ_T について微分することによって，最適値を求めるとができる．構造減衰がない場合，

最適同調比は，

$$\gamma=1/(1+\mu) \qquad (\text{すなわち}\ \beta=0) \cdots\cdots(59)$$

このとき，

$$\xi_{eq}=\mu\xi_T/(\mu+4\xi_T{}^2) \cdots\cdots(60)$$

と求まる．式（60）を ξ_T について微分すると，TMD の最適減衰定数が得られて，

$$\xi_T=\sqrt{\mu}/2 \cdots\cdots(61)$$

そのときの等価付加減衰は，

$$\xi_{eq}=\sqrt{\mu}/4 \cdots\cdots(62)$$

TMD の無次元振幅は，

$$A_T=1/\sqrt{2\mu} \cdots\cdots(63)$$

となり，式（55）～(58）の結果の μ に関する最低次（式（59）については1次）の近似になっている．また，式（60）は，最適同調比のときの予測式になっている．

4. 調和応答

周期的な外力に対する TMD の設計は，周波数応答曲線上での構造物，および TMD の応答の最大を指標に行うことが多い．

（1） 摂動解とその補正

式（43）に表わされる周波数応答関数の最大値は，ここではどちらかのモード固有振動数で加振するときに表れると考える．式（30）で表わされる固有振動数の摂動解 ω_1，ω_2 を直接代入し最低次数の項のみを残すと，ω_1 でのピーク値 $H_x{}^1$，$H_y{}^1$，ならびに ω_2 でのピーク値 $H_x{}^2$，$H_y{}^2$ はそれぞれ，

$$H_x{}^1=\left|\frac{-(\tilde{\beta}+\beta)+2\xi_T i}{\omega_a{}^2\cdot\Gamma(\tilde{\beta})}\right|,\quad H_y{}^1=\left|\frac{1}{\omega_a{}^2\cdot\Gamma(\tilde{\beta})}\right|$$

$$H_x^2=\left|\frac{(\tilde{\beta}+\beta_1)+2\xi_T i}{\omega_a^2\cdot\Gamma(-\tilde{\beta})}\right|,\quad H_y^2=\left|\frac{1}{\omega_a^2\cdot\Gamma(-\tilde{\beta})}\right| \quad\cdots\cdots(64\,a)(64\,b)(64\,c)(64\,d)$$

ただし,

$$\Gamma(\tilde{\beta})=[\tilde{\beta}-\beta-2\xi_S i]\cdot[\tilde{\beta}+\beta-2\xi_T i]-\mu \quad\cdots\cdots(64\,e)$$

で, $\tilde{\beta}$ は, 式 (32) による. 2つのピークのうち高いほうを以て最大値とする. TMD では一般に $\xi_S \leq \xi_T$ が満たされるが, このときには, モード1のピークが卓越することが, 若干の検討によって示される. すなわち, H_x^1, H_y^1 の値が問題になる.

等価付加減衰を, 1自由度系のアナロジーから

$$\xi_{eq}=\frac{1}{2\omega_S^2 H_x}-\xi_S \quad\cdots\cdots(65)$$

と定義すると (H_x は, 構造物の周波数応答の最大値), H_x に式 (64 a) を代入して,

$$\xi_{eq}=\frac{1}{2}\left|\frac{\omega_a^2}{\omega_S^2}\frac{\Gamma(\tilde{\beta})}{-(\tilde{\beta}+\beta)+2\xi_T i}\right|-\xi_S \quad\cdots\cdots(66)$$

となる. 前節と同様に, 非同調時には等価付加減衰が0となることを考えて, $\omega_a/\omega_S=1$ とする補正を加えることとする. その結果, 補正解は

$$\xi_{eq}=\frac{1}{2}\left|\frac{\Gamma(\tilde{\beta})}{-(\tilde{\beta}+\beta)+2\xi_T i}\right|-\xi_S \quad\cdots\cdots(67)$$

となる. 最大応答時の TMD の無次元振幅を $A_T=H_y/H_x$ で表わすことにすると,

$$A_T=\left|\frac{1}{-(\tilde{\beta}+\beta)+2\xi_T i}\right|=\sqrt{\frac{1}{(\tilde{\beta}+\beta)^2+4\xi_T^2}} \quad\cdots\cdots(68)$$

となる. A_T は, 非同調時には0に漸近する. 式 (68) は, β の値が大きくなるにつれて, 0に漸近する. したがって, このままの形で補正解にもなっていることがわかる. ここで得られた摂動解と数値計算による厳密解との比較を図—7, 図—8に示す. いずれも全体の傾向をよく表わしているといえよう.

ただし, 図—7 (a) を見ると, $\gamma=1/(1+\mu)$ (これは後で示すように最適同調比である) のとき, $\xi_T=0.1$ 付近で若干の差がある. これは, 2つのモード固有振動数 ω_1, ω_2 が非常に近く, その振動数に対応する2つのピークの値が近い場合, 周波数応答の最大値は ω_1, ω_2 の間でとるためである. 中間値 ω_a で最大値をとるとすると, 等価付加減衰 ξ_{eq} は, 式 (44) の周波数応答関数に ω_a を代入して最低次の項のみ残すことによって得られ,

$$\xi_{eq}=\frac{1}{2}\left|\frac{[-\beta-2\xi_S i]\cdot[\beta-2\xi_T i]-\mu}{-\beta+2\xi_T i}\right|-\xi_S \quad\cdots\cdots(69)$$

となる. 式 (69) による結果も同図に示してあるが, 最適減衰付近ではこの方が厳密解に近いことがわかる. ただし, この現象は, 周波数応答関数の2つのピークが近接しているときにのみ顕著であり, TMD が同調を外れて2つのピークの一方が卓越するような場合にはその影響はほとんど表れない. 同調を外れた場合の例として, 図—7 (a) に $\gamma=0.95$ の場合についても示した. γ, ξ_T が最適値に非常に近い場合には, 式 (67), (69) の小さいかいほうの値を取るほうがより精度が高いということになるが, 式 (67) が工学的に問題となるほどの誤差をもたらすわけではない.

(2) 等価付加減衰の最適化

2つのピークの値がともに等しく小さいときを以て調和外力に対する最適な TMD と考える[9]. H_x^1 と H_x^2 の高さが等しくなるのは, 式 (64 a, c) より, $\beta=0$ のときである. したがって, 最適同調比は,

$$\gamma=1/(1+\mu) \quad\cdots\cdots(70)$$

となり, 構造減衰がない場合の厳密解[9]と一致する.

最適同調比のもとで, 構造減衰 $\xi_S=0$ のときの TMD の減衰とピーク応答との関係を調べてみる. 構造物の応答は, $\xi_T \leq \sqrt{\mu}$ で大きさの等しい2つのピークを持つことが若干の検討によって示され,

$$H_x^1=H_x^2=\frac{1}{\omega_a^2\xi_T}\sqrt{\frac{\mu+3\xi_T^2}{4\mu-3\xi_T^2}} \quad\cdots\cdots(71)$$

すなわち, 等価付加減衰にして

$$\xi_{eq}=\frac{\xi_T}{2}\sqrt{\frac{4\mu-3\xi_T^2}{\mu+3\xi_T^2}} \quad\cdots\cdots(72\,a)$$

$\xi_T \geq \sqrt{\mu}$ では, 図—2 (a) からわかるように2つのモードの固有振動数が一致する. つまり, 2つのピークが重なって単一のピークとなって,

$$\xi_{eq}=\mu/(4\xi_T) \quad\cdots\cdots(72\,b)$$

となる. これらから, 構造物の最大応答の最小に, すなわち等価付加減衰を最大にする TMD の最適減衰定数 ξ_T ならびに等価付加減衰 ξ_{eq} の値は式 (72 a) を ξ_T について微分することによって得られ,

$$\xi_T=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{3}\mu},\quad \xi_{eq}=\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}\sqrt{\mu} \quad\cdots\cdots(73)\,(74)$$

となる. 一方厳密解は,

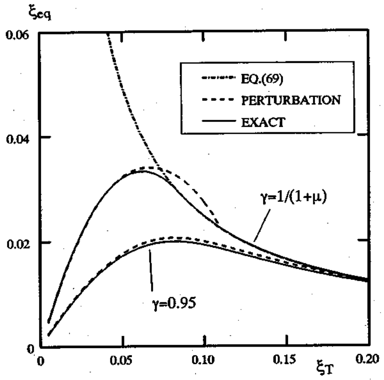
$$\xi_T=\sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)^3}},\quad \xi_{eq}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{2+\mu}} \quad\cdots\cdots(75)\,(76)$$

である[9]. 質量比 $\mu=0.01$ の場合で, 最適減衰定数 ξ_T は厳密解の 0.0612 に対して式 (73) の摂動解 0.0642, 等価付加減衰 ξ_{eq} は厳密解 0.0354 に対して式 (74) の摂動解 0.0357 であるからよい近似になっている.

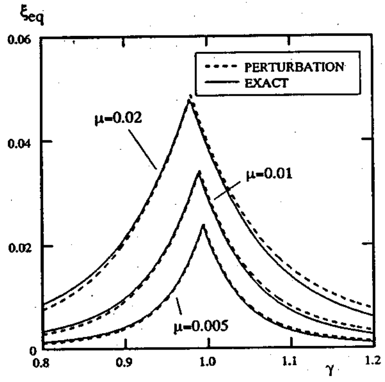
なお, 式 (72 a, b) は, 最適同調比のときの等価付加減衰の簡易式として用いることができる. 参考までに, 式(69)は, 最適同調時かつ構造減衰0のときには,

$$\xi_{eq}=\mu/(4\xi_T) \quad\cdots\cdots(72\,c)$$

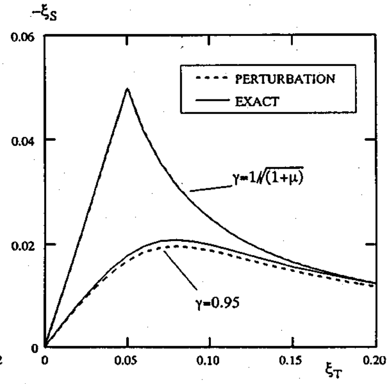
と表せる. 式 (72 c) は非常に簡単な式だが, 図—7 (a) に示したように TMD の減衰が最適減衰より高いときにはよく合っており, 実用的には十分な式であると言え



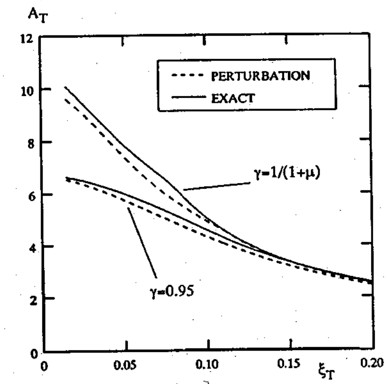
（a） 等価付加減衰 ξ_{eq}



（a） 等価付加減衰 ξ_{eq}

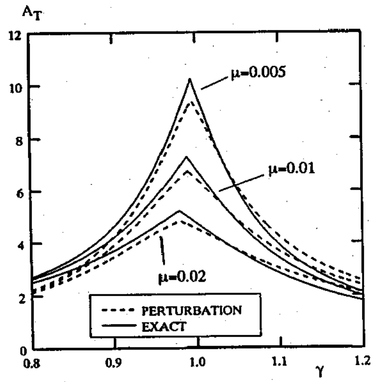


図—9 負減衰に対する安定性
—ξ_T による変化—
（$\mu=0.01$；$\gamma=1/\sqrt{1+\mu}$, 0.95）



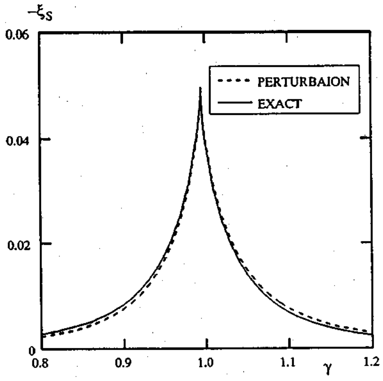
（b） TMD の無次元振幅 A_T

図—7 調和入力に対する TMD の性能
—ξ_T による変化—
（$\mu=0.01$；$\xi_S=0.01$；$\gamma=1/(1+\mu)$, 0.95）



（b） TMD の無次元振幅 A_T

図—8 調和入力に対する TMD の性能
—γ による変化—
（$\mu=0.005$, 0.01, 0.02；$\xi_S=0.01$；$\xi_T=\sqrt{3\mu/(1+\mu)^3}$）



図—10 負減衰に対する安定性
—γ による変化—

$$\left(\mu=0.01\,;\ \xi_T=\sqrt{\left(\frac{\mu}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\mu}}\right)}\right)$$

る．ちなみに，通常 TMD はスペースの制約等の理由で，最適減衰より減衰を大きくして用いることが多い．

5. 自励振動に対する制振効果の評価

TMD による付加減衰効果によって，自励振動を抑えることができる．ギャロッピングなどの，空力自励振動は，基本的に非線形な現象であるが，振幅が微小な領域を対象としてここでは，線形な負減衰を持つ系の振動としてモデル化する．このとき，TMD の性能は，TMD 付加によって安定化できる構造物の負減衰の大きさで評価される[12),13)]．

負減衰を受ける構造物に TMD が付加された系の動的安定性は，モード減衰から判断することができる．つまり，モード減衰が両方とも正ならば，自励振動は発生せず，系は安定である．

なお，ここでは，ξ_S は負の値を持ち，構造物に働く負減衰を表すものとする．

（1） 摂動の中心

2.（2）で求めたモード減衰を求める際の摂動の中心は，構造減衰の絶対値が非常に小さい仮定の下で導かれた．しかしながら，構造物に働く負減衰の値は TMD の減衰 ξ_T 程度のオーダーであり，2.（2）での仮定（式(15)）は成り立たない．したがって，摂動の中心を考慮し直す必要がある．

安定の限界となる点では，TMD—構造物系のモード減衰が 0 となる．2 つの固有値共に実数成分が 0 となる条件を求めると，固有値は，a および b を実数として，

$$\lambda_1=ia,\quad \lambda_2=ib \qquad \text{(77 a, b)}$$

と表わされる．そのときの特性方程式は，

$$\lambda^4+(a^2+b^2)\lambda^2+a^2b^2=0 \qquad (78)$$

の形になるので，式（8）との係数比較，および係数が実数である条件から，

$$\omega_T=\sqrt{\frac{1}{1+\mu}}\omega_S,\quad \xi_T=\sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu}-1}{2\sqrt{1+\mu}}} \qquad (79)\ (80)$$

$$\xi_S=-\sqrt{\frac{1+\mu-\sqrt{1+\mu}}{2}},\quad \omega^*=\sqrt[4]{\frac{1}{1+\mu}}\omega_S$$

$\xi^*=0$ ……………………………………(81)(82)(83)

となる．これらは，負減衰に対する TMD の最適値と一致する[12),13)]．また，このとき $a=b=\omega^*$，すなわち重根となっている．

2.(2)と同様に，構造減衰 ξ_S および質量比 μ について，それぞれ1次の項まで残すと，$\omega^*\approx\omega_a$ となる．減衰定数については，その値がもともと微小であることを考慮して，0次の項まで残すとにすると，$\xi^*\approx\xi_a$ となる．よって，この場合も，式（24）の λ を摂動の中心とすることにする．ただし，固有振動数 ω_S，ω_T の近接度を表すパラメータ β' としては，式（79）より

$$\beta'=\{\omega_S-\sqrt{(1+\mu)}\,\omega_T\}/\omega_a \quad\cdots\cdots(84)$$

を採用する．

（2） 摂動解とその精度

前節の結果より，β を β' で置き換えれば，式（31）のモード減衰の摂動解を用いることができる．小さいほうのモード減衰が正であることが，系が安定であることの必要十分条件であるから，$\omega_j\approx\omega_a$ に注意して，

$$\xi_a-|\tilde{\xi}_d|/2\geq 0 \quad\cdots\cdots(85\text{ a})$$

あるいは，絶対値を外して

$$\xi_a^2-\frac{1}{8}\left\{\sqrt{(\mu+\beta'^2-\xi_d^2)^2+4\beta'^2\xi_d^2}-(\mu+\beta'^2-\xi_d^2)\right\}\geq 0 \quad\cdots\cdots(85\text{ b})$$

式（85）の結果と複素固有値解析によって求めた厳密解を比較したのが図―9である．縦軸は，系が安定である限界の負減衰 ξ_S の絶対値をとっている．非常によく一致していることがわかる．

非同調時には，$\xi_S\geq 0$ が系の安定のための条件になる．式（83 a）において，β' が大きい場合を考えると，

$$\tilde{\xi}_d\approx Im(\beta'+i\xi_d)=\xi_d \quad\cdots\cdots(86)$$

したがって，$\xi_T>0$，$\xi_S\leq 0$ に注意して展開すると，

$$\xi_a-\frac{1}{2}|\tilde{\xi}_d|\approx\xi_a-\frac{1}{2}|\xi_d|=\frac{\xi_S+\xi_T}{2}-\frac{1}{2}\{-(\xi_S-\xi_T)\}$$
$$=\xi_S\geq 0 \quad\cdots\cdots(87)$$

が安定性の条件となり，式（85）は同時に β' に関する補正解にもなっていることがわかる．式（80）の最適減衰定数を用いたときの安定条件は図―10のようになり，この場合も数値計算による厳密解とほぼ一致し，非常によい近似であることがわかる．

安定性を判断するには，通常複素固有値解析を行ったり，Routh の判別式が用いられるが[9),13)]，この様にモード減衰の正負という直観にあった比較的簡単な条件式で，安定性を判断することができる．

（3） 負減衰に対する最適化

式（83 a）より，ある ξ_a が与えられたときの最適条件は $\tilde{\xi}_a=0$ となる．すなわち，式（33）より $\xi_d=0$ または，$\beta'=0$（ただし，$\mu-\xi_d^2\geq 0$）である．$\xi_d=0$ とすると，構造減衰 ξ_S が負であるとき TMD の減衰 ξ_T も負となってしまうので，$\beta'=0$ が必要条件となる．すなわち

$$\gamma=1/\sqrt{1+\mu} \quad\cdots\cdots(88)$$

となる．厳密な最適同調比は，式（77）に示した通りであり，ここで導かれた摂動解による結果と一致する．

以下に，$\beta'=0$ のときの TMD―構造部系が安定な ξ_S（<0）の範囲を調べる．

$\mu-\xi_d^2\geq 0$ のときは，式（33）より $\tilde{\xi}_d=0$ であるから，式（85 a）より $\xi_a\geq 0$ が安定なための必要十分条件になる．すなわち，

$$-\xi_S\leq\xi_T,\quad(\xi_T\leq\sqrt{\mu}/2) \quad\cdots\cdots(89\text{ a})$$

$\mu-\xi_d^2<0$ のときは，$\xi_a-\sqrt{\xi_d^2-\mu}/2\geq 0$ が安定性の条件となり，これを整理すると，

$$-\xi_S\leq\mu/(4\xi_T),\quad(\xi_T\geq\sqrt{\mu}/2) \quad\cdots\cdots(89\text{ b})$$

となる．式（89 a，b）より TMD の最適減衰定数 ξ_T は $\mu-\xi_d^2=0$ のときに与えられ，

$$\xi_T=\sqrt{\mu}/2 \quad\cdots\cdots(90)$$

そのときの負減衰 ξ_S は，

$$-\xi_S=\sqrt{\mu}/2 \quad\cdots\cdots(91)$$

となる．いずれも式（80），（81）で与えた最適値の厳密解のよい近似になっている．また，式（89 a，b）は，最適同調比のときの TMD の効果の予測式として用いることができる．

6. まとめ

（1） Igusa らの摂動法をベースにして，TMD―構造物系の2自由度比例減衰系の動特性，自励力を含めた各種外力に対する応答特性を，比較的簡単で，統一的な陽な形で表わすことができた．

（2） ここで得られた式が，TMD に通常用いられる同調比や減衰定数の範囲ににについては，十分な精度を有することを確認した．したがって，TMD による制振効果および TMD の振幅の予測式（表―1）として用いることができる．

（3） モード振動数，モード減衰が簡単な陽な形でもとまるので，TMD のパラメータと，TMD―構造物系の動特性との物理的関係が理解しやすい．

（4） ここで得られた解を基にして，TMDの最適化を論じた．また，その過程で，最適同調比の下で有効な簡便な式が導かれた．

参考文献

1） 津村直宜編：制振事例，振動制御コロキウム Part A「構造物の振動制御」，pp. 102～172，土木学会，1991年7月．
2） Igusa, T. and Der Kiureghian, A. : Dynamic Characterization of Two-Degree-of-Freedom Equipment-Structure Systems, Jour. of Eng. Mech., Vol.111, No.1, pp.1～19,

表―1　TMD の評価式一覧

自由振動（モード減衰）　$(\beta=\beta_1)$	調和応答　$(\beta=\beta_1)$
j次モードについて $\xi_j=\frac{\omega_a}{\omega_j}\left(\frac{\omega_S}{\omega_a}\xi_S+\frac{\omega_T}{\omega_a}\xi_T \pm\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\beta)\,\mathrm{Im}\sqrt{\mu+\left[\beta+i\left(\frac{\omega_S}{\omega_a}\xi_S-\frac{\omega_T}{\omega_a}\xi_T\right)\right]^2}\right)$ $j=1,2$ ；複号は上が $j=1$、下が $j=2$ に対応	$\xi_{eq}=\frac{1}{2}\left\|\frac{[\tilde{\beta}-\beta-2\xi_S i]\cdot[\tilde{\beta}+\beta-2\xi_T i]-\mu}{-(\tilde{\beta}+\beta)+2\xi_T i}\right\|-\xi_S$　等価減衰 $A_T=\frac{1}{\sqrt{(\tilde{\beta}+\beta)^2+4\xi_T^2}}$　TMDの無次元振幅
ランダム応答　$(\beta=\beta_1)$	自励振動（安定条件）　$(\beta=\beta_2)$
$\xi_{eq}=\frac{2\{\xi_S\xi_T(\beta^2+4\xi_a^2)+\mu\xi_a^2\}}{\mu\xi_a+2\xi_T(\beta^2+4\xi_a^2)}-\xi_S$　等価減衰 $A_T=\sqrt{\frac{\xi_a}{\mu\xi_a+2\xi_T(\beta^2+4\xi_a^2)}}$　TMDの無次元振幅	$\xi_a-\frac{1}{2}\|\tilde{\xi}_d\|\geq 0$　あるいは、 $\xi_a^2-\frac{1}{8}\left\{\sqrt{(\mu+\beta^2-\xi_d^2)^2+4\beta^2\xi_d^2}-(\mu+\beta^2-\xi_d^2)\right\}\geq 0$ $\xi_S(\leq 0)$ は、この場合、構造物に働く負減衰を表す

ただし、m：質量、ξ：減衰定数、ω：固有振動数、添字は S：構造物、T：TMD、$i=\sqrt{-1}$

$\omega_a=(\omega_S+\omega_T)/2$ 、$\xi_a=(\xi_S+\xi_T)/2$ 、$\xi_d=\xi_S-\xi_T$ 、$\mu=m_T/m_S$ 、

$\beta_1=\frac{\omega_S-(1+\mu)\omega_T}{\omega_a}$ 、$\beta_2=\frac{\omega_S-\sqrt{(1+\mu)}\omega_T}{\omega_a}$ 、$\tilde{\beta}=\mathrm{Re}\sqrt{\mu+(\beta+i\xi_d)^2}$ 、$\tilde{\xi}_d=\mathrm{Im}\sqrt{\mu+(\beta+i\xi_d)^2}$ 、

$$\omega_j=\omega_a\left\{1\pm\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\beta)\,\mathrm{Re}\sqrt{\mu+\left[\beta+i\left(\frac{\omega_S}{\omega_a}\xi_S-\frac{\omega_T}{\omega_a}\xi_T\right)\right]^2}\right\}\quad (j=1,2)$$

ASCE, January 1984.

3) Igusa, T. and Der Kiureghian, A. : Dynamic Analysis of Multiple Tuned and Arbitrarily Supported Secondary Systems, Report No.UCB/EERC-83/07, Earthquake Engineering Research Center, Uuiversity of California, Berkeley, July, 1983.

4) Pacheco, B.M. and Fujino, Y. : Approximate Explicit Formulas for Complex Modes of Two-Degree-of-Freedom (2DOF) system, Proc. of JSCE, No.404/I-11, pp.213～222, JSCE, April, 1989.

5) Warburton, G.B. : Optimum Absorber Parameters for Various Combinations of Response and Excitation Parameters, Earthq. Eng. and Struct. Dyn., Vol.10, pp.381～401, 1982.

6) 山口宏樹・藤野陽三・津村直宜：構造物のパッシブコントロール(2)―TMDを中心として―，振動制御コロキウム Part A「構造物の振動制御」, pp. 36～60, 土木学会, 1991年7月.

7) 堀内博・藤澤伸光・津村直宜：TMDの設計における実用算定式，構造工学論文集 Vol. 37 A, pp. 781～788, 土木学会, 1991年3月.

8) Aleksandrov, A.D.et.al, : Mathematics-Its Contents, Methods, and Meanings, Vo.1, pp.266～270, MIT Press, 1963.

9) Den Hartog, J.P. : Mechanical Vibrations, Dover, 1984.

10) 神谷好承, 高野政晴：間欠運動の高速化に関する研究，精密機械, 43巻9号, pp. 81～86, 1977年9月.

11) 山口秀谷：動吸振器による過渡振動の減衰，日本機械学会論文集（C編）54巻499号, pp. 561～568, 1988年3月.

12) Rowbottom, M.D.: The Optimization of Mechanical Dampers to Control Self-Excited Galloping Oscillations Jour. of Sound and Vibration, 75 (4), pp.559～576, 1981.

13) 池田健・五百井俊宏：動吸振器による自励振動の防止法について，日本機械学会論文集, 43巻371号, pp. 2551～2556, 1977年7月.

14) Nayfeh, A.H. : Perturbation Methods, Wiley p.110～144, 1973.

15) Crandall, S.H. and Mark, W.D. : Random Vibration of Mechanical Systems, pp.80～84, Academic Press, 1963.

(1991. 9. 19 受付)

APPROXIMATE EIGENVALUES OF TUNED MASS DAMPER (TMD)-STRUCTURE DYNAMICAL SYSTEM AND DESIGN FORMULAS OF TMD

Masato ABE and Yozo FUJINO

Eigenvalues of TMD-structure 2DOF nonproportionally-damped system are obtained using pertubation technique. Explicit formulas for TMD design under various types of loading are proposed on the basis of the approximate eigenvalues and optimization of TMD is discussed. It is shown that the formulas are accurate enough under the practical range of the TMD parameters.