

投稿論文 (和文)
PAPERS

多自由度離散系の弾塑性分岐挙動の解析法と トラス構造物への適用

後藤芳顕*・大鹿克敏**・川西直樹***・
小畑 誠****

弾塑性分岐現象の解析手法はハッチンソン、シーウェル等による摂動法を用いたものが知られているが、摂動法の解析手続きの複雑さゆえ、その解析例は単純化した問題に限定されている。本論文では、実際の多自由度離散化構造を解析するための剛性法に基づく2種類の数値解析手法を提示している。これらの手法はいずれも実用性の観点から接線剛性より高次の微係数は用いていない。

Keywords : plastic bifurcation, large displacement, truss, finite element method

1. ま え が き

構造物の幾何学的な非線形性に起因する臨界挙動は、分岐や極限点挙動を含み、終局限界状態と密接に関係しているため、この特性を知ることは構造物の設計上においても重要である。弾性構造物の臨界挙動についてはThompsonによる多自由度離散化構造に対する一般理論の書籍¹⁾の出版を契機として実用的な数値解析手法も含めて、我国においても、数多くの研究が進められている^{2),3)}。しかしながら、通常の構造物においては、材料の弾性領域で、臨界状態に達することは少なく、材料の弾塑性特性が関与するところとなる。したがって、構造物の終局限界状態の特性を正確に把握するためには、弾塑性臨界挙動の解析を行う必要がある。この場合、弾性臨界挙動と異なり、材料の弾塑性特性のため解析過程は複雑になることは周知の通りである。このうち、屈伏現象に対応する弾塑性極限点挙動については、本質的な特異点を含まないため、弧長増分法²⁾や変位増分法等を導入することにより解析でき、耐荷力の評価において、広く実用化がなされている。一方、本質的な特異点挙動である弾塑性分岐現象については、端緒を開いたShanley⁴⁾による研究に続き、分岐条件に関するHill⁵⁾の研究、摂動法による離散化モデルの分岐解析に関するSewell⁶⁾の研究、Hutchinson⁷⁾による連続体に対する弾塑性分岐特性の理論的研究と、分岐前の変形が一樣な場合など、単純な構造の摂動法による解析例が報告されている。しかしながら、弾性分岐解析におけるような多自由度離散化構造システムを剛性法により解析する実用的な手法は、

ほとんど見出せないのが現状である。このような観点から、本論文では幾何学的非線形問題としての定式化が最も容易であるトラス構造物を例として、多自由度離散系を対象とした実用的な弾塑性分岐挙動の解析手法を提示するとともに、分岐挙動を解析し、その特性を検討することを主な目的とする。

弾塑性分岐解析手法として、ここで提示するものは2種類であり、いずれも実用性の観点から、接線剛性より高次の剛性方程式の微係数は用いていない。一つは、Hutchinsonが連続体について示した基本概念⁷⁾を接線剛性を用いる範囲で多自由度離散系を対象に具体化したものである。いま一つは、著者らが半剛結骨組の弾塑性分岐解析に用いた手法^{8),9)}をより一般化したもので一部試行錯誤的な手続きを踏む。

トラス構造物の臨界挙動を解析した例は、先に述べたように幾何学的非線形問題での定式化が容易であるため多くみられるが、大部分は弾性構造を対象としたもので^{2),10)-13)}、弾塑性構造を扱ったものは少ない¹⁴⁾⁻¹⁸⁾。さらに、臨界点までの挙動の解析¹⁵⁾、主経路上での極限点挙動の解析に関するもの¹⁶⁾を除くと、弾塑性分岐についてのものは、Two-bar-trussの解析^{14),17)}と弾性分岐解析の手法を用いた偏平立体トラスの解析が認められるだけである¹⁸⁾。前者は2自由度系を対象としたもので、多自由度系への拡張は困難である。また、後者は細野²⁾が示した弾性分岐の解析法を準用しており本質的には弾塑性分岐解析法ではない。つまり、この手法は著者らの手法とは異なり、分岐点での分岐経路方向の正確な勾配が求まらないため、分岐経路への収束が得られるという保証は必ずしもなく、分岐経路の探索法としては十分でない。さらに、分岐経路が得られた場合も、分岐点近傍が正確でないという問題点があると考えられる。なお、ここでは問題を単純化し、弾塑性分岐の本質を明確化するため、他の多くの文献と同様、トラス構造物における部材の曲

*正会員 工博 名古屋工業大学教授 工学部 社会開発工学科 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)

**正会員 工修 新日本製鐵株式会社

***学生員 名古屋工業大学大学院 工学部 社会開発工学科

****正会員 Ph. D. 名古屋工業大学講師 工学部 社会開発工学科

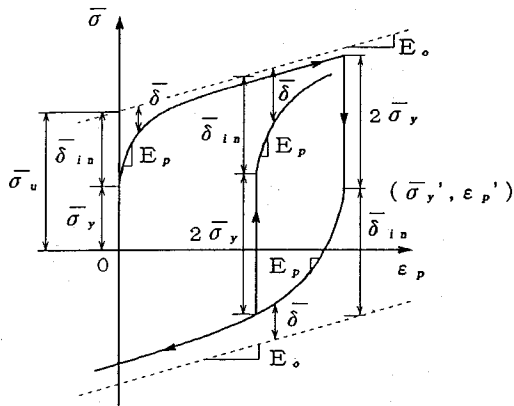


図-1 平均応力-塑性ひずみ曲線

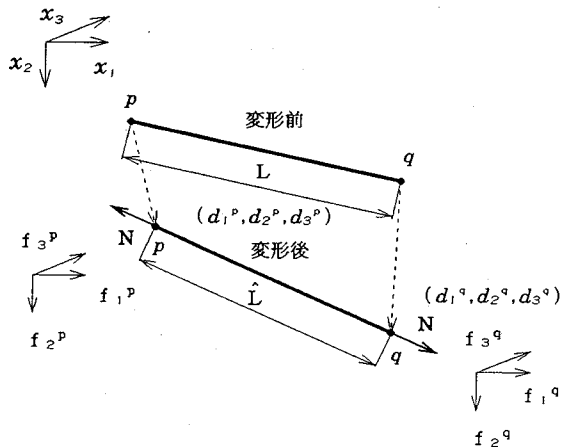


図-2 トラス部材の力学および幾何学量

げによる座屈¹⁶⁾は生じないものと仮定する。

2. 断面の構成則

トラス部材は一軸部材であり、その断面構成則は軸力 N と軸ひずみ ε との関係として与えることができる。この場合、鋼材には残留応力が存在するために、平均応力 $\bar{\sigma} = N/A$ と軸ひずみ ε との関係においては、鋼材等のほぼ Bilinear 型の応力-ひずみ関係をもつものでも、残留応力の存在によりなめらかな勾配変化となる。したがって、このような関係の記述に適した構成モデルとして、ここでは繰り返し載荷時の挙動も含めて、Dafalias-Popov の連続体に対する Bounding Surface Model¹⁹⁾を準用する。

このモデルによると、ひずみ増分 $d\varepsilon$ は弾性成分 $d\varepsilon_e$ と塑性成分 $d\varepsilon_p$ により

$$d\varepsilon = d\varepsilon_e + d\varepsilon_p \quad \dots\dots\dots (1)$$

と表され、それぞれの成分は平均応力増分 $d\bar{\sigma}$ と次のような関係にある。

$$\text{弾性成分については、} \quad d\varepsilon_e = d\bar{\sigma}/E \quad \dots\dots\dots (2)$$

塑性成分については、弾性域内での増分及び塑性域内での除荷に対して

$$d\varepsilon_p = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

また、塑性域内での負荷に対して

$$d\varepsilon_p = \frac{d\bar{\sigma}}{E_p}, \quad E_p = E_0 + h \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_{in} - \bar{\sigma}} \quad \dots\dots\dots (4, a, b)$$

ここに E は弾性定数、 E_p は見かけのひずみ硬化率、 E_0 は境界線 (Bounding line) の勾配を表す。 $\bar{\sigma}$ は当該状態から境界線までの距離、また $\bar{\sigma}_{in}$ は各載荷プロセス開始時の $\bar{\sigma}$ の値を示している。本論文では簡単のため、 h 、 E_0 は定数として、おのおの単調増加荷重下の挙動を近似するように定める。また、硬化則としては、移動硬化

のみを考慮する。なお、上記の諸量は図-1 に示されている。

$\bar{\sigma}_y$ を初期降伏応力とすると、図 1 の関係から $\bar{\sigma}$ と平均応力 $\bar{\sigma}$ との関係は、

$$\bar{\delta} = \bar{\sigma}_y + \bar{\delta}_{in} + E_0 \varepsilon_p - \bar{\sigma} \quad \dots\dots\dots (5)$$

となり、これを式 (4) に代入すると、除荷が生じない場合、 ε_p について積分することができる。さらに、現在の載荷過程において、降伏開始時の応力と塑性ひずみ $(\bar{\sigma}_y', \varepsilon_p')$ を考慮して、式 (1)~(5) の関係を用いると、単調載荷時の全応力-全ひずみの関係は次のようになる。

$$\left(1 + \frac{E_0}{E} - \frac{h}{E}\right) \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_y' - (E_0 - h)(\varepsilon - \varepsilon_p) + \bar{\delta}_{in} \ln \left| \frac{-\bar{\sigma} \left(1 + \frac{E_0}{E}\right) + \bar{\sigma}_y' + \bar{\delta}_{in} + E_0(\varepsilon - \varepsilon_p)}{\bar{\delta}_{in}} \right| = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

3. 一軸部材の離散化式

(1) 部材の幾何学ならびに力学関係

変形前の長さが L の部材 p, q が図-2 のように変位し、軸力 N が生じてつり合っている状態を考える。この時、幾何学ならびに力学成分を記述するために、構造物全体に共通の空間固定の右手系直交直線座標系 $\{x_i\}_{i=1,2,3}$ を導入する。この座標により p, q 節点の変形前後の位置座標をそれぞれ次のように表す。

$$\{x_i^\alpha\} \quad (\alpha = p, q) \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\{x_i^\alpha + d_i^\alpha\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

以上より、変形後の部材長 \hat{L} は総和規約を用いて

$$\hat{L} = \sqrt{(x_1^q + d_1^q - x_1^p - d_1^p)(x_1^q + d_1^q - x_1^p - d_1^p) + \dots} \quad \dots\dots\dots (9)$$

と表される。以後、ことわらない限りこの規約を用いる。

部材 p, q の座標系 $\{x_i\}$ に対する方向余弦 $\{l_i\}$ は、

$$\{l_i\} = \frac{1}{L} \{(x_i^q + d_i^q - x_i^p - d_i^p)\} \dots\dots\dots (10)$$

さらに、部材の伸びひずみ ε は次のようになる。

$$\varepsilon = (\bar{L} - L) / L \dots\dots\dots (11)$$

つぎに、軸力 N と節点力成分の関係を求める。節点 $\alpha(\alpha=p, q)$ における x_i 方向の節点力成分を f_i^α とすると、これらは簡単な幾何学的考察により式 (10) の方向余弦を用いて、以下のように表せる。

$$\{f_i^p\} = -\{f_i^q\} = -\frac{N}{L} \{(x_i^q + d_i^q - x_i^p - d_i^p)\} \dots\dots\dots (12)$$

(2) 接線剛性方程式

接線剛性方程式は節点力成分と節点変位成分の増分関係に対応する。したがって、これを誘導するために、まず、節点力成分と軸力の関係式 (12) の増分をとると

$$\{\Delta f_i^p\} = -\{\Delta f_i^q\} = -\{\Delta N l_i + N \Delta(1/\bar{L}) l_i + (N/\bar{L})(\Delta d_i^q - \Delta d_i^p)\} \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 ΔN , $\Delta(1/\bar{L})$ を節点変位増分で表すと接線剛性方程式が求まる。 ΔN については式 (1)~(5) に示す部材の構成則を考慮することにより、次のようになる。

$$\Delta N = E_t A \Delta \varepsilon \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 E_t は弾性域での増分、および塑性域での除荷に対しては

$$E_t = E \dots\dots\dots (15)$$

塑性域での負荷に対しては

$$E_t = \frac{E \{E_0 + h\bar{\delta} / (\bar{\delta}_m - \bar{\delta})\}}{[E_0 + h\bar{\delta} / (\bar{\delta}_m - \bar{\delta})]} \dots\dots\dots (16)$$

また $\Delta \varepsilon$ は式 (9)~(11) より下式のように変位増分で表される。

$$\Delta \varepsilon = l_k \{\Delta d_k^q - \Delta d_k^p\} \dots\dots\dots (17)$$

式 (14), (17) を式 (13) に代入し、かつ $\Delta(1/\bar{L})$ を式 (9) より変位成分の増分で表せば、最終的に以下のような部材の接線剛性方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \{\Delta f_i^p\} \\ \{\Delta f_i^q\} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} E_t A \\ L \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} [l_i l_k], & -[l_i l_k] \\ -[l_i l_k], & [l_i l_k] \end{Bmatrix} \\ &+ \frac{N}{\bar{L}} \begin{Bmatrix} [\bar{\delta}_{ik} - l_i l_k], & -[\bar{\delta}_{ik} - l_i l_k] \\ -[\bar{\delta}_{ik} - l_i l_k], & [\bar{\delta}_{ik} - l_i l_k] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta d_k^p\} \\ \{\Delta d_k^q\} \end{Bmatrix} \end{aligned} \dots\dots\dots (18)$$

ここに $\bar{\delta}_{ik}$ はクロネッカーのデルタである。

4. 弾塑性分岐挙動の解析

(1) 概要

構造物の臨界挙動の解析は、極限点挙動と分岐挙動の解析に大別される。極限点挙動については、弾塑性体の場合、材料の除荷・負荷の考慮が必要となるものの本質的な特異点を含まないため、実質的には弾性体の解析と変わる所がなく、弧長増分法等を用いると対処できる。

一方、分岐挙動については、分岐点自体本質的な特異点となる他、分岐方向で材料の除荷挙動を伴う場合には、弾性体と大きく異なり、弾塑性体特有の配慮が必要となる。ここでは分岐点の特定法とともに、実用的な分岐解析法として接線剛性より高次の微係数は用いない2種類の手法を提示する。

(2) 分岐の条件と分岐点の特定

弾塑性連続体に対する解の唯一性の条件は Hill によって与えられているが⁵⁾、分岐点はこの条件が成立しない場合に対応する。著者らは、この分岐の条件を多自由度離散系の解析に便利のように、接線剛性方程式を用いて書き表しているが^{8),9)}、これを以下に示す。

分岐点から、基本経路 (f)、分岐経路 (b) について同一荷重増分 $\Delta P F_i$ (ΔP : 荷重パラメータ増分, F_i : 荷重モードベクトル) 下の多自由度系構造システムの増分型の剛性方程式がそれぞれ総和規約を用い

$$\Delta P F_i = \Delta K_{ij}^f \Delta D_j^f, \Delta P F_i = \Delta K_{ij}^b \Delta D_j^b \dots\dots (19, a, b)$$

と表されたとすると^{8),9)}、離散系に対する分岐の必要条件は次のようになる。ここで、弾塑性体が弾性体と異なるのは、必ずしも接線剛性マトリックスにおいて $[\Delta K_{ij}^f] = [\Delta K_{ij}^b]$ が成立しないことである。

$$\Delta \Pi = 0 \dots\dots\dots (20)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &= (\Delta D_i^b - \Delta D_i^f) \Delta K_{ij}^f (\Delta D_j^b - \Delta D_j^f) \\ &+ (\Delta D_i^b - \Delta D_i^f) (\Delta K_{ij}^b - \Delta K_{ij}^f) \Delta D_j^b \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

以上の式が、Hill の条件を接線剛性方程式で表したもので、文献8), 9) で誘導した式である。この式から、文献8), 9) では、分岐点から基本経路上での増分に対し除荷が生じない場合の定式化を行っているが、ここではより一般性を持たせるために基本経路上での除荷にも対応できるようにする。このため、さらに分岐点からの増分に対し、除荷の場合も負荷剛性をとると仮定する Comparison solids⁵⁾ としての構造システムの接線剛性 ΔK_{ij}^c を導入し、これを用いて式 (21) を次のように書き換える。

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &= (\Delta D_i^b - \Delta D_i^f) \Delta K_{ij}^c (\Delta D_j^b - \Delta D_j^f) \\ &+ (\Delta D_i^b - \Delta D_i^f) \{(\Delta K_{ij}^f - \Delta K_{ij}^c) \Delta D_j^f \\ &+ (\Delta K_{ij}^b - \Delta K_{ij}^c) \Delta D_j^b\} \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

トラス構造物の場合、各部材が一軸部材であることを考慮すると、式 (21) は以下のようにも表される。

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &= (\Delta D_i^b - \Delta D_i^f) \Delta K_{ij}^c (\Delta D_j^b - \Delta D_j^f) \\ &+ \sum_{e=1}^n (\Delta \varepsilon_e^b - \Delta \varepsilon_e^f) \{ (E_t^c A)_e - (E_t^f A)_e \} \Delta \varepsilon_e^f \\ &+ \{ (E_t^b A)_e - (E_t^c A)_e \} \Delta \varepsilon_e^b L_e \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

ここに、 $E_t^f A$, $E_t^b A$ はそれぞれ基本経路、分岐経路方向での部材の軸方向接線剛性をまた $E_t^c A$ は Comparison solids としての値を表す。下添字 e はトラス部材の

番号, n は部材総数である. Σ は e について総和をとることを意味しており, この部分については総和規約は適用しない.

分岐点は, 基本経路を追跡しながら, この上に存在し, かつ式 (20) を満足する点として特定することになる.

弾塑性体の場合は, 分岐時の除荷・負荷挙動に関係なく, 材料は同一の接線剛性をとるので, 式 (21) の右辺第二項は常に零となる. つまり, 式 (21) は $\det|\Delta K_{ij}|=0$ の時成立し, 分岐点は基本経路上でこの条件を満足する場合として特定可能となる.

一方, 弾塑性体については, 塑性状態にある部材が分岐点からの増分に対し負荷するのかあるいは除荷するのか未知であるので, 式 (23) の右辺第二項はどのような値をとるか必ずしも自明ではない. したがって, ここでは, 塑性状態にある部材の挙動を仮定することでとり得る値を検討する.

分岐点において, 弾性域にある部材については $(E_i^b/A)_e = (E_i^b/A)_e = (E_i^c/A)_e$ が成立し, 式 (23) の右辺第二項の Σ 内での対応する項は零となるので我々の興味の対象となるのは塑性状態にある部材である. これらの部材が基本経路と分岐経路でとりうる挙動の組み合わせを弾塑性体の除荷剛性と負荷剛性とを考慮して, 接線剛性を用いて書き表すと, 以下のように四種類に分けられる.

$$\left. \begin{aligned} \text{I} : (E_i^b/A)_e &= (E_i^b/A)_e = (E_i^c/A)_e \\ \text{II} : (E_i^b/A)_e &= (E_i^c/A)_e < (E_i^b/A)_e \\ \text{III} : (E_i^b/A)_e &= (E_i^b/A)_e > (E_i^c/A)_e \\ \text{IV} : (E_i^b/A)_e &> (E_i^b/A)_e = (E_i^c/A)_e \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24, \text{ a} \sim \text{d})$$

上記の挙動に対応して, 部材の変形挙動は,

$$\left. \begin{aligned} \text{I} : \Delta \epsilon_e^f \geq 0 \text{ かつ } \Delta \epsilon_e^b \geq 0 \\ \text{II} : \Delta \epsilon_e^f \geq 0 \text{ かつ } \Delta \epsilon_e^b \leq 0 \\ \text{III} : \Delta \epsilon_e^f \leq 0 \text{ かつ } \Delta \epsilon_e^b \leq 0 \\ \text{IV} : \Delta \epsilon_e^f \leq 0 \text{ かつ } \Delta \epsilon_e^b \geq 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25, \text{ a} \sim \text{d})$$

式 (24), (25) の関係を考慮すると, 式 (23) の右辺第二項の Σ 内は次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \text{I} : \Delta \mu_e &= 0, \\ \text{II} : \Delta \mu_e \geq 0, \text{ 等号は } \Delta \epsilon_e^b &= 0 \text{ のとき成立.} \\ \text{III} : \Delta \mu_e \geq 0, \text{ 等号は } \Delta \epsilon_e^f &= \Delta \epsilon_e^b \text{ のとき成立.} \\ \text{IV} : \Delta \mu_e \geq 0, \text{ 等号は } \Delta \epsilon_e^f &= 0 \text{ のとき成立.} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26, \text{ a} \sim \text{d})$$

ここに,

$$\Delta \mu_e = (\Delta \epsilon_e^b - \Delta \epsilon_e^f) \{ (E_i^c/A)_e - (E_i^b/A)_e \} \Delta \epsilon_e^f + \{ (E_i^b/A)_e - (E_i^c/A)_e \} \Delta \epsilon_e^b L_e \dots\dots\dots (27)$$

式 (26) より式 (23) の右辺第二項は,

$$\sum_{e=1}^n \Delta \mu_e \geq 0 \dots\dots\dots (28)$$

となり, 分岐の条件式 (20) が成立するためには, 式 (23)

の右辺第一項が,

$$(\Delta D_i^b - \Delta D_i^f) \Delta K_{ij}^c (\Delta D_i^b - \Delta D_i^f) \leq 0 \dots\dots\dots (29)$$

となる必要がある.

以下, ここでは, 弾塑性分岐が構造物の耐荷力に関与する重要な場合ということで, 極限点荷重以下の単調増加する基本経路上において分岐が生ずる場合を対象に, その挙動を検討してみる.

この場合, まず, つり合い経路が単調増加であるので, 分岐点以下では次式が成立する.

$$\det|\Delta K_{ij}| \geq 0 \dots\dots\dots (30)$$

以上から, 式 (29) を満足するのは, 次の2ケースが考えられる. 一つは基本経路上で, $\det|\Delta K_{ij}|$ が連続的に変化し, 正值から零を経て負になるケースである. いま一つは, 接線剛性が不連続に変化する Bilinear 型等の構成則下で $\det|\Delta K_{ij}|$ が正值から, 零を経ずに不連続に負となるケースである.

第一のケースについては, 式 (20) を満足し, はじめて分岐可能となるのは以下の式が成立するときである.

$$\det|\Delta K_{ij}| = 0 \quad \sum_{e=1}^n \Delta \mu_e = 0 \text{ かつ } \Delta D_i^b - \Delta D_i^f = C^m \bar{D}_i^m \dots\dots\dots (31, \text{ a} \sim \text{c})$$

ここに, \bar{D}_i^m は ΔK_{ij}^c の m 番目の零固有値に対応する固有ベクトル, C^m はこの固有ベクトルに対する任意の定数を表す.

以上から, 最小分岐荷重は基本経路上を追跡し, 式 (31, a) を初めて満たす点として求めることができる. この時, 式 (31, b) より, 塑性状態にある各部材は式 (26, a ~ d) で等号が成立するような挙動を示すことが必要である.

なお, 上述したように, 本ケースでは最小分岐荷重は式 (31, a) で特定されるが, 分岐点は本質的な特異点である. このため, 極限点と違い, 弧長増分法等を用いても, 特に重要な分岐点近傍で構造解析が数値的に不安定となり, $\det|\Delta K_{ij}|$ の値を正確に計算できなくなる. したがって, ここでは以下に示すような工夫をすることで, この問題に対処する. すなわち, 分岐点での特異性は, この点で存在する二つ以上の変形モードに起因しているので, まず構造システムにおいて, 文献 8), 9) と同様に, 基本経路上の対称変形モードのみが生ずるよう拘束を与え分岐モードを除去する. なお, 対称変形モードは構造対称性より容易に知ることができる. その結果, 基本経路上の特異点も除去され, 変形挙動は問題なく解析できるようになる. このようにして求めた基本経路に沿う変位, 断面力成分を, 変形モードを拘束しない構造システムの $\det|\Delta K_{ij}|$ に代入し, 式 (31, a) の条件で分岐点を正確に特定することができる.

第二のケースについては, $\det|\Delta K_{ij}|$ が不連続に変化し, 零を経ずに負になるので, 最小分岐荷重は \det

表一I 降伏状態にある部材の分岐方向での変形様式

弾性分岐	・ I と N あるいは一方のみ
弾塑性分岐	・ いくつかの部材で II ・ III は含まない

$|\Delta K_{ij}|$ が初めて負になる場合に相当する。このケースでは、式 (22) の右辺第 1 項が負となるので、式 (20) を満足するためには第 2 項は正とならなければならない。つまり、式 (31, a-c) の条件式に対応し、分岐が可能となるのは次式が成立するときである。

$$\det|\Delta K_{ij}| < 0 \text{ かつ}$$

$$\sum_{e=1}^n \Delta \mu_e = -(\Delta D_i^b - \Delta D_i^f) \Delta K_{ij}^e (\Delta D_j^b - \Delta D_j^f) > 0 \quad (32, a, b)$$

即ち、最小分岐点となりうる点は基本経路上で $\det|\Delta K_{ij}|$ を計算し、初めて負になる場合として特定することができる。この場合も第一のケースと同様、変形を基本経路上の対称変形モードに拘束することで、常に数値的に安定した状態で $\det|\Delta K_{ij}|$ を評価できる。

分岐点は、以上のような方法で特定されるが、分岐点直後の主経路および分岐経路において、塑性状態にある部材すべてが負荷状態のままにあるのか、あるいは、除荷する部分があるかによって、分岐挙動が異なってくる。すべての部材が負荷状態のまま分岐すると、その挙動に除荷剛性が関係せず、いわゆる弾性分岐と同様に振舞う。このため、以後ここでは、弾塑性体であってもこの種の分岐は弾性分岐、一方、除荷部分があり、除荷剛性が関与する場合を弾塑性分岐と呼ぶことにする。この分岐の種類と式 (24) に示す部材の挙動との関係を、次節の (3) 分岐経路の追跡で利用する関係上、 $\det|\Delta K_{ij}| = 0$ で分岐する場合についてまとめれば、表 1 に示すようになる。ここに弾性分岐の場合、IV の変形様式が生ずるには式 (26, d), (31, b) より分岐点から基本経路方向で当該部材は中立変形状態となる必要がある。また、弾塑性分岐時に III の挙動は生じないが、理由は次のように説明される。すなわち、分岐するためには式 (31, b) を満足せねばならないが、III の挙動を伴う場合、式 (26, c) より $\Delta \epsilon_e^f = \Delta \epsilon_e^b$ が成立することが条件となる。これに式 (31, c) より得られる関係 $\Delta D_i^b = \Delta D_i^f + C^m \bar{D}_i^m$ を代入すれば、 $C^m = 0$ が導かれ、 $\Delta D_i^b = \Delta D_i^f$ が成立し、分岐は生じないことになる。

(3) 分岐経路の追跡

分岐点が特定された後は、分岐挙動を追跡することになる。弾塑性分岐の解析について、Hutchinson⁷⁾ は Thompson¹⁾ が弾性分岐で用いたのと同様、分岐点での摂動展開による解析的手法を提示し、分岐前の変形が一樣となる簡単な場合に適用している。しかしながら、摂

動展開による手法を一般の多自由度系に用いると、弾性体において周知のように、剛性方程式の 2 次以上の微係数を求めるのが非常に複雑となり、実用性、汎用性に問題を生ずる。このようなわけで、ここでは弾塑性解析において容易に利用できる接線剛性を用いる範囲で、可能な限り正確に分岐挙動を解析する 2 種類の手法を提示する。

a) 分岐点で ΔK_{ij}^e の固有ベクトルを利用する方法

本方法は $\det|\Delta K_{ij}^e| = 0$ で分岐が生じ、しかも分岐点が単一分岐である場合を想定している。この時、式 (31) が成立するが、単一分岐点の場合ということで、 \bar{D}_i を単一零固有値に対応する固有ベクトル、 C を任意定数とすると、式 (31, c) より分岐方向の増分変位ベクトル ΔD_i^b は

$$\Delta D_i^b = \Delta D_i^f + C \bar{D}_i \quad (33)$$

となる。式 (33) が解析の基本となるが表 1 に示す除荷を生じない弾性分岐と弾塑性分岐とでは以下に説明するように分岐解析の手法が異なる。

弾性分岐の場合は、線形弾性体の場合と実質的には同様である。すなわち、分岐時荷重増分のない、いわゆる対称分岐の時は、式 (19) より

$$\Delta K_{ij}^b \Delta D_j^b = 0 \quad (34)$$

が成立し、弾性分岐から $\Delta K_{ij}^b = \Delta K_{ij}^e$ であるので分岐経路方向の増分変位が次のように求まる。

$$\Delta D_i^b = C \bar{D}_i \quad (35)$$

しかしながら、非対称分岐の問題では増分ベクトルは式 (33) の形式をとるが、接線剛性の範囲では C を決定できない。つまり、試行錯誤によって C の値を設定し、収束計算を行い分岐経路を求めなければならない²⁾。したがって、この場合、分岐点での分岐経路方向の勾配は正しく求まらない。これを正しく求めるには、剛性方程式の 2 次以上の微係数を用いる必要がある。

つぎに、弾塑性分岐の場合、表一I に示すように、いくつかの部材で II の挙動を示すことがわかっている。このとき、式 (26, b), (31, b) より、分岐後除荷の生ずる部材は分岐の瞬間には除荷にも負荷にもならない中立変形の状態になる。したがって、この分岐の瞬間中立状態にあるという条件で用いることで、式 (33) の定数 C が定まる。いま、分岐の瞬間中立状態にある部材が節点 p, q を結ぶ部材 e であると仮定し、全構造システムの増分節点変位ベクトル $\Delta D_i^b, \Delta D_i^f, \bar{D}_i$ 中の、部材 e の節点変位ベクトルに対応するものを $\Delta d_k^{b\alpha}, \Delta d_k^{f\alpha}, \bar{d}_k^\alpha$ ($\alpha = p, q, k = 1 \sim 3$) と表すと、この部材の分岐時のひずみ増分は式 (17), (33) より

$$\Delta \epsilon_e^b = \frac{1}{L_e} l_k \{ (\Delta d_k^{f\alpha} - \Delta d_k^{b\alpha}) + C (\bar{d}_k^q - \bar{d}_k^p) \} \quad (36)$$

となる。これに中立状態の条件 $\Delta \epsilon_e^b = 0$ を用いると C

は次のように求められる。

$$C = -I_k(\Delta d_k^{j^a} - \Delta d_k^{j^b}) / (I_k(\bar{d}_k^{j^a} - \bar{d}_k^{j^b})) \dots (37)$$

ここに、分岐点より基本経路方向の増分変位 $\Delta d_k^{j^a}$ は 4. (2) で述べたように、基本経路上の対称変形モードが生ずるような拘束を与えることで容易に計算できる。

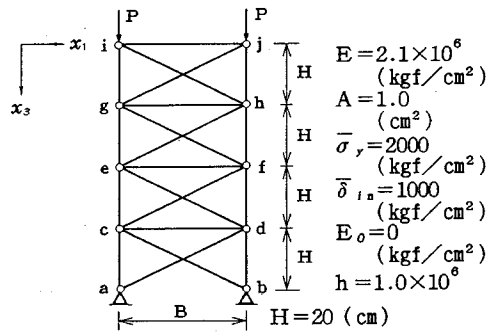
また、実際の解析では、分岐時中立状態になる部材をあらかじめ知ることができないので、塑性状態にある各部材について、式 (37) よりおのおの C を求め、この中から、残りの部材においても除荷を生じないものを選ぶことになる。

以上のように、単調増加荷重下において $\det|\Delta K_{ij}|=0$ で生ずる弾塑性分岐では、中立変形という特殊な変形状態が生ずるので、接線剛性の範囲で、常に分岐方向の増分ベクトルを解析的に特定できる。これは弾性分岐には見られない特徴である。なお、 $\det|\Delta K_{ij}|<0$ で分岐する場合は分岐点で固有値問題とならないで次項に述べる試行錯誤的手法を適用することになる。

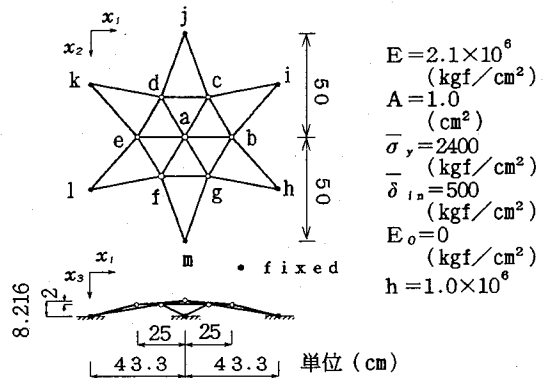
b) 試行錯誤的手法

本手法は、構造物の弾塑性分岐であれば、単一分岐の場合は言うまでもなく、多重分岐や $\det|\Delta K_{ij}|<0$ で分岐する場合も適用でき、a) の手法に比べより汎用性を有している。ただ、a) で述べた手法と異なり、分岐経路方向で降伏しているすべての部材が負荷する弾性分岐の場合には有効ではない。

この手法は、(2) で特定された分岐点で、塑性状態にある部材の分岐方向の挙動を仮定し、これと仮定に基づき計算された挙動とが一致する場合を試行錯誤的に求めるものである。すなわち、分岐点で塑性状態にある部材がとりうる挙動は、除荷か負荷であり、この挙動を仮定することで、分岐方向の接線剛性行列 ΔK_{ij}^b を得ることができる。分岐方向で除荷が生ずる弾塑性分岐では負荷剛性と除荷剛性が異なるため、 $\Delta K_{ij}^a \neq \Delta K_{ij}^b$ となり、 $\det|\Delta K_{ij}|=0$ であっても ΔK_{ij}^b は特異とはならない。これより、単位の増分荷重パラメータに対して、式 (19, b) で分岐方向の節点増分変位が計算でき、部材の除荷・負荷挙動を知ることができる。得られた結果と仮定とが一致すればこれが求める分岐経路方向の増分であるが、一致しない場合には、新しい挙動を仮定して、一致するまでこの手順を繰り返す。降伏している総部材数を n_p とした場合、検討すべきすべての組み合わせは 2^{n_p} となり計算量もこれに比例して増加するが、一般に座屈モードに関する情報はあらかじめ得られることが多いので上記の組み合わせはかなり減少する。この手法は、分岐経路方向で降伏部材がすべて負荷する場合を除いた変形挙動の全組み合わせを検討することで、多重分岐を含めて分岐経路方向の増分を正確に求めることができる。ただ、部材の除荷剛性と負荷剛性の差が小さい場合には、 $\Delta K_{ij}^a \neq \Delta K_{ij}^b$ であっても、数値的には ΔK_{ij}^b が特異とな



(a) トラスタワー



(b) トラスドーム

図-3 解析対象

ることもある。このような場合には、本手法では解析できず、a. に述べた固有ベクトルを用い、弾性分岐解析に準ずる手法によらなければならない。

なお、基本経路上で除荷せず、 $\det|\Delta K_{ij}|=0$ で生ずる弾塑性分岐を対象とした部分の試行錯誤的手法はすでに接合部に弾塑性特性を有する半剛結骨組に適用しているが、その結果は良好である⁹⁾。

5. 数値解析例と弾塑性分岐特性

(1) 解析モデル

ここでは、先に述べた弾塑性分岐の解析手法の適用例として、2種類のトラス構造物の弾塑性分岐挙動を解析し、その力学特性について考察する。

解析対象とする2種類のトラス構造物は4層1径間平面トラスタワーと立体トラスドームであり、その形状は構造諸元ならびに材料定数とともに図-3に示されている。トラスタワーに関しては、径間Bと層高Hの比を3種類に変化させた構造物について、柱の頂点に対称な鉛直荷重が作用する場合を解析する。トラスドームについては、その形状は文献(2), (10)~(13), (16), (18)で扱われたもの同一で、荷重に関しては節点aに関して対称かつ x_3 方向に作用する表-2に示す4種類のもの

表-2 荷重モード

node	TYPE1	TYPE2	TYPE3	TYPE4
a	P	P	P	P
b	0.0	2P	0.5P	P
c	0.0	2P	0.5P	P
d	0.0	2P	0.5P	P
e	0.0	2P	0.5P	P
f	0.0	2P	0.5P	P
g	0.0	2P	0.5P	P

(荷重は x_3 軸方向のみに作用)

表-3 分岐時のトラスタワーの挙動特性

H/B	θ_{bf} 固有ベクトルを 利用する方法	θ_{bf} 試行錯誤 的手法	中立変形 状態の部材
2/3	59.5°	59.5°	c e
1	69.1°	69.1°	c e
2	72.1°	72.2°	a c

を考慮する。荷重はいずれも直交多次元空間における荷重パラメータ増分 ΔP と節点変位増分 ΔD_i の弧長を単調増加させた場合を対象とする。

なお、構成則については2で示した弾塑性のもの他に、比較のため、この構成則のもとに単調増加荷重下で得られる応力-ひずみ関係を除荷・負荷にかかわらず用いる非線形弾性の構成則についても検討する。これは、除荷剛性を考慮する弾塑性分岐とこれを考えない弾性分岐とを比較することで弾塑性分岐特性を明らかにするためである。また、単調増加荷重下での基本経路上で分岐が生ずる実用上重要な場合、このような簡易化した非線形弾性構成則を用いても、工学上は十分な解が得られるという一般的な認識を確認することも意図している。

(2) トラスタワー

まず、ここで提示した2種類の弾塑性分岐解析手法の妥当性を検証する。この2種類の手法で得られた最小分岐点での分岐経路が基本経路となす一般化角度 θ_{bf} 、および分岐の瞬間中立状態になる部材を3種類の構造について表-3に示す。なお、一般化角度 θ_{bf} は直交多次元空間における基本経路方向ベクトル \vec{d}' 、分岐経路方向ベクトル \vec{d}^b の内積で次のように定義される。

$$\theta_{bf} = \frac{\cos^{-1}(\vec{d}' \cdot \vec{d}^b)}{|\vec{d}'||\vec{d}^b|} \dots \dots \dots (38)$$

ここに

$$\vec{d}' = \begin{Bmatrix} \Delta P \\ \{\Delta D_i\} \end{Bmatrix}, \vec{d}^b = \begin{Bmatrix} \Delta P \\ \{\Delta D_i^b\} \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (39)$$

表-3より、2種類の手法で得られた値は良く一致しており、ここで提示した両手法の等価性が確認される。つぎに、弾塑性ならびに非線形弾性構成則によるつり

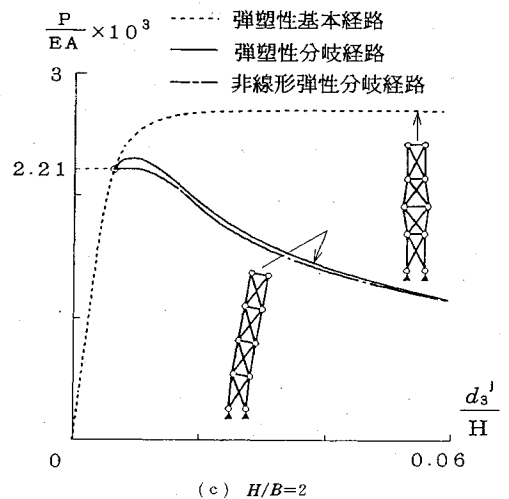
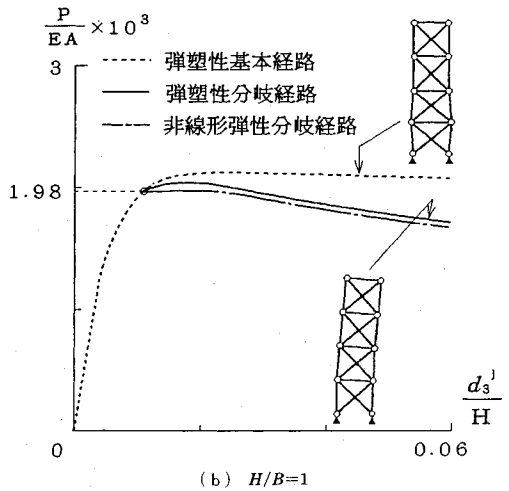
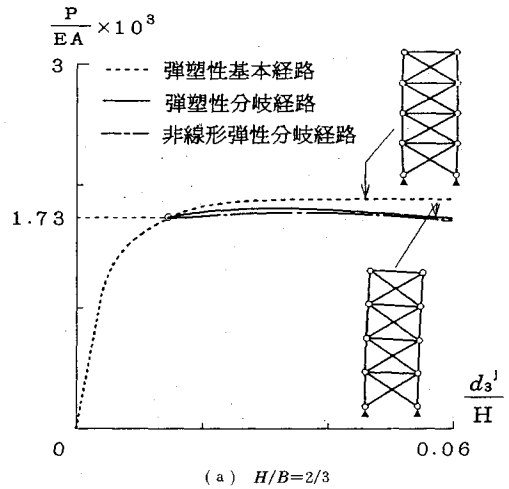
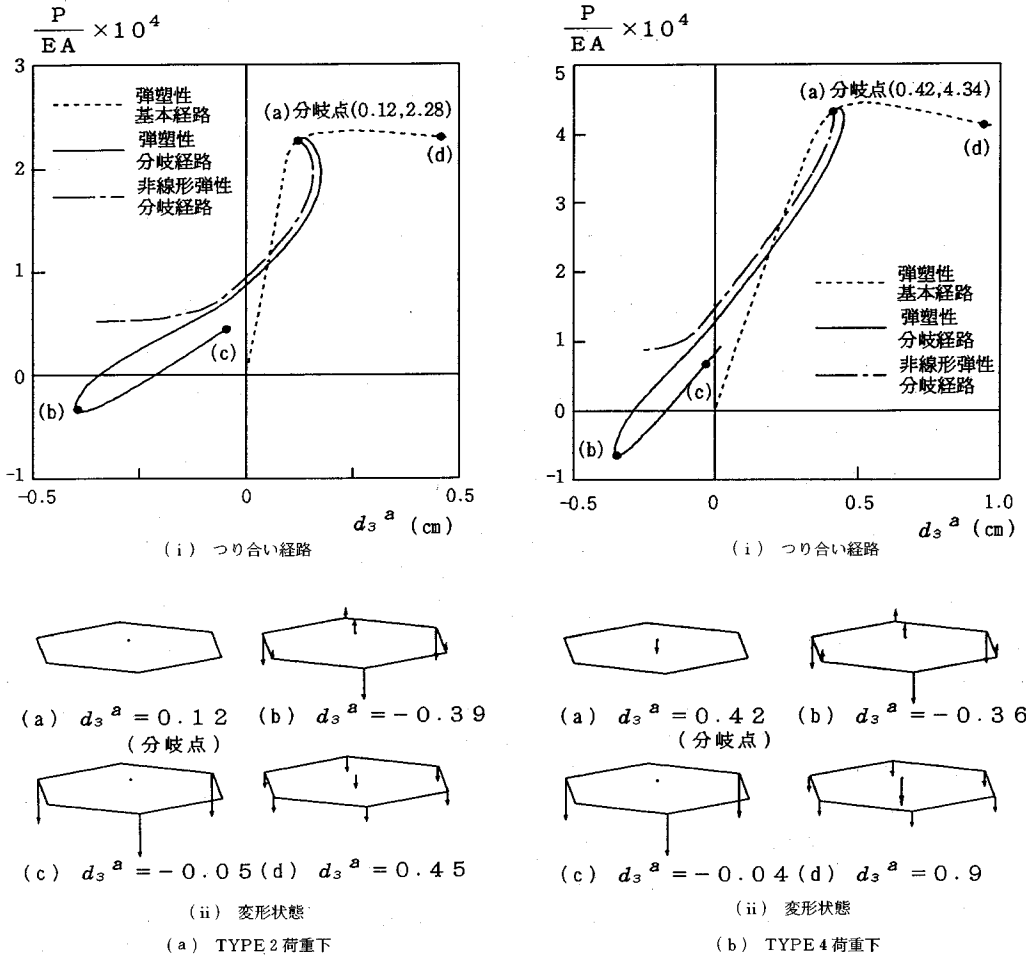


図-4 トラスタワーの計算結果



図—5 トラスドームの計算結果

合い曲線の比較を行うため、3種類の構造に関する荷重と頂点の鉛直変位 d_3^a の関係を基本経路及び最小分岐点からの分岐経路について図—4に示す。これによるといづれの構造も基本経路上で極限点が生ずる前に分岐が発生する。分岐前には部材に除荷が生じないので、弾塑性、非線形弾性にもかかわらず同一のつり合い経路となり分岐点も一致する。しかしながら分岐挙動に関しては異なっている。すなわち、弾性分岐では分岐点から分岐方向へ荷重の変化がなく、その後変形の進展によりほとんど荷重が上昇せず減少するのに対し、弾塑性分岐では分岐後部材に除荷が生じ剛性が増加するので、荷重はいったん上昇し極限点に達した後、減少する。さらに、構造諸元の差による分岐挙動を検討する。図—4から判るように、径間に比べ層高が増加するにつれ、分岐荷重は上昇するが、このような構造では分岐後荷重の低下が大きくなるとともに弾塑性と非線形弾性による差も大きくなる。また、先に述べたように、弾塑性分岐では分岐後除荷する部材は分岐の瞬間、除荷も負荷もしない中立変形

の状態にあるが、このような部材の位置は表—3に示すように径間の増加に伴い、最下層の柱から2層目の柱に移行している。

(3) トラスドーム

この場合も2種類の分岐解析手法を適用し、同一の結果が得られることを確認した。すなわち、4種類の荷重条件のうち、TYPE 1, 3については基本経路が極限点に到達する以前に分岐が生じず、最大耐力は屈服によって決まる。極限点に達する以前に分岐が生じ、これにより最大耐力が支配されるのはTYPE 2, 4の荷重条件の場合であることが判明した。なお、TYPE 4の荷重においては注目すべきことに、部材の構成則が線形弾性の場合には極限点までに分岐が生じず、今回の非線形の構成則を用いることで分岐が生ずる。

分岐で最大耐荷力が決まる場合ということでTYPE 2, 4の荷重下の荷重パラメータ P と頂点aの鉛直変位 d_3^a の関係ならびに変形様式を基本経路および最小分岐点からの分岐経路について図—5に示す。この図には、

トラスタワーと同様に比較のため非線形弾性の分岐経路も示している。図-5のつり合い経路からわかるように、両荷重 TYPE とも最小分岐点まではどの部材にも除荷は生じず、弾塑性、非線形弾性どちらの構成則を用いても、分岐点および、分岐点までのつり合い経路は同じである。分岐後においては、除荷が生ずるので、弾塑性の場合の分岐経路はトラスタワーと同様に若干荷重が上昇し、最大耐力となる極限点をとった後、荷重が減少している。分岐後、除荷する部材はいずれの荷重 TYPE 下においても ci, cj, ek, el, gm, gh (または bh, bi, dj, dk, fl, fm) で、分岐の瞬間これらの部材は中立変形の状態となる。一方非線形弾性の場合には、分岐後、荷重は減少しており、分岐点がほぼ最大耐力となる。このように弾塑性、非線形弾性の場合の分岐挙動は定性的にはかなり異なったものになるが、最大耐力の観点からすると両者による差は小さい。

6. あとがき

多自由度離散系の弾塑性分岐問題を解析するための剛性法による2種類の数値解析手法を提示した。1つの手法は、分岐点での接線剛性行列の固有ベクトルと分岐時除荷領域が中立状態になることを利用するもので、いま1つは、分岐方向での除荷・負荷形式を仮定し、仮定と解析結果とが一致する変形様式を試行錯誤的に求める手法である。いずれの方法も接線剛性行列より高次の微係数は用いておらず、実用的なものである。これらの手法によると、分岐点での、分岐経路方向のベクトルが正確に求まり、基本経路から分岐経路の追跡も容易である。ただ、固有ベクトルによる方法では多重分岐や接線剛性行列の負の領域の分岐など特殊な場合には対応できない。他方、試行錯誤的手法は要素数が増加すると計算量がかなり増大する。したがって、効率的な計算を行うためには、解析対象に応じこの両手法を使い分けることが必要である。

参考文献

- 1) Thompson, J.M.T. and Hunt, G.W. : A General Theory of Elastic Stability, John Wiley & Sons, London, 1973.
- 2) 細野 透 : 弧長法による弾性座屈問題の解析 (その1, その2), 日本建築学会論文集, No. 242, No. 243, pp. 41~50, pp. 21~30, 1976年4月, 5月.
- 3) Nishino, F. et. al. : A Study of the Stability and Behavior at the Critical Points by the Taylor Expansion, Proc. of JSCE, Struct. Eng./Earthquake Eng., Vol.4, No.1, 1s~9s, 1987.
- 4) Shanley, F.R. : Inelastic Column Theory, J. Aeronaut.

- Sci., Vol.14, pp.261~268, 1947.
- 5) Hill, R. : A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic-Plastic Solids, J. Mech. Phys. Solids, Vol.6, pp.236~249, 1958.
- 6) Sewell, M.J. : The Static Perturbation Technique in Buckling Problem, J. Mech. Phys. Solids, Vol.13, pp.247~265, 1965.
- 7) Hutchinson, J.W. : Post-Bifurcation Behavior in the Plastic Range, J. Mech. Phys. Solids, Vol.21, pp.163~190, 1973.
- 8) 後藤芳類・鈴木五月・松浦 聖 : はりと柱の結合部の非弾性特性を考慮した半剛結骨組の臨界挙動の解析, 土木学会論文集, No. 410, pp. 287~296, 1989.
- 9) Goto, Y., Suzuki, S. and Chen, W.F. : Analysis of Critical Behavior of Semi-Rigid Frames with or without Load History in Connections, Int. J. Solids Structures., Vol.27, No.4, pp.467~483, 1991.
- 10) Hangai, Y. and Kawamata, S. : Nonlinear Analysis of Space Frames and Snap-Through Buckling of Reticulated Shell Structures, Proc. Int. Assoc. for Shell and Spatial Struct., Tokyo and Kyoto, 1971.
- 11) Jagannathan, D.S., Epstein, H.I. and Christiano, P. : Nonlinear Analysis of Reticulated Trusses, J. Struct. Div., ASCE, Vol.101, No.ST 12, pp.2641~2658, 1975.
- 12) 吉田 裕・増田陳紀・森本 剛・広沢規行 : 立体骨組構造の増分つり合い方程式とその解法, 土木学会論文集, No. 300, pp. 21~31, 1980.
- 13) Nishino, F. et. al. : A Total Lagrangian Nonlinear Analysis of Elastic Trusses, Proc. of JSCE, Struct. Eng./Earthquake Eng., Vol.1, No.1, 1s~15s, 1984.
- 14) 田中 尚 : 弾塑性構造物の解の唯一性と安定性に関するノート, 日本建築学会論文報告集, No. 88, pp. 1~5, 1963年8月.
- 15) Cihon, C. and Corradi, L. : Large Displacement Analysis of Elastic-Plastic Truss with Stable Bars, Eng. Struct., Vol.3, pp.210~218, 1981.
- 16) Papadrakakis, M. : Inelastic Post-Buckling Analysis of Trusses, J. Struct. Eng., ASCE, Vol.109, No.9, pp.2129~2147, 1983.
- 17) Wu, W.Q. and Yu, T.X. : A Bifurcation Phenomenon in an Elastic-Plastic Symmetrical Shallow Truss Subjected to a Symmetrical Load, Int. J. Solids Structures, Vol.23, No.9, pp.1225~1233, 1987.
- 18) 半谷裕彦・関富 玲・真柄栄毅・岡村 深 : 一般増分法による偏平立体トラス構造の弾塑性座屈解析, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, Vol. 14, pp. 61~66, 1990年7月.
- 19) Dafalias, Y.F. and Popov, E.P. : Plastic Internal Variables Formalism of Cyclic Plasticity, J. Appl. Mech., Vol.43, pp.645~651, 1976.

(1991.4.1 受付)

AN ELASTIC-PLASTIC BIFURCATION ANALYSIS OF MULTIPLE DISCRETE SYSTEMS AND ITS APPLICATION TO TRUSSES

Yoshiaki GOTO, Katsutoshi OHSHIKA, Naoki KAWANISHI and Makoto OBATA

The elastic-plastic bifurcation phenomena are complicated due to the difference of the loading and the unloading characteristics of materials. Hutchinson applied Hill's theory to examine with considerable generality the theoretical aspects of the plastic bifurcation of continuum body and presented a perturbation method to analyze it. Although the method is theoretically exact, its application is restricted to simple problems due to the complicated mathematical operations. Further, the equilibrium paths can be obtained accurately only in the vicinity of the bifurcation points. In view of practical importance, we here present a versatile numerical method to analyze the elastic-plastic bifurcation of multiple discrete systems including the post-bifurcation range.
