

微視クラックの進展則とひずみ軟化への応用

仲沢武志*・岸野佑次**・佐武正雄***

コンクリートや岩石のようなぜい性材料の力学的特性は、その変形過程において微視構造に強く依存する。そこで、ぜい性材料における構成則の定式化には、微視構造の進展を考慮することが重要となる。本文では、ぜい性材料の弾性挙動における微視クラックの影響をクラックテンソルを用いて考察する。また、微視クラックの進展を表す構成モデルを提案し、ひずみ軟化現象への適用を試みる。

Keywords: strain-softening, constitutive relation, crack tensor, microcracks, microstructure

1. はじめに

コンクリートや岩石等のようなぜい性材料は、材料内に存在する微視クラックによって、微視構造を呈する。

すなわち、それは、コンクリートにおいては、骨材とモルタルとの界面等のような材料欠陥部であり、岩石等では、岩のもつ節理、層理、片理等の地質的構造である。

そのような材料を力学的に考察する際には、このような材料内部の不均質性や異方性等の微視構造を考慮すべき場合が多い。そのような場合、材料内部の不均質性や異方性を定量化し、それが、破壊強度や破壊形態および変形挙動に及ぼす影響を把握する必要がある。

従来、このような材料を解析するために、特に、材料内部の異方性に着目し、微視クラックによる微視構造の異方性を定量化し、さらに、微視構造を考慮した弾性的な構成則の研究が、クラックテンソルを用いて小田等^{1),2)}によってなされている。そこでの定式化では、材料内に存在する微視構造を考慮した弾性的な構成則を考察している。

しかしながら、このようなクラックテンソルに基づいた定式化では、外力等の作用による微視クラックの進展に伴う微視構造の変化は考慮されていない。

一方、それと類似する方法に損傷力学がある³⁾。損傷力学では、微視クラックによる微視構造を損傷テンソルによって定量化し、その影響を応力場に反映させている。また、損傷テンソルに基づいた定式化で、微視構造の変化を損傷進展則によって表現した研究もなされている。しかしながら、このような定式化においては、実質応力を考慮してはいるが、そこで用いられている構成則は、

母材の弾性係数である。

また、同様な考察に、Krajcinovic⁴⁾やDragonとMroz⁵⁾による研究がある。Krajcinovicの研究では、熱力学に基づく散逸関数による定式化がなされているが、損傷構造をベクトル量で表現しているため、一般的な微視構造には直接適用できない。また、DragonとMrozによる研究では、微視構造の影響を転位密度テンソルで表現し、その発展則も考察されているが“directional tensors”が明確に定義されていない。

よって、ここでは、微視クラックによる微視構造の異方性を考慮した構成則を考察するが、微視クラック進展による微視構造の変化も考慮できるようなものを提案するために、クラックテンソルに基づく定式化をする。微視クラックの進展による微視構造の変化をクラックテンソルの速度で表現するが、その際、塑性論における定式化を参考とする。ここで提案する定式化によって、Mroz等の“directional tensors”を明確に表現する。また、ここで提案する構成則によって、ひずみ軟化則の表現を試みる。

なお、ここでの考察は2次元平面応力状態に対するものであり、また、応力やひずみの符号は、引張を正として定式化を行っている。

2. 微視構造の変化を考慮した構成則の誘導

微視クラックによる微視構造をクラックテンソルで定量化し、それを考慮した弾性的な構成則が考察されている。それらは、次式のようなものである。

$$\varepsilon_{ij} = (D_{ijkl} + L_{ijkl}) \sigma_{kl} \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 D_{ijkl} は母材のコンプライアンスであり、 L_{ijkl} はクラックに対するコンプライアンスである。これらは、2次元平面応力の場合、次式のように表される。

$$D_{ijkl} = -\frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1+\nu}{E} \delta_{ik} \delta_{jl} \dots \dots \dots (2)$$

* 正会員 工博 (株)フジタ技術研究所 土木研究部
(〒223 横浜市港北区大綱74)

** 正会員 工博 東北大学助教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工博 東北学院大学教授 工学部土木工学科
(当時 東北大学教授 工学部土木工学科)

$$L_{ijkl} = \frac{1}{4E} (F_{ik}\delta_{jl} + F_{jk}\delta_{il} + F_{il}\delta_{jk} + F_{jl}\delta_{ik}) \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 F_{ij} はクラックテンソルであり、次式で定義される。

$$F_{ij} = \frac{2\pi}{A} \sum_{NN} a^2 n_i n_j \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $2a$ はクラック長さ、 n_i はクラック面法線ベクトルである。

式(3)における L_{ijkl} は、簡単のため比較的クラック密度の小さい場合を対象とし、クラックテンソルの1次の項を考慮したものである²⁾。なお、他の応力状態との対比は、付録1に示す。

式(1)は、先天的な微視クラックの影響を考慮した弾性的な構成則である。

しかしながら、微視クラックによる微視構造は、外力等の作用によって、微視クラックが進展するため、微視構造は変化するものと考えられる。したがって、このような影響を考慮した構成則を定式化する必要がある。

そこで、本文においては、このような微視構造の変化を考慮した構成則を定式化するが、それに対して、速度形式で記述されている塑性論を参考とする。

速度形式で記述されている塑性論は、以下に示すようなもので定式化されているすなわち、

- (1) 降伏関数
- (2) 塑性ひずみ流れ則
- (3) 硬化関数

ここでは、これらに対応するものとして、以下に示すようなものを考える。

- (1) 微視クラック進展基準
- (2) 微視クラックの進展を記述するテンソル
- (3) 硬化関数

ここで、このような要素について記述する。

(1) 微視クラック進展基準

これは、速度形式での塑性論における降伏関数に対応するものである。微視構造を構成する個々の微視クラックは、外力、クラック密度、クラック方向分布等により、異なる進展をするものと考えられるが、ここでは、考察の第1段階として、微視クラックの進展を塑性論における降伏関数のように記述できるものとする。なお、具体的な関数としては、微視構造は、一般的な異方性を示すものと考えられることから、異方性を考慮した降伏関数を用いる。微視クラック進展基準に対する関数形は後に記述する。

(2) 微視クラックの進展を記述するテンソル

これは、塑性論における塑性ひずみ流れ則に対応するものである。微視クラックの進展は、材料挙動を記述するものであり、対象とする各々の材料挙動を把握して定式化するものであろうが、ここでは、簡単なクラック進

展方向の例として、次のようなものを考える。すなわち、

- ① 最大主応力方向に直交する方向に進展する
- ② 等方的に進展する
- ③ 応力テンソルに共軸に進展する

なお、ここでは、微視クラックの進展をクラックテンソルの速度で表現する。

(3) 硬化関数

塑性論における硬化関数と同様な考え方で提案するものがある。微視クラックの進展を記述する構成則を考察する場合においても、塑性論での硬化関数に対応する概念を要する材料もあろう。しかしながら、ここでは、考察の第1段階として、硬化関数については今後考察するものとし、ここでは、考慮しないものとする。

以上は概念的な記述であるが、次にこれらを数学的に展開する。

式(1)で表される微視構造の影響を考慮した弾性的な構成則は、ひずみテンソルが応力テンソルとクラックテンソルの関数として得られることから、ここでは、その速度表示を以下のように考える。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = (D_{ijkl} + L_{ijkl}) \dot{\sigma}_{kl} + M_{ijkl} \dot{F}_{kl} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 M_{ijkl} は次式である。

$$M_{ijkl} = \frac{1}{4E} (\sigma_{ik}\delta_{jl} + \sigma_{kj}\delta_{il} + \sigma_{il}\delta_{jk} + \sigma_{jl}\delta_{ik}) \dots\dots\dots (6)$$

式(5)は次のようにエネルギーに基づいた考察からも得ることができる。すなわち、補足エネルギー密度関数を U とし、これは、応力テンソルとクラックテンソルの関数であることから、次式のように求める。

$$U(\sigma_{ab}, F_{cd}) = \frac{1}{2} \int \epsilon_{ij} d\sigma_{ij} = \frac{1}{2} (D_{ijkl} + L_{ijkl}) \sigma_{ij} \sigma_{kl} \dots\dots\dots (7)$$

補足エネルギーより、微視構造を考慮したひずみは、次式のように得られる。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial U(\sigma_{ab}, F_{cd})}{\partial \sigma_{ij}} \dots\dots\dots (8)$$

さらに、微視構造を考慮したひずみ速度は次式で計算される。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial^2 U(\sigma_{ab}, F_{cd})}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{\partial^2 U(\sigma_{ab}, F_{cd})}{\partial \sigma_{ij} \partial F_{kl}} \dot{F}_{kl} \dots\dots\dots (9)$$

一方、補足エネルギーより、次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 U(\sigma_{ab}, F_{cd})}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} = D_{ijkl} + L_{ijkl} \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{\partial^2 U(\sigma_{ab}, F_{cd})}{\partial \sigma_{ij} \partial F_{kl}} = M_{ijkl} \dots\dots\dots (11)$$

これより、式(5)はエネルギーに基づく考察からも得られることになる。

ここで、式(5)には、クラックテンソルの速度が考慮されている。そこで、先に記述したように、クラックテンソルの速度を記述するものを次式で表わす。すなわち、

(case 1)

$$\dot{F}_{ij} = qc_{ij}, \quad c_{ij} = m_i m_j \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 m_i : 最大主応力方向に直交する方向ベクトル

(case 2)

$$\dot{F}_{ij} = \frac{1}{2} q \delta_{ij} \quad \delta_{ij} : \text{クロネッカーのデルタ} \dots\dots\dots (13)$$

(case 3)

$$\dot{F}_{ij} = q \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \quad G : \text{ポテンシャル} \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 c_{ij} , δ_{ij} , $\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}$ が微視クラックの進展を規定するテンソルであり、Mroz 等の "directional tensors" に相当するものである。

ここで、比例定数 q について考察する。なお、誘導過程は塑性論を参考とする。また、ここでは、考察の第1段階として、微視クラックの進展は最大主応力に直交する方向である場合について考える。

降伏関数に対応する微視クラック進展基準は、次式のように、応力テンソル、クラックテンソル、強度を表す量 r の関数であるとす。

$$J = J(\sigma_{ij}, F_{kl}, r) = S(\sigma_{ij}, F_{kl}) - r(F_{kl}) \dots\dots\dots (15)$$

なお、式 (15) 右辺第1項の関数 S は、応力とクラックテンソルによる材料の状態を表し、第2項の r はその限界を与える強度を表す関数とする。

式 (15) を全微分すれば次式を得る。

$$j = \frac{\partial S}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + q \frac{\partial S}{\partial F_{ij}} \dot{F}_{ij} - \frac{\partial r}{\partial F_{ij}} \dot{F}_{ij} = 0 \dots\dots\dots (16)$$

先に記述したように、ここでは、微視クラックの進展が最大主応力に直交する方向とした場合を考察の対象とするので、式 (16) に式 (12) を代入すれば、次式を得る。

$$j = \frac{\partial S}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + q \frac{\partial S}{\partial F_{ij}} c_{ij} - q \frac{\partial r}{\partial F_{ij}} c_{ij} = 0 \dots\dots\dots (17)$$

式 (17) を比例定数 q について整理すると次式を得る。

$$q = \frac{\frac{\partial S}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}}{-\left[\frac{\partial S}{\partial F_{mn}} - \frac{\partial r}{\partial F_{mn}}\right] c_{mn}} = \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial S}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \dots\dots\dots (18)$$

式 (18) で得られる比例定数 q を式 (12) に代入することにより、クラックテンソルの速度と応力テンソルの速度の関係を次式のように得ることができる。

$$\dot{F}_{ij} = \frac{1}{\Lambda} c_{ij} \frac{\partial S}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} \dots\dots\dots (19)$$

式 (19) を微視構造の変化を考慮した構成則式 (5) に代入することにより、次式を得る。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = (D_{ijkl} + L_{ijkl}) \dot{\sigma}_{kl} + M_{ijpq} N_{pqkl} \dot{\sigma}_{kl} \dots\dots\dots (20)$$

ここに、 N_{ijkl} は次式である。

$$N_{ijkl} = \frac{1}{\Lambda} c_{ij} \frac{\partial S}{\partial \sigma_{kl}} \dots\dots\dots (21)$$

式 (20) が微視クラックの進展に伴う微視構造の変化を

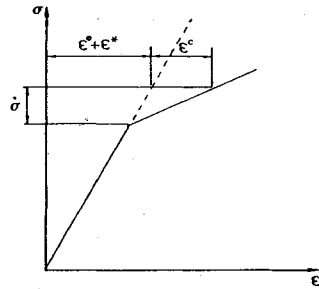


図-1 微視クラックの進展を考慮した応力-ひずみ関係

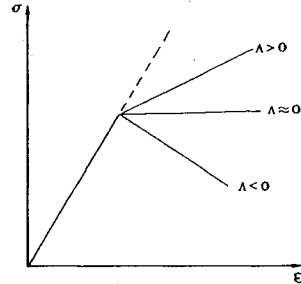


図-2 応力-ひずみ関係への係数 A 依存性

$J=0$ かつ $q>0$	$\Lambda > 0, \frac{\partial S}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} > 0$	(硬化状態)
	$\Lambda \approx 0$	(完全流れ状態)
	$\Lambda < 0, \frac{\partial S}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0$	(ひずみ軟化状態)
$J=0$ かつ $q=0$		(中立載荷状態)
$J < 0$	($\dot{F}=0$)	(弾性的除荷状態)

図-3 微視クラック進展則での状態

考慮した構成則である。

これらを1軸的に示すと図-1 のようになる。すなわち、図中の記号 ϵ^c はクラックの進展によるひずみであり、式 (20) 第3項より計算されるものである。

クラック進展後の挙動は、その影響によるひずみが生じ、コンプライアンスが上昇している。その結果として、材料は塑性的な硬化を示している。

また、式 (18) で求められる比例係数 q によって、材料挙動は図-2 のように表される。

すなわち、係数 Λ が正のときには、図-2 のような塑性論での硬化現象を表す。また、係数 Λ がゼロでは、式 (18) を計算することはできないが、限りなくゼロに近い値では、比例係数 q は無限大となり、したがって、式 (19) および式 (20) より計算されるひずみもまた無限大となる。これは塑性論での完全流れ則に対応する。さらに、係数 Λ が負の場合には、式 (18) における $(\partial S / \partial \sigma_{ij}) \dot{\sigma}_{ij}$ もまた負でなければ、クラックテンソルの速度における成分が負となる。これは、荷重の増加に

伴う微視クラックによる微視構造の減少を表し、一般には考えにくい。よって、 $(\partial S/\partial \sigma_{ij})\delta_{ij}$ が負となるためには、応力の速度が負である必要がある。これは、材料挙動としてひずみ軟化を示すことになる。これらをまとめて図-3に示す。なお、ここでは、考察の第1段階として、式(15)において材料硬化を考慮しないため、ひずみ軟化を表すモデルとなる。

3. 微視クラック進展基準

微視クラックによる微視構造の変化を考慮した構成則を具体的に適用するためには、微視クラックの成長基準 J に対する関数形が必要である。そこで、ここでは、そのような関数を提案する。

微視構造を定量化し、それを考慮した異方性降伏基準については、Cowin⁹⁾によって、一般的な議論がなされているが、ここでは、微視クラックの進展を記述する基準 J を、次式のように提案する²⁾。

$$J(\sigma_{ij}, F_{kl}, r) = G_{ij}\sigma_{ij} + \sqrt{H_{ijkl}\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}} - r = 0 \dots \dots (22)$$

式(22)は、等方性材料に対する Drucker-Prager の基準の異方性への拡張と解釈することができる。

なお、以降の定式化においては、考察の第1段階として r は一定と考えることとする。

さらに、式(22)において、 σ'_{ij} は偏差応力を表し、 G_{ij} 、 H_{ijkl} はクラックテンソルを引数とした係数テンソルを表す。

ここで、係数テンソル G_{ij} 、 H_{ijkl} について考察する。本文においては、これらを、クラックテンソルを引数とした等方テンソル値関数で得ることとする。考察の第1段階として、クラックテンソルの関数 J への寄与は、各々の項で応力テンソルに同次であるものとする。さらに、ここでは、微視クラックの成長に対する異方性の影響を主な考察対象とするので、クラック成長基準を表す関数 J における係数は定数とし、一般的なテンソル式におけるクラックテンソルのスカラー不変量は考慮しないものとする。

このように考えた場合、式(22)中の G_{ij} 、 H_{ijkl} は次式のように展開される。

$$G_{ij} = gF_{ij}$$

$$H_{ijkl} = h_1(\delta_{ij}F_{kl}F_{kl} + \delta_{kl}F_{ij}F_{ij}) + h_2F_{ij}F_{kl} + h_3(F_{ij}F_{rk}\delta_{il} + F_{kr}F_{rj}\delta_{il} + F_{ir}F_{rj}\delta_{kl} + F_{ir}F_{rj}\delta_{ik}) \dots \dots (23)$$

ここに、 g 、 $h_1 \sim h_3$ は材料定数であるが、 $\delta_{ij}\sigma'_{ij} = 0$ であるため、 h_1 は任意でよい。そこで、ここでは、簡単のため、 h_1 をゼロとおくこととする。

提案したクラック成長基準の適用性について考察するために、ここでは、赤井等⁹⁾によって行われた結晶性片岩の実験結果に適用する。

赤井等による実験は、数種の結晶性片岩を対象になさ

表-1 各片岩に対する材料定数

岩石	gF^2_{22}	$h_2F^2_{22}$	$h_3F^2_{22}$	$r(\text{kgf/cm}^2)$
緑泥片岩A	0.16	-27.8	8.30	1400
緑泥片岩B	0.58	-62.4	18.1	2525
石墨片岩F	1.17	-86.3	26.3	1025

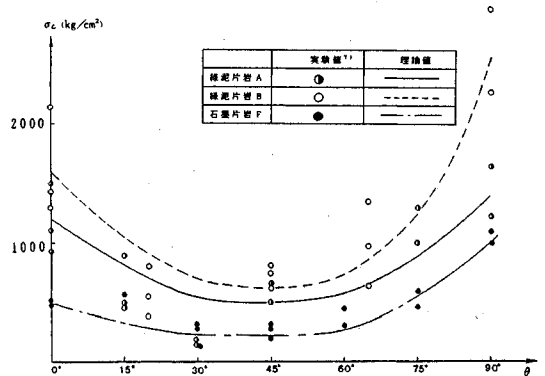


図-4 片岩供試体の1軸圧縮試験における層方向と強度の関係

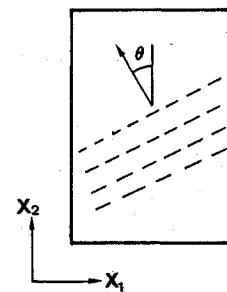


図-5 考える座標系

れている。ここでは、原論文で用いられている記号をそのまま用いることとし、緑泥片岩A、緑泥片岩B、石墨片岩Fについて考察する。

提案したクラック成長基準における材料定数を表-1のように定めれば、各片岩に対して図-4のように強度を得る。ここに、得られる係数の求め方を付録2に示す。なお、ここでは、1軸圧縮試験を考察の対象としている。図-4は縦軸に1軸圧縮強度、横軸に成層面法線方向と载荷方向とのなす角度 θ を示している。なお、成層面法線方向と载荷方向のなす角度 θ は図-5のような座標系で考えている。

図-4から、提案したクラック成長基準は、全体的な傾向として、実験結果を良好に表現していると思われる。なお、ここで対象としている片岩は、成層面構造をなしており、必ずしもクラックテンソルのようなもので表現できるような微視構造ではないようにも思われるため、ここでは、クラック成長基準の材料定数と、クラックテンソルの成分とを分離しないで求めている。

4. 提案した構成則によるひずみ軟化の表現

ここで、提案した構成則を用いて、岩石やコンクリート等の材料におけるひずみ軟化現象について考察する。

(1) ひずみ軟化に対する構成則

提案した微視構造の変化を考慮した構成則の適用性は、行列表示によって表現すると便利である。

そこで、提案した微視構造の変化を考慮できる構成則式(20)を行列表示する。これは、次式のように表される。

$$\begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{22} \\ 2\dot{\epsilon}_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1+F_{11} & -\nu & F_{12} \\ +P_{1111} & +P_{1122} & +2P_{1112} \\ -\nu & 1+F_{22} & F_{12} \\ +P_{2211} & +P_{2222} & +2P_{2212} \\ F_{12} & F_{12} & 2(1+\nu) \\ +2P_{1211} & +2P_{1222} & +(F_{11}+F_{22}) \\ & & +4P_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{12} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (24)$$

ここに、 P_{ijkl} を次式のようにおいた。

$$P_{ijkl} = EM_{ijpq}N_{pqkl} \dots\dots\dots (25)$$

なお、ここで提案している構成則は、クラック進展方向とクラック成長基準に異なる関数形を用いているため、塑性論での非関連流れ則に対応するものであり、従って、行列表示における構成則は対象行列とはならない。

ここで、赤井等の結晶性片岩に対する実験結果に、提案した構成則を適用する。なお、ここでは、クラック成長基準に対する考察と同様に、赤井等によってなされた結晶性片岩の1軸圧縮試験に適用する。

1軸圧縮試験の場合、ここで提案した構成則の行列表示式(24)は次式のように得られる。

なお、ここでの考察は、計算の便宜を考慮して、考える座標系を応力の主軸とする。

$$\begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{22} \\ 2\dot{\epsilon}_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1+F_{11} & -\nu & F_{12} \\ -\nu & 1+F_{22} & F_{12} \\ & +P_{2222} & \\ F_{12} & F_{12} & 2(1+\nu) \\ & & +(F_{11}+F_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\sigma}_{22} \\ 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (26)$$

式(26)において、 P_{2222} が微視構造の変化を表すものであり、1軸圧縮試験の場合次式のように得られる。

$$P_{2222} = \frac{1}{A} \frac{\partial S}{\partial \sigma_{22}} C_{22\sigma_{22}} \dots\dots\dots (27)$$

さらに、式(27)における $\partial J / \partial \sigma_{22}$ および、係数 A は次式である。

$$\frac{\partial S}{\partial \sigma_{22}} = gF_{22} + \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{2} h_2 F_{22} (-F_{11}\sigma_{22} + F_{22}\sigma_{22}) \right. \dots\dots\dots$$

$$\left. + 2h_3 \{ (F_{12}^2 + F_{22}^2) \sigma_{22} \} \right] \dots\dots\dots (28)$$

$$\beta = \left[\frac{1}{2} h_2 \{ -F_{11}\sigma_{22} + F_{22}\sigma_{22} \}^2 + h_3 \{ (F_{11}^2 + F_{12}^2) \sigma_{22}^2 + (F_{12}^2 + F_{22}^2) \sigma_{22}^2 \} \right]^{1/2} \dots\dots\dots (29)$$

$$A = - \left[g\sigma_{22}C_{22} + \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{4} h_2 \sigma_{22} (\sigma_{22}C_{22} - \sigma_{22}C_{11}) (F_{22} - F_{11}) + h_3 (F_{11}C_{11}\sigma_{22}^2 + 2F_{12}C_{12}\sigma_{22}^2 + F_{22}C_{22}\sigma_{22}^2) \right] \right] \dots\dots (30)$$

先に記述したように、クラック成長基準における材料定数は、クラックテンソルの成分と融合した形で求めている。ここで提案した構成則でひずみ軟化を表現するためには、これを個々に求める必要がある。そこで、ここでは、クラック密度を巨視的弾性係数から求めることとする。

(2) クラックテンソルの推定

巨視的弾性係数からクラックテンソルを推定する。そこで、以下に、巨視的弾性係数から、成層面構造の影響を表現できる等価なクラックテンソルの成分を求める方法について記述する。なお、ここでの考察は、クラック面法線が1方向の場合には直接適用できるが、一般的な微視構造の場合に対しては、さらに、考察する必要がある。

成層面構造を示すような微視構造では、その法線方向は、一定であるので、その影響を表現できる等価なクラックテンソルは、次式のように表せる。

$$(F_{ij}) = \rho \begin{pmatrix} \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta \end{pmatrix} \dots\dots\dots (31)$$

ここに、 ρ はクラック密度である。図-5のように、成層面の法線方向と角度 θ をなす方向に1軸載荷をする場合、成層面の影響を考慮した巨視的弾性係数 \bar{E} は次式のようになる。

$$\bar{E} = \frac{E}{1 + \rho \cos^2\theta} \dots\dots\dots (32)$$

式(32)を用いて、成層面の影響からクラック密度を求める。成層面の法線方向と載荷方向とのなす角度がゼロの場合、式(32)は次式となる。

$$\bar{E} = \frac{E}{1 + \rho} \dots\dots\dots (33)$$

さらに、 θ が90°の場合には、式(32)は次式のようになる。

$$\bar{E} = E \dots\dots\dots (34)$$

式(33)と式(34)を使って、成層面の影響から等価なクラック密度を求めることができる。

そこで、ここでは、赤井等によって行われた実験のうち、緑泥片岩Aを対象として考察する。

赤井等の実験結果では、緑泥片岩Aの巨視的弾性係数を図-6のように得ている。ここに、実験結果に基づ

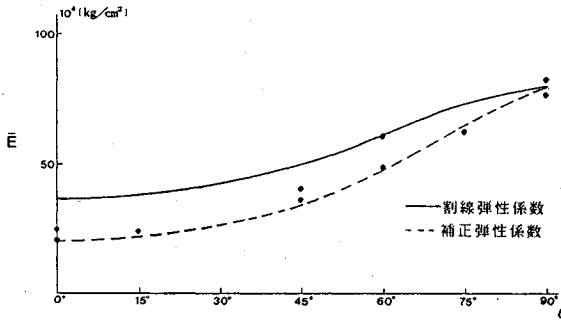


図-6 弾性係数と成層面方向との関係

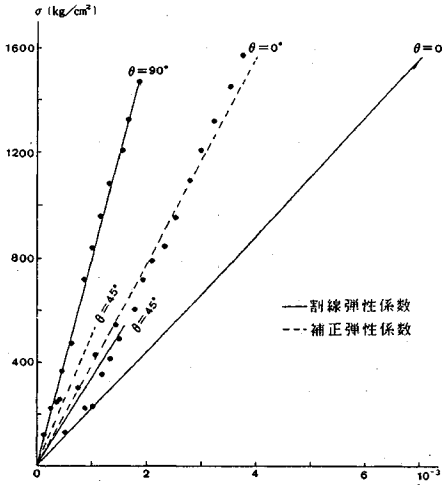


図-7 緑泥片岩の応力-ひずみ関係

いた弾性係数は、全ひずみの約 20% の割線弾性係数である。この弾性係数を用いた応力-ひずみ曲線を図-7 に示す。この割線弾性係数は、全ひずみの約 20% におけるものであり、成層面の法線方向が 0°, 45° の場合、全体的な実験結果を表現するものではない。そこで、本文では、図-6, 7 に示すように補正した弾性係数に対しても考察する。まず、割線弾性係数について考察する。式 (34) と図-7 から、 $\theta=90^\circ$ の場合には、巨視的弾性係数は次式となる。

$$\bar{E} = E = 78 \cdot 10^4 \dots\dots\dots (35)$$

また、式 (33), (35) および図-7 より、 θ がゼロの場合の巨視的弾性係数 \bar{E} は次式のようになる。

$$\bar{E} = \frac{78 \cdot 10^4}{1 + \rho} = 22 \cdot 10^4 \dots\dots\dots (36)$$

式 (35), (36) から、割線弾性係数を用いた場合の等価なクラック密度を、次式のように求めることができる。

$$\rho = 2.54 \dots\dots\dots (37)$$

同様にして、補正弾性係数を用いた場合の等価なクラック密度を、次式のように求めることができる。

$$\rho = 1.10 \dots\dots\dots (38)$$

表-2 クラック成長基準に対する材料定数

ρ	g	h_2	h_3	$r(\text{kgf/cm}^2)$
2.54	0.063	-4.31	1.28	1400
1.1	0.15	-23.0	6.86	1400

ただし、ここで、 $\theta=0^\circ$ の補正弾性係数を $E=37 \cdot 10^4$ とし、 $\theta=90^\circ$ の場合には、割線弾性係数と同じ値を用いている。

一般的な微視構造の場合には、さらに考察する必要があるが、微視構造が 1 方向の場合、ここに示した方法でクラック密度を得ることができる。

このようにして求められたクラック密度から、クラック成長基準における材料定数 g, h_2, h_3 を得ることができる。クラック密度を含んだクラック成長基準の材料定数は、表-1 である。これと、式 (37), (38) で得られる等価なクラック密度によって表-1 の値を除することから、緑泥片岩 A に対する材料定数を表-2 のように得ることができる。

(3) ひずみ軟化則への適用

先に記述したように、ここで提案した構成則を用いて、ひずみ軟化現象を表現する。ここでは、赤井等による結晶性片岩の 1 軸圧縮試験に適用する。

図-5 において、 $\theta=0^\circ, \theta=45^\circ$ について考察することとする。これら、各々の場合のクラックテンソルは、次のように表される。

($\theta=0^\circ$ の場合)

$$(F_{ij}) = \rho \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho = \begin{cases} 2.54 (\text{割線弾性係数}) \\ 1.10 (\text{補正弾性係数}) \end{cases} \dots\dots (39)$$

($\theta=45^\circ$ の場合)

$$(F_{ij}) = \rho \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \quad \rho = \begin{cases} 2.54 (\text{割線弾性係数}) \\ 1.10 (\text{補正弾性係数}) \end{cases} \dots\dots (40)$$

また、ここで考察しているのは、1 軸圧縮試験であり、この場合のクラック進展方向を記述するテンソル C_{ij} は荷重方向に一致する。さらに、ここでは、考えている座標系は図-5 に示すものであり、荷重方向は x_2 軸方向である。よって、式 (12) のクラック進展方向を記述するテンソル C_{ij} は次式のようになる。

$$(C_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots (41)$$

式 (26), (39) および式 (40) を用いて、微視クラックの進展を考慮した構成則を得る。図-5 のような座標系では、式 (30) は次式となる。

$$A = - \left[g\sigma_{22} + \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{4} h_2 \sigma_{22}^2 (F_{22} - F_{11}) + h_3 F_{22} \sigma_{22}^2 \right] \right] \dots (42)$$

式 (26), (27), (28) および式 (41), さらに、表-2 の

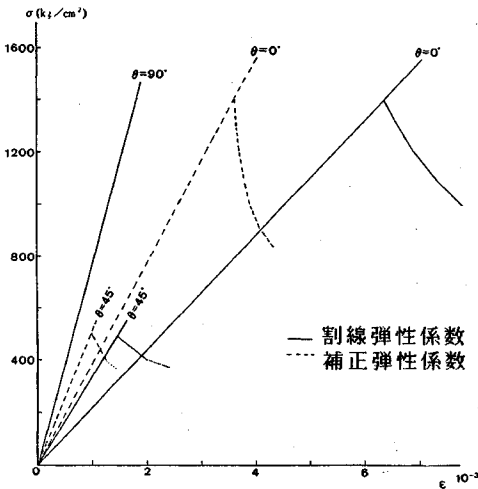


図-8 提案したモデルによる軟化曲線

係数を用いれば、応力-ひずみ関係として、図-8を得る。

図-8より、クラック進展基準を越えた後の材料挙動はひずみ軟化を呈する。しかしながら、ここで考察している結晶性片岩の実験では、クラック進展基準後の応力-ひずみ曲線の測定は行われていない。よって、ここで提案した構成則を用いたひずみ軟化現象の表現は、定性的なものである。なお、 $\theta=0^\circ$ の場合には、クラックテンソルの速度はゼロであり、よって、材料挙動としては、微視構造を伴わないものと同様なものとなる。

5. あとがき

微視構造を考慮した弾性的構成則は、従来から考察されているが、微視構造を構成する微視クラックは、外力等の作用によって進展するものと考えられる。

そこで、本文では、従来の塑性論を参考として、微視クラックによる微視構造の変化を考慮した構成則を提案した。

ここで、提案した構成則は、次のような概念からなる。

- (1) 微視クラック進展基準
- (2) 微視クラック進展方向を記述するテンソル
- (3) 硬化関数

ここでは、これら各々に次のようなものを提案した。

- (1) 等方性材料におけるDruker-Prager基準の異方性への拡張基準
- (2) 微視クラックの進展は、
 - ・最大主応力に直交する方向に進展
 - ・等方的に進展
 - ・応力テンソルに共軸に進展
- (3) ここでは、簡単のため、考察の第1段階として、硬化関数は考慮していない。

このような考え方から得られる構成則を用いて、ひず

み軟化現象を表現した。

しかしながら、ここで適用した実験結果では、クラック進展基準後の計測はされていない。よって、ここでの考察は、定性的なものである。

また、提案した構成則で得られる応力-ひずみ曲線は、クラック進展基準を越えた後、急激な軟化挙動を示している。しかし、コンクリート等の材料では、塑性的な硬化挙動から徐々に軟化挙動へ移行するものと考えられる。この点については、ここでは考慮していない硬化関数を導入することによって、さらに考察したいと考えている。

ここで、提案した構成則に類似する構成則は、KrajcinovicやMroz等によってもなされている。Krajcinovic等の研究では、熱力学に基づいた定式化であるが、微視構造の定量化にはベクトル量を用いているため、一般的な微視構造に対しては適用できない。また、Mroz等の定式化では2階のテンソルである転位密度テンソルを用いて微視構造を定量化している。そこでの発展則で用いられている“directional tensors”の詳細な検討はなされていない。よって、ここでは、このような概念に、塑性論での塑性ひずみ流れ則に類似する考え方をを用いた定式化を提案し、これに対する考察をしている。ひずみ軟化則の定量的検討や、硬化関数の考慮等についてさらに考察したいと考えている。

付録.1 クラックを表すコンプライス成分について

本文では、微視クラックの力学的影響をEshelbyの楕円体介在物法で表している。この方法を2次元スリット状クラックに適用した場合、固有ひずみ ϵ_{ij}^* は次式のように求められる。

(平面応力)

$$\epsilon_{11}^* = 0, \epsilon_{22}^* = \frac{2\pi a^2}{AE} \sigma_{22}, \epsilon_{12}^* = \frac{\pi a^2}{AE} \sigma_{12} \dots \dots \dots (A-1)$$

(平面ひずみ)

$$\epsilon_{11}^* = 0, \epsilon_{22}^* = \frac{\pi(1-\nu)a^2}{AG} \sigma_{22}, \epsilon_{12}^* = \frac{\pi(1-\nu)a^2}{2AG} \sigma_{12} \dots \dots \dots (A-2)$$

なお、ここにAは微視クラックの影響を平均化する領域の面積、2aはクラック長さを表す。

式(3)は一般的に表現すると、係数cを用いて次式のように表される。

$$L_{ijk} = c(F_{ik}\delta_{jl} + F_{jk}\delta_{il} + F_{il}\delta_{jk} + F_{jl}\delta_{ik}) \dots \dots \dots (A-3)$$

式(A.3)に平面応力および平面ひずみに対応する固有ひずみとクラックテンソルの定義式(4)を用いて係数cは次式のように求められる。

$$c = \begin{cases} \frac{1}{4E} & \text{(平面応力)} \\ \frac{1-\nu}{8G} & \text{(平面ひずみ)} \end{cases} \dots \dots \dots (A-4)$$

なお、計算の詳細については文献2)を参照されたい。

付録.2 クラック進展基準における係数の求め方

ここで提案するクラック進展基準には材料定数として、 g , h_2 , h_3 がある。よって、これらを求めるためには3つの方程式を得ればよい。よって、方程式を得るために、異方性の主軸上において、1軸応力状態について、例えば、 0° , 45° , 90° を考えれば、次式を得る。

$$J^{(0^\circ)} = gF_{22}\sigma_c^{(0^\circ)} + \left(\frac{1}{4}h_2F_{22}^2\sigma_c^{(0^\circ)2} + h_3F_{22}^2\sigma_c^{(0^\circ)2}\right)^{1/2} - r = 0$$

$$J^{(45^\circ)} = \frac{1}{2}gF_{22}\sigma_c^{(45^\circ)} + \left(\frac{1}{4}h_2F_{22}^2\sigma_c^{(45^\circ)2} + h_3F_{22}^2\sigma_c^{(45^\circ)2}\right)^{1/2} - r = 0$$

$$J^{(90^\circ)} = \left(\frac{1}{4}h_2F_{22}^2\sigma_c^{(90^\circ)2} + h_3F_{22}^2\sigma_c^{(90^\circ)2}\right)^{1/2} - r = 0$$

..... (A.5)

なお、ここで考えている微視構造は、異方性の主軸上で次式のようなクラックテンソルで表している。

$$(F_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F_{22} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (A.6)$$

これらの式に各々の角度に対する強度を代入し、 gF_{22} ,

$h_2F_{22}^2$, $h_3F_{22}^2$ について解けば、各材料定数を得ることができる。

参 考 文 献

- 1) Oda, M., Suzuki, K. and Maeshibu, T. : Elastic Compliance for Rock-like Materials with Randon Cracks, Soils and Foundations, Vol.24, No.3, 1984.
- 2) 仲沢武志・佐武正雄：クラックテンソルによる微視クラックの表現とその応用，第22回岩盤力学シンポジウム講演論文集，1990.
- 3) 京谷孝史・市川康明・川本眺万：岩盤の力学特性評価における損傷テンソルの適用について，土木学会論文集，No.358/Ⅲ-3, 1985.
- 4) Krajcinovic, D. : Constitutive Equation for Damageing Materials, J. Applied Mechanics, Vol.50, 1983.
- 5) Dragon, A. and Mroz, Z. : Continuum Model for Plastic Brittle Behaviour of Rock and Concrete, Int. J. Sci., Vol.17, 1979.
- 6) Cowin, S.C. : Fabric Dependence of an Anisotropic Strength Criterion, Mechanics of Materials, 5, 1986.
- 7) 赤井浩一・山本和久・有岡正樹：結晶性片岩の構造異方性に関する実験的研究，土木学会論文集，第170号，1969. (1990.11.14 受付)

AN EVOLUTION MODEL FOR MICROCRACKS AND ITS APPLICATION TO THE STRAIN-SOFTENING PHENOMENA

Takeshi NAKAZAWA, Yuji KISHINO and Masao SATAKE

Mechanical properties of brittle materials, such as concrete and rocks, are greatly depend on the microstructures induced in the process of deformation. Thus, it is important to take into account the evolution of microstructures in the formulation of constitutive equations for brittle materials. In this paper, the concept of crack tensor is introduced to represent the effect of microcracks on the elastic properties of brittle materials. Then a criterion for the evolution of microcracks is proposed and an applied result is compared with a test result on rocks. Finally, the applicability of this criterion to the constitutive model with strain-softening is discussed.