

**投稿論文 (和文)**  
**PAPERS**

# 軟岩のひずみ軟化型弾塑性構成式

足立 紀尚\*・岡 二三生\*\*

本論文では、地盤材料のせん断過程にみられるひずみ軟化と堆積膨張挙動を記述できる弾塑性構成式を導き、堆積軟岩(大谷石)の三軸圧縮試験結果に基づきその適用性を検討した。構成式の誘導において、降伏関数を摩擦による強度成分を表す応力履歴テンソルの関数として与えることで、Valanisの意味での解の一意性を満足するため、有限要素解析の実行が容易であるという特長を有している。

**Keywords:** strain-softening, elasto-plasticity, constitutive law, soft-rock

## 1. 序 論

密な砂、過圧密粘土、また軟岩をせん断すると、それらの応力-ひずみ関係にはひずみ硬化のみならず、ひずみ軟化現象が観察される。すなわち、せん断により応力は増加して最大強度に達するが、その後減少に転じ最終的には大ひずみでの強度(残留強度)に到達する。このひずみ軟化挙動は、地盤工学の諸問題で論じられる進行性破壊現象と密接に関係すると考えられるから、その挙動を記述できる構成モデルの確立は重要である。しかしながら、軟化現象の捉え方には2つの流れがある。第一は、軟化挙動を応力-ひずみ関係そのものと考え、それを記述するための構成式を求めるとするものである(Höeg<sup>1)</sup>, Kawaharaら<sup>2)</sup>, Lo & Lee<sup>3)</sup>, Matsumoto & Ko<sup>4)</sup>, Nayak & Zienkiewicz<sup>5)</sup> Banerjee & Stipho<sup>6)</sup>等) これら従来のひずみ軟化型構成式においては、有限要素法などの数値解析に適用すると剛性マトリックスが負になるため、境界値問題を適切に定義できないことが問題として指摘されている。これは解の一意性に関連し、解析法は複雑なものとなる(Riks<sup>7)</sup>)。さらに、解析結果が有限要素のメッシュのサイズに依存するという欠点を有しているが、これに関しては近年Bazantら<sup>8)</sup>や Aifantisら<sup>9)</sup>は構成式を非局所化することによってこの問題の解決を試みている。

第二は、材料の応力-ひずみ関係は本質的にひずみ硬化型であり、軟化現象は試験時に材料要素内に生じる不均一な変形、換言すれば変形の局所化によって生じるとの考えである。すなわち、ひずみ硬化型構成式を用いた境界値問題を解析することで軟化挙動を説明できるとす

るものである(Read & Hegemier<sup>10)</sup>, Sandler<sup>11)</sup>)。この流れの研究は金属材料を対象にいくつか報告されているが、地盤材料に対する研究はその端緒にあると言えよう(例えば、矢富ら<sup>12)</sup>)。しかしながら、ひずみ硬化型構成式を用いて軟化現象を説明することに完全に成功したわけではない。確かに、ひずみ軟化現象が不均一な変形によるとする考えは理解できるが、地盤材料の場合にはとくに、構造骨格の破壊による劣化(強度低下、損傷)が軟化現象に寄与することを否定することはできない。したがって一般に、非弾性変形は変形の局所化を伴うこと、また材料の変形は本質的に構造の変化を伴うことを理解すれば、ひずみ軟化現象は変形の局所化と材料自体の軟化双方に起因すると考えるのが合理的である。

本論文は、このような考え方に立って、ひずみ硬化-軟化挙動を記述できる弾塑性構成式を導き、堆積軟岩(凝灰岩)への適用性を検討したものである。ここに提案する構成式は、Valanis<sup>13)</sup>の意味における解の一意性の条件を満たすから、解の一意性の議論<sup>14)</sup>に沿って、すなわち、増分型構成式の剛性が正定値になるように解析することで、解析は容易になる。解析については別途報告する予定であるが、有限要素解析では、解のメッシュサイズ依存性も小さいなど優れた特徴を有している。なお、すでにOka & Adachi<sup>15)</sup>は堆積軟岩に対し、またOkaら<sup>16)</sup>は鋭敏粘土に対するひずみ軟化型構成式をそれぞれ求めているが、本研究では弾性境界面を新たに導入して、最大強度点以降の除荷条件を明確にすることでより一般化された構成式を誘導した。

## 2. ひずみ軟化挙動と構成式誘導の方針

構成式を誘導するに先立ち、ひずみ軟化挙動の解釈と構成式誘導の方針を示す。Fig.1はひずみ硬化-軟化を呈する応力-ひずみ曲線を模式的に描いたものである。そこで、材料強度の発現は、摩擦によるものとそれ以外

\* 正会員 工博 京都大学教授 京都大学工学部交通土木工学科  
(〒606 京都市左京区吉田本町)

\*\* 正会員 工博 岐阜大学教授 岐阜大学工学部土木工学科

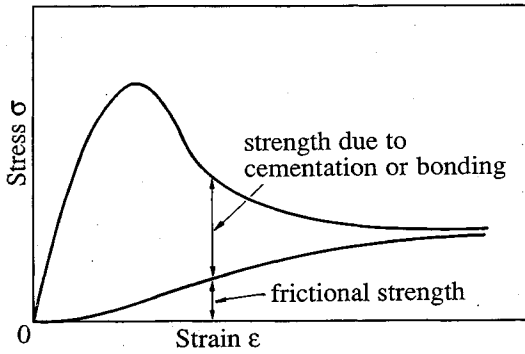


Fig.1 Schematic diagram of stress-strain relation with strain softening

の粘着力、セメンテーションや粒子のかみあわせなどによる二つから成っていると考える。さて、せん断過程において、ひずみが比較的小さい間は、摩擦による強度成分は小さく粘着力やセメンテーションなどによる成分が支配的であるが、ひずみが増大するに従い、粘着力やセメンテーションに基づく強度の発現は解除され摩擦による強度の発現が卓越すると考える。これは、岩石の破壊過程の説明に Kovari<sup>17)</sup>が用いたブロックモデルと類似の考えである。すなわち、ひずみ軟化過程は、粘着力、セメンテーション、粒子のかみあわせ等による強度成分が解放され、摩擦による強度成分が増大する過程であると考えられる。そこで、本論文においては、ひずみ硬化-軟化型構成式において重要な役割を果たす摩擦による強度成分 (Fig.1における Frictional strength) を与える新たな状態量、応力履歴テンソル  $\sigma_{ij}^*$  を次節で導入する。

### 3. 堆積軟岩のひずみ軟化型弾塑性構成式

Oka<sup>18)</sup>は、実時間に対する応力履歴テンソルを用いて粘塑性構成式を提案したが、本論文では応力履歴テンソルをひずみの測度に適用することで、ひずみ軟化型構成式を誘導する。

#### (1) 固有ひずみ測度 $z$

まず、全ひずみ増分テンソル  $d\epsilon_{ij}$  は弾性ひずみ増分テンソル  $d\epsilon_{ij}^e$  と塑性ひずみ増分テンソル  $d\epsilon_{ij}^p$  の和であると仮定する。

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (1)$$

また、応力履歴テンソルの導入に必要な固有ひずみ測度  $z$  の増分  $dz$  を次式で定義する。

$$dz = (Q_{ijkl} d\epsilon_{ij} d\epsilon_{kl})^{1/2} \quad (2)$$

ここに、 $Q_{ijkl}$  は一般に4階のテンソルであるが、本研究では等方性体を対象とすることから、等方テンソルと仮定する。なお、 $Q_{ijkl}$  が材料固有のものであるから  $z$  を固有ひずみ測度と呼ぶが、以下簡単のため単にひずみ

測度と呼ぶことにする。

#### (2) 応力履歴テンソル $\sigma_{ij}^*$ と核関数 $K$

応力の全履歴  $\sigma_{ij}^*$  は現在の応力  $\sigma_{ij}$  と縮退応力履歴  $\sigma_{ij}^z$  との和集合である。したがって縮退応力履歴は全応力履歴から現在の応力を除いたものと定義づけ、連続体力学の表現法<sup>19)</sup>にならない次のように表す。

$$\sigma_{ij}^*(z-z') = [\sigma_{ij}(z), \sigma_{ij}^z(z-z')] 0 < z' \leq z \quad (3)$$

$$\sigma_{ij}^z(z-z') = [\sigma_{ij}(z-z')] 0 < z' \leq z \quad (4)$$

また、応力履歴テンソル  $\sigma_{ij}^*$  は縮退応力履歴  $\sigma_{ij}^z$  の汎関数で表わされると考える。

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^*(\sigma_{ij}^z(z-z')) \quad (5)$$

さらに、応力履歴テンソル  $\sigma_{ij}^*$  がひずみ測度  $z$  に関する縮退応力履歴テンソル  $\sigma_{ij}^z(z)$  の線形汎関数で与えられるとすれば、一般には次式で表わすことができる。

$$\sigma_{ij}^* = \int_0^z K(z-z') \sigma_{ij}(z') dz' \quad (6)$$

ここに、 $K$  は連続有界な核関数で  $\partial K / \partial z < 0$  とする。一般には  $K$  はテンソル量であるが、ここではスカラー量と仮定した。この仮定によって、応力履歴テンソル  $\sigma_{ij}^*$  は遠い過去の応力の値の影響が小さくなる。いわゆる減退記憶の原理を満足する。また、ここでは簡単のため広義積分の定理より、積分区間を  $0 \leq z' \leq z$  としている。

軟岩に対する核関数  $K(z)$  には次式の指数関数を、また式 (2) のひずみ測度  $z$  としては以下のような偏差ひずみ  $e_{ij}$  の不変量を採用することにした。

$$K(z) = \exp(-z/\tau) / \tau \quad (7)$$

$$dz = (de_{ij} de_{ij})^{1/2}$$

ここに、 $\tau$  は材料定数 (応力履歴パラメーター) である。したがって、応力履歴テンソル  $\sigma_{ij}^*$  は次式で与えられる。

$$\sigma_{ij}^* = \frac{1}{\tau} \int_0^z \exp(-(z-z')/\tau) \sigma_{ij}(z') dz' \quad (8)$$

この場合も、応力履歴テンソル  $\sigma_{ij}^*$  は減退記憶の原理を満足する。

Fig.2 は以上の議論を模式的に示している。すなわち、ひずみ測度  $z$  との関係として、(a) は現在の応力  $\sigma$  の変化過程 (履歴) を、(b) は積分に際しての重み付けに相当する核関数の変化 (過去のものほど値が小さい) を、(c) は核関数と応力の積の変化を、(d) は (c) の斜線部の面積に相当する応力履歴テンソル  $\sigma^*$  の変化をそれぞれ表わしている。(a) に示すように、現在の応力  $\sigma$  の変化過程においてピークを持ち、その後減少する場合でも、その影響は直ちに応力履歴  $\sigma^*$  に及ばず、応力履歴  $\sigma^*$  は単調に増加するのみである。

なお、 $\tau$  の値を小さくとるほど、現在の応力  $\sigma_{ij}$  に対する応力履歴テンソル  $\sigma_{ij}^*$  の発現の遅れは減少して、 $\tau$

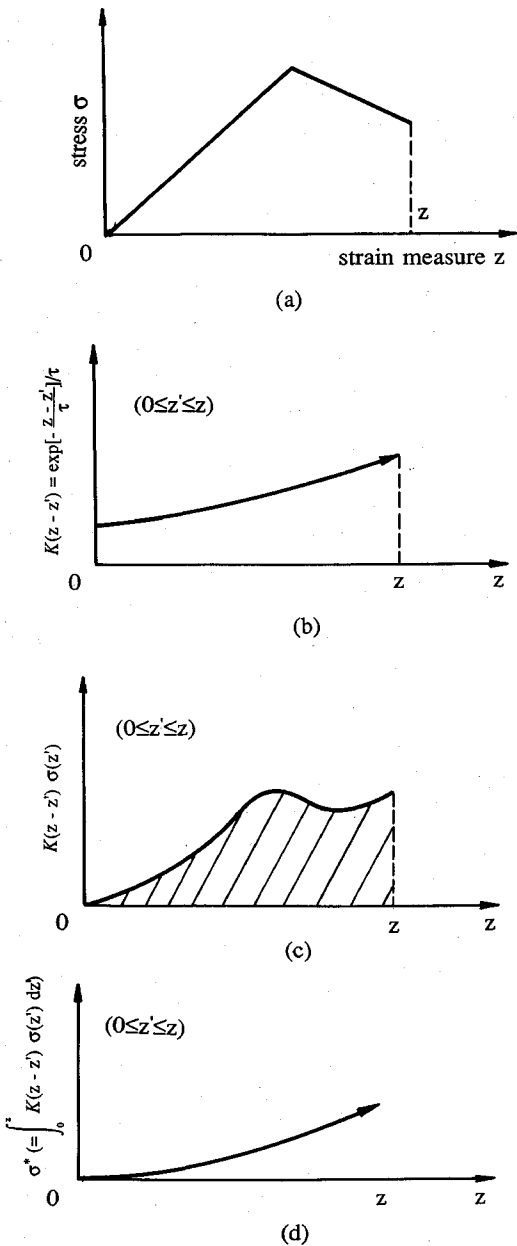


Fig.2 Schematic view of  $\sigma^*$  and kernel function K

=0 の場合には  $\sigma_{ij}^*$  は  $\sigma_{ij}$  に一致する。これは強度の発現が摩擦のみによるゆるい砂などの場合に対応する。

(3) 流動則と降伏関数

塑性ひずみ増分は降伏関数  $f_v$  と塑性ポテンシャル関数  $f_p$  が異なる、いわゆる非関連流動則により次式で与えられると仮定する。

$$d\epsilon_{ij}^p = H \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}^*} df_v \dots\dots\dots (9)$$

さて、降伏関数  $f_v$  は現在の応力  $\sigma_{ij}$  そのものには依存せ

ず、応力履歴テンソル  $\sigma_{ij}^*$  とひずみ硬化パラメータ  $\kappa$  のみの関数であると仮定する。

$$f_v(\sigma_{ij}^*, \kappa) = 0 \dots\dots\dots (10)$$

また、どのような負荷（応力の変化）に対して塑性ひずみが発生するかを規定する負荷基準を与えておく必要がある。この場合は、ひずみ硬化パラメータ  $\kappa$  を現在の値に固定した条件の下で、応力履歴テンソル  $\sigma_{ij}^*$  の変化に対応する降伏関数  $f_v$  の増分  $df_v$  が正であれば塑性ひずみが発生することになる。したがって負荷、中立負荷および除荷規準は以下のとおりである。

負荷： $f_v = 0$  で  $df_v [= (\partial f_v / \partial \sigma_{ij}^*) d\sigma_{ij}^*] > 0$  の時、

$$d\epsilon_{ij}^p \neq 0 \dots\dots\dots (11)$$

中立負荷： $f_v = 0$  で  $df_v = 0$  の時、

$$d\epsilon_{ij}^p = 0 \dots\dots\dots (12)$$

除荷： $f_v = 0$  で  $df_v < 0$  の時、

$$d\epsilon_{ij}^p = 0 \dots\dots\dots (13)$$

Adachi & Oka<sup>20)</sup> は応力比が一定に保たれる場合には弾性的に挙動し、応力比が変化する場合にはのみ塑性変形が発生すると仮定して、過圧密粘土の弾塑性構成式を誘導したが、軟岩に対する降伏関数  $f_v$  もこれに習って次式で与えられるものとする。

$$f_v = \eta^* - \kappa = 0 \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 $\eta^*$  は応力履歴テンソル  $\sigma_{ij}^*$  の以下に定義づけられる不変量で、応力履歴比とよぶ。

$$\eta^* = (S_{ij}^* S_{ij}^* / \sigma_m^{*2})^{1/2} \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 $S_{ij}^*$  は応力履歴テンソル  $\sigma_{ij}^*$  の偏差成分 ( $S_{ij}^* = \sigma_{ij}^* - \sigma_{kk}^* \delta_{ij} / 3$ ) であり、 $\sigma_m^*$  は等方成分 ( $\sigma_m^* = \sigma_{kk}^* / 3$ ) である。なお、 $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタ ( $i=j$  のとき  $\delta_{ij} = 1$ ,  $i \neq j$  のとき  $\delta_{ij} = 0$ ) である。式 (14) は、応力履歴比  $\eta^*$  が一定値を保つ限りにおいては塑性ひずみ増分  $d\epsilon_{ij}^p$  は生じないとする仮定である。また、先に述べたように  $\tau = 0$  の場合には  $\eta^* = \eta$  と現在の応力に関する降伏関数に帰着する。

(4) 弾性境界面

弾性状態にあるか弾塑性状態にあるのかの判別は負荷条件 (式 (13)) によって行う。すなわち、 $\eta^*$  が変化しない場合には、材料の応答は弾性的挙動としてモデル化されることになる。しかしながら、本研究では等方硬化の範囲内で定式化しているため、繰り返し載荷-除荷の場合、ひずみの変化にともない  $\eta^*$  は変化することになり、弾性的繰り返し載荷-除荷時の挙動を適切に表現できない。このような挙動を表現するためには、非線形硬化則あるいは移動硬化則を導入する必要があるが、ここでは等方硬化の範囲内で弾性的載荷-除荷挙動を表現するため、弾性境界面を以下のように導入する。

なお、式 (13) および以下の式 (16) によって定義づ

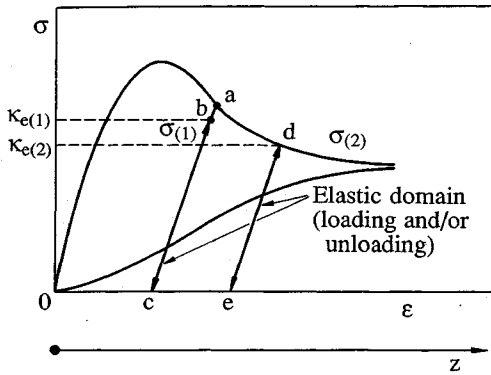


Fig.3 Elastic region

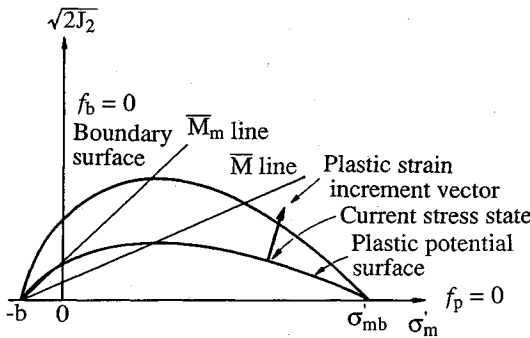


Fig.4 Plastic potential and overconsolidation boundary surface

けられる弾性領域においては、弾性ひずみ増分による応力履歴テンソルの変化はないと仮定し、弾性境界面内では  $\eta^*$  の値は凍結されるものとする。

このような弾性領域の判別基準として、現在の応力の関数としての弾性境界関数  $f_e$  を導入する。

$$f_e(\sigma_{ij}, \kappa_e) = 0 \dots \dots \dots (16)$$

ここでは、 $f_e$  降伏関数  $f_y$  と同じ関数形で与えられとし、 $f_e < 0$  の場合には状態が弾性領域にあると判定する。なお、Fig.3 に示すように点 b から弾性領域に入る場合  $\kappa_e$  は bc 間で変化しないが、点 a から点 d に向かう塑性ひずみ軟化の場合には  $f_e$  は縮小する。

(5) 塑性ポテンシャル関数と過圧密境界面

式 (9) の塑性流動則に従う場合、塑性ひずみ増分の各成分の割合を規定するのが塑性ポテンシャル関数である。本研究では、降伏関数  $f_y$  と異なり塑性ポテンシャル関数  $f_p$  は現在の応力  $\sigma_{ij}$  と材料の内部構造と対応する塑性ポテンシャルパラメータ  $L$  の関数であるとする。

$$f_p(\sigma_{ij}, L) = 0 \dots \dots \dots (17)$$

軟岩の塑性ポテンシャル関数は、先の研究<sup>20)</sup>を拡張することで、次式で与えられるものとする。

$$f_p = \bar{\eta} + \bar{M} \ln[(\sigma_m + b)/(\sigma_{mb} + b)] = 0 \dots \dots \dots (18)$$

ここに、 $\bar{\eta}$  は次式で与えられる応力比である。また  $b$

と  $\sigma_{mb}$  は Fig.4 に示す材料構造の数学的表現パラメータである。

$$\bar{\eta} = [S_{ij}S_{ij}/(\sigma_m + b)^2]^{1/2} \dots \dots \dots (19)$$

次に、塑性ポテンシャル関数の変化しうる限界を規定する過圧密境界関数  $f_b$  を導入する。すなわち、Fig.4 に示す過圧密境界面  $f_b$  の内側 ( $f_b < 0$ ) では材料は過圧密的挙動を、その外側 ( $f_b \geq 0$ ) では正規圧密的挙動をするという境界を与えるもので、軟岩に対しては次式で定義づけられるとする。

$$f_b = \bar{\eta} + \bar{M} \ln[(\sigma_m + b)/(\sigma_{mb} + b)] = 0 \dots \dots \dots (20)$$

ここに、 $\bar{M}_m$  はせん断過程において最大の体積圧縮ひずみが発生するときの  $\bar{\eta}$  の値である。このような過圧密境界関数  $f_b$  の導入により、式 (18) の  $\bar{M}$  は、過圧密領域 ( $f_b < 0$ ) においては、

$$\bar{M} = -\bar{\eta} / \ln[(\sigma_m + b)/(\sigma_{mb} + b)] \dots \dots \dots (21)$$

正規圧密領域では、

$$\bar{M} = \bar{M}_m \dots \dots \dots (22)$$

とそれぞれ与えられるものとする。なお、式 (21) から明らかなように、過圧密領域での  $\bar{M}$  は現在の応力状態  $\sigma_{ij}$  ならびに材料定数  $b$  と  $\sigma_{mb}$  を知れば自動的に決定される。

(6) ひずみ硬化パラメータ  $\kappa$

さて、ひずみ硬化-軟化型構成式を完結するためには、式 (14) のひずみ硬化パラメータ  $\kappa$  を与える必要がある。そこで、軟岩に対しては、塑性偏差ひずみテンソル  $e_{ij}^p$  の第二不変量  $\gamma^p$

$$\gamma^p = (e_{ij}^p e_{ij}^p)^{1/2} \dots \dots \dots (23)$$

を用いた、次の双曲線関数を適用する。

$$\kappa = \frac{M_f^* G' \gamma^p}{M_f^* + G' \gamma^p} \dots \dots \dots (24)$$

ここに、 $M_f^*$  は残留強度状態の  $\eta^*$  の値であり、 $G'$  は双曲線型ひずみ硬化関数の初期接線勾配である。

(7) ひずみ硬化-軟化型構成式

一般化された等方弾性体と仮定すると、弾性ひずみ増分  $de_{ij}^e$  は

$$de_{ij}^e = dS_{ij}/2G + d\sigma_m \delta_{ij}/3K \dots \dots \dots (25)$$

で与えられる。なお、ここに  $G$  はせん断弾性係数、 $K$  は体積弾性係数である。さて、塑性ひずみ増分  $de_{ij}^p$  は塑性載荷過程に対する Prager の適合条件 (e.g., Naghdi (1960)<sup>21)</sup>)

$$df_y = d(\eta^* - \kappa) = 0 \dots \dots \dots (26)$$

を式 (9) の流動則、式 (18) の塑性ポテンシャル関数および式 (24) のひずみ硬化パラメータと共に用いることで以下のように求まる。

$$de_{ij}^p = \Lambda \left[ \frac{\bar{\eta}_{ij}}{\bar{\eta}} + (\bar{M} - \bar{\eta}) \frac{\delta_{ij}}{3} \right] \cdot \left[ \frac{\eta_{kl}^*}{\eta^*} - \eta^* \frac{\delta_{kl}}{3} \right] \frac{d\sigma_{kl}^*}{\sigma_m^*}$$

$$\dots\dots\dots(27)$$

$$A = \frac{M_f^{*2}}{G'(M_f^* - \eta^*)^2} \frac{\gamma^p \bar{\eta}}{e_{mn}^p \bar{\eta}_{mn}} \dots\dots\dots(28)$$

ここに、 $\bar{\eta}_{ij} = S_{ij}/(\sigma_m + b)$ 、 $\eta_{ki}^* = S_{ki}^*/\sigma_m^*$ である。したがって、全ひずみ増分テンソル  $d\epsilon_{ij}$  は式 (1) に式 (25)、式(27) および式 (28) を用いることで与えられる。この構成式に含まれる材料定数は、 $G$  (せん断弾性係数)、 $K$  (体積弾性係数)、 $\tau$  (応力履歴パラメーター)、 $b$  および  $\sigma_{mb}$  (塑性ポテンシャルパラメーター)、 $M_f^*$  および  $G'$  (ひずみ硬化-軟化関数パラメーター) と  $\bar{M}_m$  (過圧密境界面パラメーター) の 8 個である。

4. 初期値問題の解の一意性

境界値問題に構成式を用いる場合、解に一意性があることは重要である。そこで、ひずみ軟化型構成式に関する初期値問題の解の一意性を検討しよう (Valanis<sup>13)</sup>, Willam et al.<sup>14)</sup>。

式 (8) の応力履歴テンソル  $\sigma_{ij}^*$  の増分は次式で表わされる。

$$d\sigma_{ij}^* = (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) dz / \tau \dots\dots\dots(29)$$

したがって、本構成式では全ひずみ増分テンソル  $d\epsilon_{ij}$  は次のように書き表わせる。

$$d\epsilon_{ij} = D_{ijkl} d\sigma_{kl} + A_{ij} dz \dots\dots\dots(30)$$

なお、式 (30) の右辺第 1 項  $D_{ijkl} d\sigma_{kl}$  および第 2 項  $A_{ij} dz$  は付録に示す。

さて、材料が Valanis<sup>13)</sup> の定義する正定値材料であれば解の唯一性が証明される。Valanis<sup>13)</sup> によると、“時刻  $t$  で解が唯一であるが、時刻  $t + \Delta t$  ではひずみ速度と応力速度各々に 2 つの解が存在するものと仮定して、それぞれの解の差が次の不等式を満足すれば、その材料は正値材料 (Positive material) と呼ばれ、2 つの解が存在するという仮定は正しくなく、時刻  $t + \Delta t$  で解は唯一であると言うものである” なお、ここで速度の解に差があると仮定した点に留意されたい。

$$\Delta \dot{\epsilon}_{ij} \Delta \dot{\sigma}_{ij} > 0 \dots\dots\dots(31)$$

ここで、 $\Delta \dot{\epsilon}_{ij}$  は二つの解のひずみ速度の差を、また  $\Delta \dot{\sigma}_{ij}$  は応力速度の差を表わしている。なお、 $\cdot$  は時間微分を表わしている。

式 (30) より、

$$\Delta \dot{\epsilon}_{ij} \Delta \dot{\sigma}_{ij} dt / dz = (\dot{\sigma}_{ij(1)} - \dot{\sigma}_{ij(2)}) D_{ijkl} (\dot{\sigma}_{kl(1)} - \dot{\sigma}_{kl(2)}) dt / dz \dots\dots(32)$$

が求まる。なお、ここに  $A_{ij} dz$  の項は時刻で  $t$  での解の唯一性から、2 つの解で等しいため、これに対する項は消失していることに注意したい。式 (32) において、 $dt/dz > 0$  であり、 $D_{ijkl}$  は正定値であるから式 (31) が成立する。このように、本提案構成式は Valanis の意味で解の唯一性が証明される。したがって、本構成式を有

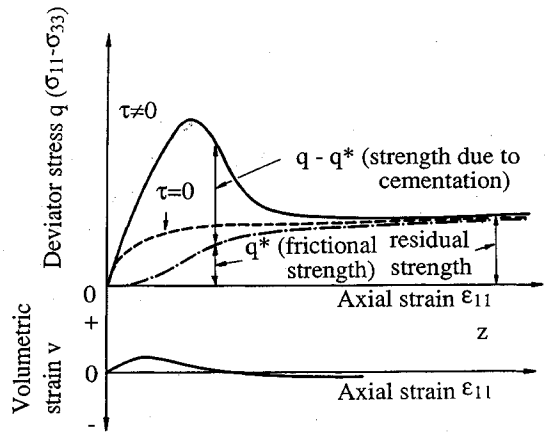


Fig.5 Schematic diagram of stress-strain relations predicted by the proposed model

限要素解析等に適用するとき、式 (30) の形で構成式を用いれば解の一意性を満足する。

5. 堆積軟岩の三軸排水試験結果のシミュレーション

堆積軟岩 (大谷石) の三軸排水試験結果のシミュレーションを行う前に、本構成式の特徴を説明しよう。

Fig.5 は解析例の模式図であり、変形とともに軸ひずみ  $\epsilon_{11}$  (ひずみ測定  $z$ ) は単調に増加するが、 $\tau \neq 0$  の場合には応力  $q$  は変形の初期に増加し、ピークに達した後減少して残留応力値に落ち着く。この間、応力履歴テンソルに対応する  $q^*$  は応力  $q$  がピークに達するまではその増加率が小さいが、その後増加は急になって最終的には残留応力に漸近する。したがって、変形初期に  $(q - q^*)$  は増加するが、ピーク後に減少に転じ最終的には 0 となる。ところが、 $\tau = 0$  の場合には応力  $q$  と応力履歴  $q^*$  とは一致して応力-ひずみ関係はピークを持たない双曲線型となる。すでに  $q^*$  は摩擦による強度成分、 $(q - q^*)$  は摩擦以外の粘着力やセメンテーション等に起因する強度成分と見なせると述べたが、 $\tau = 0$  の場合には正規圧密粘土・ゆる詰め砂・高拘束圧下の軟岩等の挙動を、 $\tau \neq 0$  の場合には過圧密粘土・密詰め砂・低拘束圧下の軟岩等の挙動を表現できることも理解できる。なお、ひずみ軟化の程度は  $\tau$  の値で変化できることは明らかである。

さて、Fig.6~Fig.9 は足立・小川<sup>22)</sup> による堆積軟岩 (大谷石) の三軸排水試験結果と本構成式によるシミュレーション結果を比較した図である。すべて図の (a) は軸差応力  $q$ -偏差ひずみ  $e_{11}$  関係を、(b) は体積ひずみ-偏差ひずみ関係を与えている。なお、図中の例えば CD-1 の CD は圧密排水 (consolidated drained) を、1 は側圧が  $1 \text{ kgf/cm}^2$  であることを意味している。

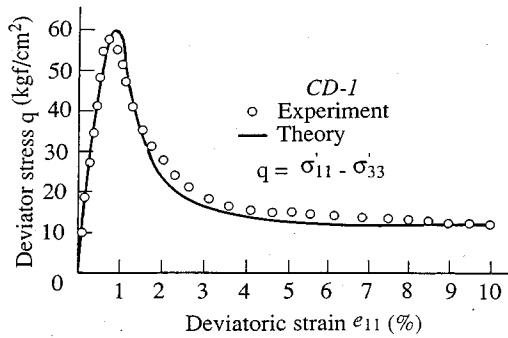


Fig.6(a) Relationship between deviator stress and deviatoric strain

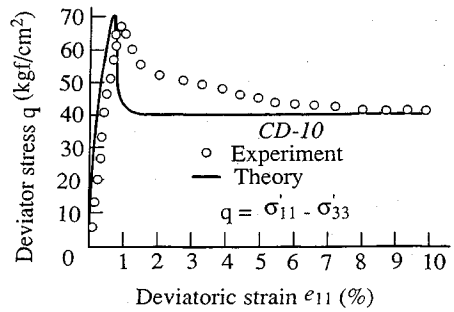


Fig.8(a) Relationship between deviator stress and deviatoric strain

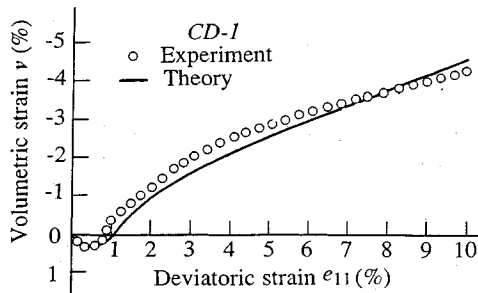


Fig.6(b) Relationship between volumetric strain and deviatoric strain

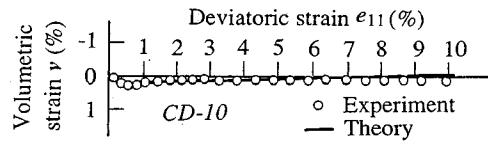


Fig.8(b) Relationship between volumetric strain and deviatoric strain

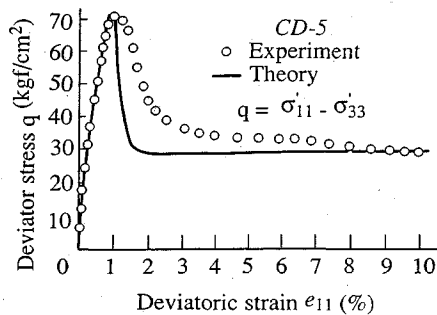


Fig.7(a) Relationship between deviator stress and deviatoric strain

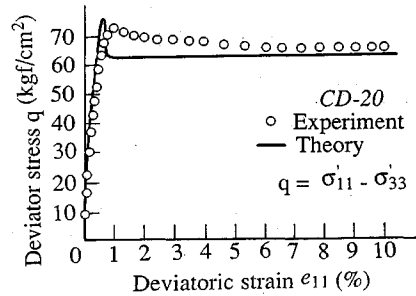


Fig.9(a) Relationship between deviator stress and deviatoric strain

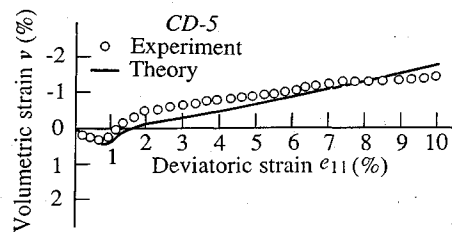


Fig.7(b) Relationship between volumetric strain and deviatoric strain

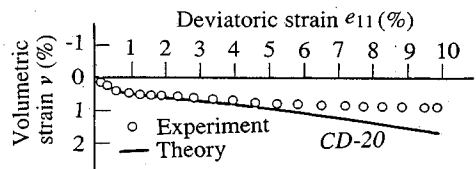


Fig.9(b) Relationship between volumetric strain and deviatoric strain

序論で述べたように、ひずみ軟化が変形の局所化をと  
もなうことはよく知られている。ここでの大谷石の実験  
でも、変形ともなう変形の局所化が観察されている。  
しかしながら、本研究における構成式によるシミュレー  
ションはこのような局所化を巨視的にみて均質な連続体  
に置き換えて行っている。理想的には、三軸試験の状態  
を有限要素法を適用して解析し、繰り返しの局所

Table 1 Material parameters for soft rock

Test No.	CD-1	CD-5	CD-10	CD-20
$\sigma_{m0}$ (kgf/cm <sup>2</sup> )	1.0	5.0	10.0	20.0
$e_0$	0.72	0.72	0.72	0.72
$\nu$	-0.108	0.119	0.144	0.0323
$E$ (kgf/cm <sup>2</sup> )	13500	10410	13500	16500
$K$ (kgf/cm <sup>2</sup> )	3700	4550	5260	5880
$M_f^*$	1.97	1.61	1.42	1.26
$G'$	1000	3000	5000	10000
$b$ (kgf/cm <sup>2</sup> )	12	30	40	40
$\sigma_{mb}$ (kgf/cm <sup>2</sup> )	150	150	150	150
$\tau$	0.09	0.019	0.007	0.0025

$\sigma_{m0}$  : Initial Mean Effective Stress  
 $e_0$  : Initial Void Ratio  
 $\nu$  : Poisson Ratio  
 $E$  : Initial Young's Modulus  
 $K$  : Initial Elastic Bulk Modulus  
 $M_m = M_f^*$

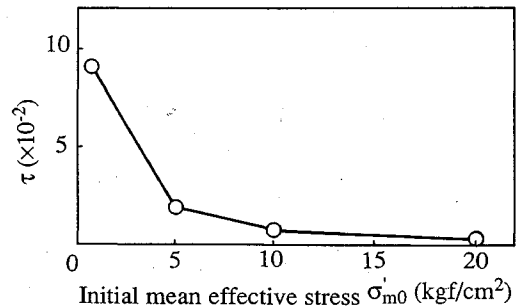


Fig.10 Parameter  $\tau$  versus initial mean effective stress

的なパラメータを決定する方法もとりうるが、測定量が巨視的な量に限られていることや境界条件の決定の複雑さもあり、ここでは、局所化の立場をとってはいない。

Table 1 に理論計算に用いた構成式の材料定数を与えるが、それらは以下のように決定した。まず、せん断弾性係数  $G$  とポアソン比  $\nu$  は、Fig.6~Fig.9 (a) および (b) それぞれの曲線の初期接線勾配  $\Delta q/\Delta e_{11}$  と  $\Delta \nu/\Delta e_{11}$  を次式に用いて決定される。

$$G = \Delta q / 3\Delta e_{11},$$

$$\nu = (2\Delta \nu / \Delta e_{11} - 3) / (\Delta \nu / \Delta e_{11} + 3) \dots\dots\dots (33)$$

したがって、ヤング率  $E$  と体積弾性係数  $K$  は周知の次の関係式から容易に求まる。

$$E = 2(1 + \nu)G, K = E/3(1 - 2\nu) \dots\dots\dots (34)$$

つぎに、ひずみ硬化-軟化パラメータ  $M_f^*$  は残留強度状態での応力比から、 $G'$  は  $\tau=0$  の場合、すなわち一度軟化を受けた状態での応力-ひずみ曲線の初期接線勾配から求めるのが望ましいが、不可能な場合にはカーブフィティングにより決定する。過圧密境界パラメータ  $\bar{M}_m$  は最大体積圧縮状態の応力比で与えられ、また塑性ポテンシャルパラメータ  $b$  と  $\sigma_{mb}$  は大ひずみ領域におけるダイレイタンシー量を表現できるように決定する。最後に、応力履歴パラメータ  $\tau$  は応力-ひずみ曲線の試行によるカーブフィティングにより求める。このように、構成式の材料定数はすべて排水三軸試験結果から決定され、かつ提案構成式が応力-ひずみ関係およびダイレイタンシー挙動をよく表現できることは Fig.6~Fig.9 で明らかである。

材料強度の拘束依存性を検討することは強度の発現機構を明らかにする点からも大切である。Fig.10 は応力履歴パラメータ  $\tau$  と初期平均有効応力  $\sigma_{m0}$  との関係を与えているが、 $\tau$  は  $\sigma_{m0}$  の増加とともに減少している。こ

れは拘束圧の増加によってひずみ軟化の割合が減少することに対応している。換言すれば、応力履歴パラメータ  $\tau$  はひずみ軟化の程度を表わし、強度の発現機構に関係するパラメータであることが明らかである。

最後に、Table 1 の CD-1 のポアソン比  $\nu$  が負の値をとることに若干の説明を与えておく。この値は弾性体理論で許容される  $-1 < \nu < 0.5$  の範囲にあるが、地盤材料で負の値を与えることは皆無に近い。そこで、次のように解釈することにした。本論文では、全ひずみを単純に弾性成分と塑性成分の和としたが、厳密には弾性成分をさらに材料の構造に関する成分とそれに独立な成分に分けるのが妥当であろう。すなわち、材料の構造変化に関する弾性係数としてのポアソン比は負であるが、それに独立な挙動に関するポアソン比は正であり、その和としてここでのポアソン比が与えられるとするものである。これは、損傷力学<sup>23)</sup>の考えにも合致するもので、すでに Oka ら<sup>16)</sup>は不攪乱粘土の構成式を弾性成分を二つに分ける定式化により提案している。

## 6. 結 論

本研究で得られた主な結論は以下のとおりである。

- 1) 応力履歴テンソルを導入し、ひずみ硬化-軟化挙動を表現できる堆積軟岩の弾塑性構成モデルを導いた。本構成モデルは軟化過程においても、載荷-除荷の判定を明確にできるものである。
- 2) 提案モデルは、Valanis<sup>13)</sup>の意味での初期値問題に対する解の一意性を満足するものであって、有限要素解析等に適用する際には他にない長所である。
- 3) 本構成式を堆積軟岩(大谷石)に適用した結果、せん断過程における応力-ひずみ関係ならびにダイレイタンシー挙動をよく表現できることを明かにした。

## 付 録

$A_{ij}$  は以下のように与えられる。

$$A_{ij} = \frac{M_f^{*2}}{G'(M_f^* - \eta^*)^2} \frac{\gamma^p \bar{\eta}}{e_{mn}^p \bar{\eta}_{mn}} \times \left[ \frac{\bar{\eta}_{ij}}{\bar{\eta}} + (\bar{M} - \bar{\eta}) \frac{\delta_{ij}}{3} \right]$$



$$\left[ \frac{\eta_{kl}^*}{\eta^*} - \frac{\delta_{kl}}{3} \right] \times [(\sigma_{kl} - \sigma_{kl(0)}) - \sigma_{kl}^*] \frac{1}{\tau \sigma_m^*}$$

次に,  $D_{ijkl}d\sigma_{kl}$  は以下のようである.

$$D_{ijkl}d\sigma_{kl} = \frac{d\sigma_{ij}}{2G} - \frac{\lambda d\sigma_{kk}}{2G(3\lambda + 2G)} \delta_{ij}$$

ただし,

$$\lambda = K - \frac{2}{3}G$$

参考文献

- 1) Höeg, K. : Finite element analysis of strain softening clay, J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, 98, SM-1, pp.43~58, 1972.
- 2) Kawahara, M., Kanoh, Y., Kaneko, N. and Yada, K. : Strain-softening finite element analysis of rock applied to tunnel excavation, Proc. Int. Symp. on Weak Rocks, Tokyo, pp.713~719, 1981.
- 3) Matumoto, T. and Ko, H.Y. : Finite element analysis of strain-softening soils, Proc. 4th Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, 1, pp.213~222, 1982.
- 4) Lo, K.Y. and Lee, C.F. : Stress analysis and slope stability in strain-softening soils, Géotechnique, 23, pp.1~11, 1973.
- 5) Nayak, G.C. and Zienkiewicz, O.C. : Elasto-plastic stress analysis, A generalization for various constitutive relations including strain-softening, Int. J. Num. Anal. Methods in Geomechanics, 5, pp.113~135, 1972.
- 6) Banerjee, P.K. and Stipho, A.S. : An elasto-plastic model for undrained behavior of heavily over-consolidated clays, Short Communication, Int. J. Num. Methods in Geomechanics, 3, pp.97~103, 1979.
- 7) Riks, E. : The application of Newton's methods to the problem of elastic stability, J. Appl. Mech., ASME, 39, pp.1060~1066, 1972.
- 8) Bazant, Z.P. and Pijaudier-Cabot, G. : Non-local continuum damage, localization, instability and convergence, J. Appl. Mech., ASME, 55, pp.287~293, 1988.
- 9) Aifantis, E.C. : On the microstructural origin of certain inelastic models, Trans. ASME, J. Mat. Eng. Tech., 106, pp.326~330, 1984.
- 10) Read, H.E. and Hegemier, G.P. : Strain-softening of rocks, soils and concrete-A review article, Mech. Mater., 3,4, pp.271~294, 1984.
- 11) Sandler, I.S. : Strain-softening for static and dynamics problems, Proc. Symp. on Constitutive Equations ; Macro and Computational Aspect ASME, Winter Annual Meeting, ed. by William, K.J., pp.217~231, 1986.
- 12) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A. and Sano, I. : General theory of shear bands formation by a non-coaxial Cam-Clay Model, Soils and foundations, 29, 3, pp.41~53, 1989.
- 13) Valanis, K.C. : On the uniqueness of solution of the initial value problem in softening materials, J. Appl. Mech., ASME., 52, pp.649~653, 1985.
- 14) Willam, K.J., Pramonon, E. and Sture, S. : Stability and uniqueness of strain-softening computations, Finite Element Methods for Non-Linear Problems, Europe-US Symposium, Trondheim 1985, Springer, pp.119~142, 1986.
- 15) Oka, F. and Adachi, T. : An elasto-plastic constitutive equation of geologic materials with memory, Proc. 5th Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, 1, pp.293~300, 1985.
- 16) Oka, F., Leroueil, F. and Tavenas, F. : A constitutive model for natural soft clay with strain softening, Soils and Foundations, 29, 3, pp.54~66, 1989.
- 17) Kovari, K. : Rock mass behaviour and its mathematical modeling, Numerical Methods in Geomechanics, ed. by Martin, J.B., Nato Advanced Study Institute Series, D. Reidel Pub. Co., pp.145~164, 1982.
- 18) Oka, F. Elasto/viscoplastic constitutive equations with memory and internal variables, Computers and Geotechnics, 1, pp.59~69, 1985.
- 19) (e.g.) Eringen, A.C. : Mechanics of Continua, J. Wiley, Chapter 9, 1967.
- 20) Adachi, T. and Oka, F. : Constitutive equations for sands and over-consolidated clays, Int. Work Shop on Constitutive Relations for Soils, Grenoble, Balkema Pub. Co., pp.111~122, 1984.
- 21) Naghdi, P.M. : Stress-strain in plasticity and thermoplasticity, Proc. 2nd Symp. on Naval Structural Mechanics, Pergamon Press, pp.121~169, 1960.
- 22) 足立紀尚・小川豊和 : 堆積軟岩の力学特性と破壊規準, 土木学会論文報告集, 295, pp.51~63, 1980.
- 23) (e.g.) Chaboche, J.L. : Continuum damage mechanics ; Part 1-general concept, ASME J. Appl. Mech., 55, pp.59~64, 1988.

(1990.10.1 受付)

An Elasto-Plastic Constitutive Model for Soft Rock with Strain Softening

Toshihisa ADACHI and Fusao OKA

Dense sands, overconsolidated clays and soft rocks show strain-hardening and strain-softening behavior in a certain range of confining pressure. The aim of the present paper is to construct a constitutive model of soft rocks that can describe not only strain-hardening but also strain-softening behavior. The constitutive model is derived by introducing a stress history tensor. The derived constitutive model is examined by comparison of the calculated results with experimental results of sedimentary soft rock (porous tuff). In addition, the applicability of the model to numerical analyses is discussed in relation to the uniqueness of the solution in an initial and boundary value problem.