

**投稿論文** (和文ノート)

**TECHNICAL**

**NOTE**

# 不均質帯水層における透水試験結果の不確定性

原田守博\*・高木不折\*\*

透水試験の結果が大きく変動する原因として帯水層の不均質性を取り上げ、定常揚水試験による透水係数値の不確定性とその構造を、水理学および確率論的立場から検討した。とくに、帯水層の実際の透水性の空間分布を定常確率場の実現値と見なすことにより、揚水試験値の分散を地下水位の統計的特性に基づいて理論的に定式化し、試験の規模、とくに観測井の設置距離の違いによる試験結果の信頼性への影響評価を試みた。

**Keywords :** field permeability test, heterogeneity, stationary random field, head variance, observation well

## 1. 序 論

広域地下水の解析や建設工事に係わる地下水の検討では、対象とする地盤の透水性に関する情報を集めるために、揚水試験や単孔式現場透水試験など各種の透水試験が行われる。しかしながら、これらの試験から得られる透水係数は、通常、近接した地点であってもオーダーが異なるほど変動することが多く<sup>1)</sup>、平均的な透水性ですら捉え難いことがしばしばである。一般に、多数の地点で透水試験を行ったとき、対象地域がたとえ地質学的には一様と見なされる地層であっても、試験結果は全体として対数正規分布に従うことが知られている<sup>1), 2)</sup>。たとえば、Freeze<sup>3)</sup>はコアを用いた室内透水試験について、Delhomme<sup>4)</sup>は井戸を用いた揚水試験について、一つの地域内で数多く行った試験結果が対数正規性をもちながら変動することを、様々な調査地域に対して示している。

このように透水試験結果が大きくばらつく原因の一つとしては、実際の地盤そのものに基本的に測定しえない不均質性が存在しているためであると考えられる。すなわち、実際の帯水層は大きなスケールではみかけ上一様に見えても、局所的なスケールでは場所場所で少しずつ性質の異なる構成要素から成り立っているために、透水試験を同一の手法で行ったとしても、試験結果は測定地点によって異なってくるものと考えられる。ましてや、透水試験の方法や試験規模が異なる場合には、試験による透水係数は相当に変動するであろうと推察される。

こうした不均質な帯水層における透水試験結果の不確定性は、具体的には以下のように分類できる。

- 1) 試験方法の差異によるもの
- 2) 試験規模の差異によるもの

### 3) 試験そのものの不備によるもの

これらのうち、3)は試験装置の動作不良や計測誤差等を指すので、ここでは考慮の対象から外すことにする。また、井戸枠の抵抗等についても考慮しないことにする。1)と2)は互いに無関係ではなく、実際には試験方法によって、想定される試験規模(ダルシー則を適用する空間距離)の概略はおのずと決まってくる。たとえば、室内透水試験ならば試料のサイズから試験規模は $10^{-1}$  mのオーダー、単孔式透水試験ならばその代表スケールとして $10^0$  mのオーダー、揚水試験ならば観測井までの距離として $10^1 \sim 10^2$  mのオーダーが試験規模となろう。しかし詳しくみれば、揚水試験を例に挙げてもわかるように、観測井を揚水井からどれだけ離して何本設置するかの判断は試験の実施者に委ねられており、実際には現場の状況や試験コストを考慮して適宜、試験規模を決定しているのが実情である。従来、こうした場合における試験結果の信頼性と試験規模との関係については論じられたことがなく、観測井までの距離によって試験結果の信頼性がどの程度変動するかは未知である。もし、試験規模が試験結果の信頼性に大きな影響を及ぼすのであれば、観測井の望ましい設置距離を明確にすることは工学的にきわめて重要な課題となる。

本研究では、こうした問題に取り組む第一歩として、比較的単純な定常揚水試験を取り上げ、試験規模、とくに観測井の設置距離の違いによる透水試験結果の信頼性の変動について、水理学ならびに確率論の立場から理論的な検討を試みた。

## 2. 定常揚水時の水位状態の統計的構造

本研究の対象とする流れ場は、透水性などの水理特性が空間的にランダムに分布した、水平2次元被圧帯水層である。いま図-1のように、帯水層から井戸によって定期的に揚水を行い、水位観測値から帯水層の透水係数を

\* 正会員 工博 名城大学助手 理工学部土木工学科  
(〒468 名古屋市天白区塩釜口1-501)

\*\* 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科

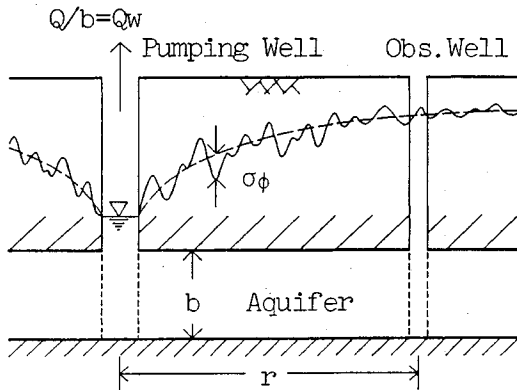


図-1 不均質帯水層からの定常揚水

知ろうとするとき、観測井の水位が場の不均質性のために確率的に変動すると考えれば、結果として得られる透水係数値にも不確定性が生じることになる。そこで本章では、透水試験の不確定性評価に先立って、場の不均質性に起因した水位分布の統計的変動成分を定式化する。

ダルシー則と質量保存則を基礎として得られる2次元定常地下水流の支配方程式は、よく知られているように、

$$\nabla^2 \phi(x) + \nabla Y(x) \cdot \nabla \phi(x) = -e^{-Y(x)} Q(x) \dots (1)$$

ここに、 $\phi(x)$  : 位置ベクトル  $x$  における地下水位、 $Y(x) (= \ln K(x))$  : 透水係数  $K(x)$  の対数変換値、 $Q(x)$  : 単位層厚当りの揚水強度、 $\nabla = \partial/\partial x + \partial/\partial y$  である。

帯水層の不均質性として、透水係数は対数正規性をもって空間的に小さく確率変動するものとし、 $Y(x)$  を統計的に定常な確率場と与える。そして  $Y$  の変動に応じて地下水位も平均値分布の廻りで変動している場を想定する。すなわち  $Y(x)$  と  $\phi(x)$  は、平均値を  $Y_0, \phi_0(x)$  として、

$$Y(x) = Y_0 + Y_1(x) \quad (Y_0 = \text{const.}) \dots (2)$$

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \phi_1(x) \dots (3)$$

ただし、 $|Y_0| \gg |Y_1|$ 、 $|\phi_0| \gg |\phi_1|$  とする。これらの条件のもとで、基礎式 (1) を無限領域において解くことを考える。 $\phi_0(x)$  および  $\phi_1(x)$  の近似解は、グリーン関数  $G(x, x')$  を用いて次式で与えることができる。

$$\phi_0(x) = \int e^{-Y_0} Q(x') G(x, x') dx' \dots (4)$$

$$\phi_1(x) = \int [\nabla Y_1(x') \cdot \nabla \phi_0(x')] G(x, x') dx' - \int e^{-Y_0} Y_1(x') Q(x') G(x, x') dx' \dots (5)$$

なお、ここでは揚水強度  $Q(x)$  は確定的なものとする。

いま、揚水井が一か所のみ存在するとすれば、 $Q(x)$  の空間分布は、次式 (6) のようにデルタ関数を用いて表現することができ、式 (4) は式 (7) のように書き

直される。

$$Q(x) = Q_w \delta(x - x_w) \dots (6)$$

$$\phi_0(x) = Q_w e^{-Y_0} G(x, x_w) \dots (7)$$

ここに、 $Q_w$  : 揚水強度、 $x_w$  : 揚水井の位置ベクトル、 $\delta$  : ディラックのデルタ関数である。式 (7) を式 (5) に代入し部分積分を行えば、 $\phi_1$  として次式が導かれる。

$$\phi_1(x) = -Q_w e^{-Y_0} \int Y_1(x') \nabla G(x, x') \cdot \nabla G(x_w, x') dx' \dots (8)$$

ここで、 $Y_1$  の分散を  $\sigma_Y^2$ 、 $Y_1$  の空間相関関数を  $\rho_Y$  とおけば、 $E[Y_1(x') Y_1(x'')] = \sigma_Y^2 \rho_Y(x', x'')$  であるから、水位  $\phi_1(x)$  の分散は次式で表すことができる。

$$\sigma_{\phi_1}^2(x) = E[(\phi_1(x))^2] = Q_w^2 e^{-2Y_0} \sigma_Y^2 \int dx' \int dx'' \rho_Y(x', x'') \cdot [\nabla G(x, x') \cdot \nabla G(x_w, x')] [\nabla G(x, x'') \cdot \nabla G(x_w, x'')] \dots (9)$$

さらに、 $Y_1$  の空間相関が小さく、 $\rho_Y$  が任意の距離  $\lambda$  に対して  $\rho_Y(\lambda) \approx A_Y \delta(\lambda)$  と white noise 近似できる場合には、上式は次のように簡単化される。

$$\sigma_{\phi_1}^2(x) = Q_w^2 e^{-2Y_0} \sigma_Y^2 A_Y \int [\nabla G(x, x') \cdot \nabla G(x_w, x')]^2 dx' \dots (10)$$

ここに、 $A_Y$  :  $Y_1$  の自己相関関数  $\rho_Y$  の空間積分値である。さて、上式を具体的に演算するに当たり、対象とする現象が軸対称であるので、極座標系を用いることにする。いま、 $|x - x_w| = r$ 、 $|x' - x_w| = r'$ 、 $(x' - x_w) \cdot (x - x_w) = rr' \cos \theta$  とおけば、上式のグリーン関数  $G(x, x')$  は2次元ポテンシャル問題の基本解であるから、

$$G(x, x') = -\frac{1}{2\pi} \ln |x - x'| = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{1/2}} \dots (11)$$

と定義される。したがって、

$$\nabla G(x, x') \cdot \nabla G(x_w, x') = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{r \cos \theta - r'}{r'(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)}$$

であり、式 (10) は、

$$\sigma_{\phi_1}^2(r) = \frac{Q_w^2 e^{-2Y_0} \sigma_Y^2 A_Y}{(4\pi^2)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(r \cos \theta - r')^2}{r'(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^2} dr' d\theta \dots (12)$$

Dagan<sup>5)</sup> は、対象地点のごく近傍では  $|x - x'| \rightarrow 0$  となって積分が困難となるので、上式の  $r'$  方向の積分区間において  $r$  の前後  $I_Y$  の領域を除外することにより積分を実行し、水位分散に関する次の近似式を与えている。

$$\sigma_{\phi_1}^2(r) \approx \frac{Q_w^2 e^{-2Y_0} \sigma_Y^2 A_Y}{16\pi^3 r^2} \left[ \ln \left[ \frac{r}{r_w} \right] + \ln \left[ \frac{r}{I_Y} \right] + O(1) \right] \dots (13)$$

ここに、 $r_w$ ：揚水井の半径、 $I_Y$ ： $Y_1$ の空間相関の積分スケール ( $= \int \rho_Y(\lambda) d\lambda$ )、 $O$ ：微小項である。なお、上式は、 $\rho_Y$ をwhite noise近似したうえで、 $r \gg I_Y$ の領域を対象としたものであることを断わっておく。

3. 帯水層の不均質性に伴う揚水試験結果の不確定性

水平2次元被圧帯水層における定常揚水試験値  $\hat{K}$  は、一般にThiemの方法として知られているように、2本の観測井に対して次式で与えられる<sup>9)</sup>。

$$\hat{K} = \frac{Q_w}{2\pi S(r_1, r_2)} \cdot \ln \left[ \frac{r_2}{r_1} \right] \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 $S(r_1, r_2) = \phi(r_2) - \phi(r_1)$  であり、 $\phi(r_1)$ 、 $\phi(r_2)$ ：揚水井から距離  $r_1$ 、 $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ) に位置する2本の観測井の水位である。通常、観測井が1本の場合には、 $\phi(r_1)$  は揚水井の水位  $\phi(r_w)$  で代用される。

前述したように、透水試験結果は一般に対数正規分布に従うという事実に合わせて、上式を対数変換しておけば、

$$\hat{Y} = \ln \hat{K} = \ln \left[ \frac{\alpha}{S(r_1, r_2)} \right] = \ln \alpha - \ln S(r_1, r_2) \dots\dots\dots (15)$$

ここに、

$$\alpha = \frac{Q_w}{2\pi} \cdot \ln \left[ \frac{r_2}{r_1} \right] \dots\dots\dots (16)$$

観測井における水位  $\phi(r)$  は、式(3)で示したように、場が均質であったときの水位  $\phi_0(r)$  に加えて、不均質性に起因する変動成分  $\phi_1(r)$  を含んでいる。したがって、

$$S(r_1, r_2) = \phi_0(r_2) + \phi_1(r_2) - \{\phi_0(r_1) + \phi_1(r_1)\} = S_0(r_1, r_2) + S_1(r_1, r_2) \dots\dots\dots (17)$$

ここに、 $S_0 = (r_1, r_2) = \phi_0(r_2) - \phi_0(r_1)$ 、

$$S_1 = (r_1, r_2) = \phi_1(r_2) - \phi_1(r_1) \text{ である。}$$

いま、場が均質であったとき、すなわち  $S = S_0$  のときの揚水試験値 (の対数変換値) を  $\hat{Y}_0$ 、 $\phi_1$  に起因する試験値の変動成分を  $\hat{Y}_1$  とおけば、 $\hat{Y} = \hat{Y}_0 + \hat{Y}_1$  である。言うまでもなく、 $E[\phi] = \phi_0$ 、 $E[\phi_1] = 0$  であるから、 $\hat{Y}$  についても

$$E[\hat{Y}] = \hat{Y}_0, E[\hat{Y}_1] = 0 \dots\dots\dots (18)$$

が仮定できる。したがって、式(15)~(18)より

$$E[\hat{Y}] = \ln \alpha - E[\ln(S_0 + S_1)] = \hat{Y}_0 \dots\dots\dots (19)$$

一方、式(15)より  $\hat{Y}_0 = \ln \alpha - \ln S_0$  であるから、結局

$$E[\ln(S_0 + S_1)] = \ln S_0 \dots\dots\dots (20)$$

という関係が導かれる。

さて、揚水試験値  $\hat{Y}$  の統計的変動性について考えよう。 $\hat{Y}$  の分散  $\sigma_{\hat{Y}}^2$  は

$$\sigma_{\hat{Y}}^2 = E[(\hat{Y} - \hat{Y}_0)^2] = E[(\ln S_0 - \ln(S_0 + S_1))^2] \dots\dots\dots (21)$$

式(20)、(21)により、

$$\sigma_{\hat{Y}}^2 = E[(\ln(S_0 + S_1))^2] - (\ln S_0)^2 \dots\dots\dots (22)$$

テーラー展開により

$$\ln(S_0 + S_1) \approx \ln S_0 + \frac{S_1}{S_0} \dots\dots\dots (23)$$

であるから、

$$E[(\ln(S_0 + S_1))^2] \approx (\ln S_0)^2 + \frac{E[(S_1)^2]}{S_0^2}$$

上式中の  $E[(S_1)^2]$  は、水位分散  $\sigma_{\phi}^2(r)$  を用いて

$$E[(S_1)^2] = E[(\phi_1(r_2) - \phi_1(r_1))^2] = \sigma_{\phi}^2(r_1) + \sigma_{\phi}^2(r_2)$$

したがって、 $\hat{Y}$  の分散式(22)は次式で表される。

$$\sigma_{\hat{Y}}^2 \approx \frac{\sigma_{\phi}^2(r_1) + \sigma_{\phi}^2(r_2)}{S_0^2} \dots\dots\dots (24)$$

ところで、揚水試験値の期待値  $\hat{Y}_0$  は、流れ場が本来もっている透水係数の平均値  $Y_0$  に等しいはずであることを考慮すれば、式(15)より

$$\ln S_0 = \ln \alpha - \hat{Y}_0 = \ln \alpha - \ln(e^{Y_0}) \dots\dots\dots (25)$$

よって、式(24)、(25)により

$$\sigma_{\hat{Y}}^2 \approx \frac{e^{2Y_0}}{\alpha^2} \cdot (\sigma_{\phi}^2(r_1) + \sigma_{\phi}^2(r_2)) \dots\dots\dots (26)$$

上式は、定常揚水試験における観測井での水位分散  $\sigma_{\phi}^2$  と試験結果の不確定性  $\sigma_{\hat{Y}}^2$  との関係を与えるものであり、帯水層の不均質性は水位分散の形で  $\sigma_{\phi}^2$  に反映されている。上式によれば、観測井の位置  $r$  を固定したとき、 $\sigma_{\phi}^2$  と  $\sigma_{\hat{Y}}^2$  は互いに比例関係にあることがわかる。

いま、図-1のように、観測井が距離  $r$  の位置に1本のみ存在する場合を考えると、 $\phi(r_1)$  は揚水井の孔内水位  $\phi(r_w)$  に置き換えられるが、孔内水位は確定量、すなわち  $\sigma_{\phi}^2(r_w) = 0$  と考えられるから、式(26)は

$$\sigma_{\hat{Y}}^2 \approx \frac{e^{2Y_0}}{\alpha^2} \cdot \sigma_{\phi}^2(r) \dots\dots\dots (27)$$

となる。上式に、式(16)および、前述したDaganによる水位分散の近似式(13)とを代入すると、揚水試験値  $\hat{Y}$  の分散は次式のように求められる。

$$\sigma_{\hat{Y}}^2 \approx \frac{\sigma_Y^2 A_Y \ln(r^2/r_w I_Y)}{4\pi r^2 (\ln(r/r_w))^2} \dots\dots\dots (28)$$

ここに、 $A_Y$  と  $I_Y$  は  $Y_1$  の空間的相関性を特徴づけるもので、距離  $\lambda$  に対する  $Y$  の自己相関関数を

$$\rho_Y(\lambda) = \exp(-|\lambda|/I_Y) \dots\dots\dots (29)$$

とおくと、 $A_Y$ 、 $I_Y$  は次式で与えられる。

$$A_Y = 2\pi I_Y^2, I_Y = \sqrt{2} \cdot I_Y \dots\dots\dots (30)$$

式(28)は、地盤が本来もっている透水係数の不均質特性 ( $\sigma_Y$ 、 $I_Y$ ) のもとで、観測井までの距離  $r$  と定常揚水試験値  $\hat{Y}$  の分散との関係を与えている。この式で注目されることは、揚水強度  $Q_w$  や透水係数の平均値  $Y_0$

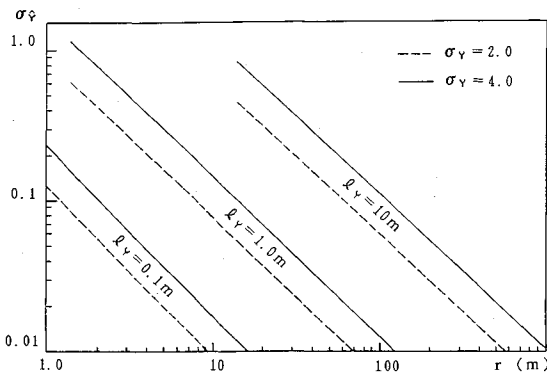


図-2 揚水試験結果の不確定性の試算

など、 $\sigma_p^2(r)$  や  $\alpha$  に含まれていた対象現象の平均的特性は互いに消去され、式中に現れていないことである。すなわち式 (28) は、不均質場での揚水試験の不確定性が、揚水量の大小や帯水層の透水性の良否には関係なく、場の不均質性  $\sigma_p^2$  の地下水位に及ぼす影響  $\sigma_p^2$  (式 (13)) を媒介として、同式のように表現されることを意味している。なお、観測井が2本の場合においても、 $\sigma_p^2$  として式 (13) を用いるならば、 $\sigma_p^2$  は式 (28) と同じ形式となる。

図-2は、式 (28) を用いて、種々の  $\sigma_Y$  と  $l_Y$  をもつ不均質地盤における試験値  $\hat{Y}$  の不確定性  $\sigma_r$  を求めたものである。これによると、たとえば  $\sigma_Y = 2.0$ 、 $l_Y = 1$  m のとき、 $\sigma_r$  は観測井距離  $r$  が数mのうちは0.2~0.5程度の値をとるが、 $r$  が增大するにつれて急速に減少して、試験結果はきわめて高い精度をもつようになることを示している。また、このとき試験値の不確定性  $\sigma_r$  の値は、帯水層本来の透水性の変動  $\sigma_Y$  に比べ、最大でも1オーダー以下であり、定常揚水の場合、試験結果のばらつきは大きな値にはならないことを示唆している。

#### 4. 結 語

本研究では、透水試験結果の変動原因として帯水層の

不均質性に着目し、確率論的立場から揚水試験の不確定性評価を試みた。その結果、場の不均質性がさほど大きくない状況下では、定常状態の揚水試験値の変動は、本来の透水性の不均質性に比べてさらに小さいことが明らかとなった。しかし、実務において多く行われる非定常な揚水試験の場合には、場の不均質性が試験結果に対しより大きく影響を及ぼすことが考えられる。今後、本研究で示した解析手法を非定常問題に対して押し進め、現実に生じている透水試験値の大きなばらつきがどのような誤差構造に依っているのかを明らかにしたいと考えている。

最後に、本文中の図面等の作成に際して、名古屋大学 学生 林 尚一郎君の協力を得た。記して謝意を表する。

#### 参 考 文 献

- 1) たとえば、原田守博・内田光一・高木不折：地下水流動モデルのパラメータ評価に関する一考察，第39回土木学会年次学術講演会概要集Ⅱ，pp.5~6，1984。
- 2) Dagan, G. : "Flow and Transport in Porous Formations", pp.160~163, Springer-Verlag, 1989.
- 3) Freeze, R.A. : A Stochastic-conceptual analysis of one-dimensional groundwater flow in nonuniform homogeneous media, Water Resour. Res., Vol.11, No.5, pp.725~741, 1975.
- 4) Delhomme, J.P. : Spatial variability and uncertainty in groundwater flow parameters : a geostatistical approach, Water Resour. Res., Vol.15, No.2, pp.269~280, 1979.
- 5) Dagan, G. : Stochastic modeling of groundwater flow by unconditional and conditional probabilities, 1. Conditional simulation and the direct problem, Water Resour. Res., Vol.18, No.4, pp.813~833, 1982.
- 6) たとえば、椿 東一郎：「水理学Ⅱ」，pp.255~256，森北出版，1974。

(1991.8.7 受付)

## STOCHASTIC EVALUATION OF UNCERTAINTY OF FIELD PERMEABILITY TEST IN HETEROGENEOUS AQUIFER

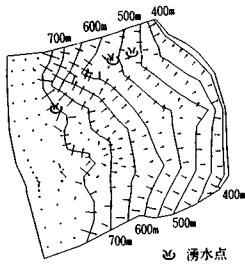
Morihiro HARADA and Fusetsu TAKAGI

This research aims to evaluate the uncertainty in field permeability test and its corresponding generation structure, from hydraulic and stochastic point of view. It is assumed that the randomness in the test results is caused by the heterogeneity of hydraulic properties in the aquifer. By considering the spatial distribution of the actual permeability as a stationary random field, the variance of permeability value tested is theoretically formulated in terms of the head variance under a steady pumping condition. This paper shows that the accuracy of the steady pumping test is extremely improved when the observation well is located far from the pumping well. This is because the variance of head at the observation well reduces rapidly.

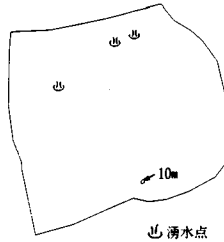
## あの地下水解析ソフトがさらに機能充実!

# UNISSF<sub>ユニセフ</sub>(V-2)

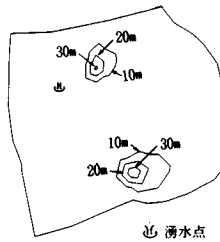
スピーディな同定・安価な解析



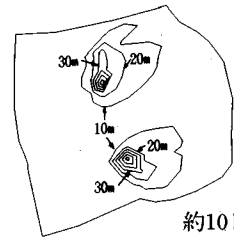
初期状態の地下水流



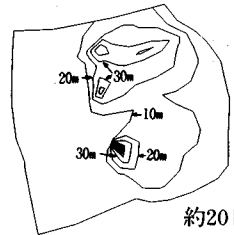
トンネル掘削開始直後



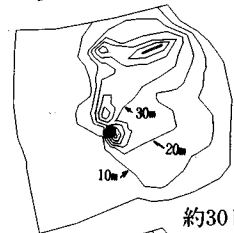
約4日後



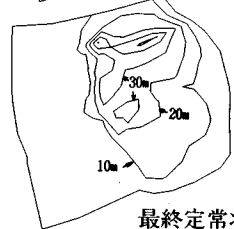
約10日後



約20日後



約30日後



最終定常状態

特長 ○有限要素法による準3次元解析を中心とした地下水の流れのトータルシステムです。

○観測水位と計算水位より、非線形最小二乗法を用いて帯水層定数の同定が可能です。(逆解析手法)

○建設・土木工事(掘削・ディープウェルその他)の解析に対応する多くの機能を備えています。

○メッシュ・ジュネレータにより、モデル(要素分割)作成の手間を軽減できます。

○図化処理プログラムにより、結果の確認が容易に行えます。

適応機種: SUN, NEWS, HP,

IBM 30XX, FACOM-Mシリーズ 他

このシステムは、情報処理振興事業協会の委託を受けて開発したものです。

## IPA 情報処理振興事業協会

株式会社CRC総合研究所 西日本支社

大阪市中央区久太郎町4丁目1-3  
(06)241-4121 営業担当: 岩崎

移流拡散解析プログラム

未来設計企業  
CRC

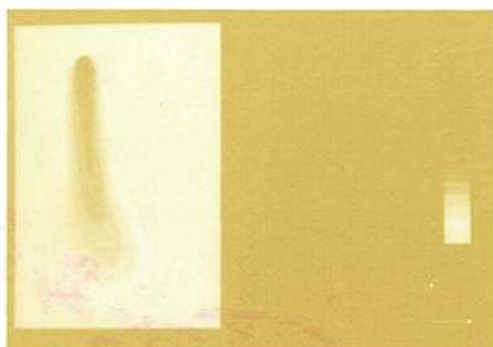
# MATRAN EX

塩水くさび  
農薬汚染  
廃棄物処理  
その他

飽和・不飽和浸透解析に、移流分散・拡散を考慮。  
EXtensiveな問題に適用可能なEXcellentなプログラム。

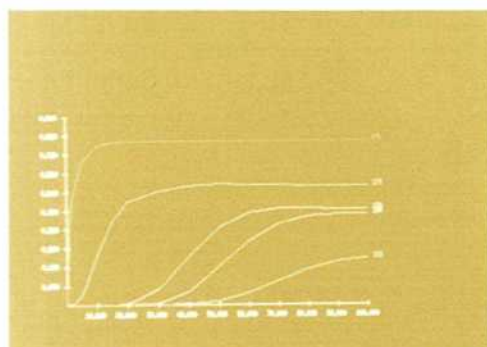
## プログラムの特長

- 断面(EXV)および平面(EXH)の解析が可能
- 充実した解析機能
  - 定常・非定常解析 (断面、平面)
  - 軸対称解析 (断面)
  - 降雨 (断面、平面)
  - 揚水・注水 (断面、平面)
- 豊富なグラフィック出力
  - 浸出面 (断面)
  - 材質変更 (断面、平面)
  - 境界条件の変更 (断面、平面)
  - 水位・濃度の経時変化 (断面、平面)



濃度コンター図

画面出力図



濃度の時間推移グラフ

画面出力図

株式会社CRC総合研究所 西日本支社

大阪市中央区久太郎町4丁目1-3  
(06)241-4121 営業担当：岩崎