

# 衝撃荷重を受ける弾性体の解析に対する剛体バネモデルの適用性

園田恵一郎\*・上林厚志\*\*

主として静的極限解析法の一つとして開発されてきた剛体バネ要素法に陽的時間積分法を適用して、弾性体の衝撃問題の一般値解析法を提案した。最初に、1次元弾性棒の縦衝撃の問題を取り上げ、解の精度と安定性を調べた。つぎに、はりの横衝撃の問題において、本解法と既往の解法の比較を行い、さらに、2次元弾性体の衝撃問題において、本解法による結果と2次元弾性論に基づく理論解との比較を行い、本解法の信頼性をあきらかにした。

**Keywords :** impact load, rigid body spring model, explicit time integration

## 1. まえがき

鉄筋コンクリート、および鋼とコンクリートの合成構造物に衝撃荷重が作用する問題、たとえば落石防護工への落石の衝突、あるいは原子炉等の重要構造物への航空機等の衝突などの問題は近年、非常に重要になってきた。それゆえ、これらの問題を対象とした、多くの実験的研究、および解析的研究が行われている。しかしながら、衝撃実験は特殊な載荷装置と高速の計測装置を用いなければならないことや実問題における衝撃荷重をシミュレートするのが難しいこと等、問題が多く、一般的な衝撃問題が十分明らかにされているとは言えない。

一方、衝撃問題の理論解析は固体内の応力伝播特性の究明に深く関係しており、無限や半無限弾性体に対する動弾性論に基づく研究は古くからあるが、種々の境界条件を持つ構造物の厳密な解析は非常に困難と言われている。また、衝撃問題に対する有限要素法の適用は、機械材料の分野で盛んに行われている<sup>1)</sup>。しかしながら、土木・建築の分野において重要なコンクリートの非線形性はひびわれやせん断すべり、鉄筋の付着特性などに支配され、機械材料とは大きく異なるので、前述のコードのコンクリート構造物への適用にはまだ解決せねばならない多くの問題を残している。

本研究の最終的な目的はコンクリート構造物の衝撃破壊特性の解明のための実用性の高い数値解析法の開発にある。ここでは主として静的極限解析のために開発された剛体バネ要素法<sup>2)</sup>を利用し、時間積分法には陽的差分法を用いた解法を展開している。剛体バネモデルは、コンクリートのひびわれ、せん断すべりや鉄筋の付着破壊というような不連続現象をバネの非線形特性で簡単に表

せる点に特徴を持つが、要素内変形を考慮していないために、複雑な弾性波の伝播特性が十分に表せるかどうか問題となると思われる。一方、時間積分法における陽解法は衝撃的な荷重の作用による短時間の過渡応答現象の解析には適していると思われるが、解の安定性や精度の面で検討が必要である。

本論文は剛体バネ要素法をコンクリート構造物の耐衝撃性解析に適用するための前段階の検討として、この方法の弾性体に対する適用性について調べたものである。なぜならば、連続体中の弾性応力波の伝播特性が精度良く表せるならば、この方法はコンクリート構造の耐衝撃解析にも有力であると考えたからである。すなわち、まず最初に、1次元問題である棒の弾性応力伝播解析において、時間増分間隔と解の安定性の関係ならびに質量の集中化 (lumped) に伴う応力波の乱れなどについて検討した。つぎに、はりの横衝撃問題の解析例を通して既存の解との比較を行った。さらに、平面応力問題の一つである深ばり (deep beam) の問題を取り上げ、連続体としての理論解との比較を通して、剛体バネモデルによる要素形状やバネ係数の取り方について検討を加えた。最後に底面が支持された弾性体の一つのモデルでの応力伝播特性の解析結果と既存の理論解との比較によりこの方法の信頼性を調査した。

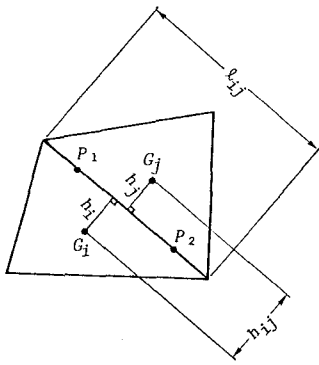
## 2. 剛体バネモデルと陽解法

平面問題における三角形要素の場合で説明する。今、図一に示すような隣り合う2要素  $i, j$  を考える。2要素は境界边上の評価点  $P_1, P_2$  において直方向バネ  $K_n$  とせん断バネ  $K_s$  で連結されているとする (本論文中の平面問題では評価点を2次のガウスの積分点としている)。平面応力問題に対して  $K_n, K_s$  は

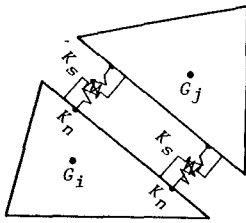
$$K_n = \frac{l_{ij}}{2h_{ij}} \frac{E}{(1-\nu^2)}$$

\* 正会員 工博 大阪市立大学教授 工学部土木工学科  
(〒558 大阪市住吉区杉本3丁目3-138)

\*\* 正会員 工修 (株)竹中工務店技術研究所

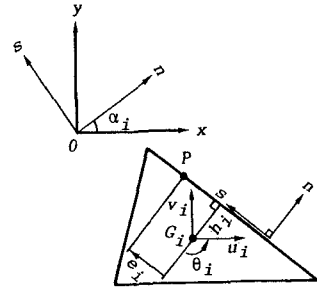


(a) 隣合う剛体要素

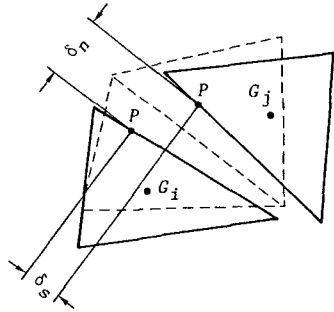


(b) 重心の変位と要素間のバネ

図-1 平面要素の剛体バネモデル



(a) 評価点の変位



(b) 相対変位

図-2 要素間の相対変位

$$K_s = \frac{l_{ij}}{2h_{ij}} \frac{E}{(1+\nu^2)} \dots\dots\dots (1)$$

とされている<sup>3)</sup>。図-2に示す要素間の相対変位  $\delta_n, \delta_s$  を用い、各バネにより要素に作用する力  $N_{ij}, S_{ij}$  は

$$N_{ij} = K_n \delta_n$$

$$S_{ij} = K_s \delta_s \dots\dots\dots (2)$$

となる。要素重心  $G_i(x_{gi}, y_{gi})$  の変位  $u_i, v_i$  および回転角  $\theta_i$  を用いて評価点  $P(x_p, y_p)$  の隣接辺外法線方向 ( $n$ ) および要素からみて反時計回りの方向 ( $s$ ) の変位  $\delta_{ni}, \delta_{si}$  は次式のように表せる。

$$\delta_{ni} = u_i \cos\alpha + v_i \sin\alpha - \theta_i e_i$$

$$\delta_{si} = -u_i \sin\alpha + v_i \cos\alpha + \theta_i h_i \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $\alpha$  は隣接辺外法線と  $x$  軸との成す角、 $e_i, h_i$  は重心  $G_i$  から評価点  $P$  までの  $n, s$  方向の変位量で

$$e_i = (y_p - y_{gi}) \cos\alpha_i - (x_p - x_{gi}) \sin\alpha_i$$

$$h_i = (y_p - y_{gi}) \sin\alpha_i + (x_p - x_{gi}) \cos\alpha_i$$

$i, j$  両要素の評価点の変位を用い、相対変位は

$$\delta_n = -(\delta_{ni} + \delta_{nj})$$

$$\delta_s = -(\delta_{si} + \delta_{sj}) \dots\dots\dots (4)$$

として決められる。

次に任意時間  $t$  における要素  $i$  の運動方程式より時刻  $t$  における  $x, y$  方向と回転の加速度  $\ddot{u}_{i,t}, \ddot{v}_{i,t}, \ddot{\theta}_{i,t}$  は次のように表せる。

$$\ddot{u}_{i,t} = \sum X_i / m_i$$

$$\ddot{v}_{i,t} = \sum Y_i / m_i$$

$$\ddot{\theta}_{i,t} = \sum M_i / I_i \dots\dots\dots (5)$$

ここに  $\sum X_i, \sum Y_i, \sum M_i$  は、要素  $i$  に作用する各変位方向にはたらく力の和であり、 $m_i, I_i$  は要素  $i$  の質量および慣性モーメントである。時刻  $t + \Delta t$  における変位速度は上式を時間増分  $\Delta t$  に関する積分を行い、

$$\dot{u}_{i,t+\Delta t} = \dot{u}_{i,t} + \ddot{u}_{i,t+\Delta t} \cdot \Delta t$$

$$\dot{v}_{i,t+\Delta t} = \dot{v}_{i,t} + \ddot{v}_{i,t+\Delta t} \cdot \Delta t$$

$$\dot{\theta}_{i,t+\Delta t} = \dot{\theta}_{i,t} + \ddot{\theta}_{i,t+\Delta t} \cdot \Delta t \dots\dots\dots (6)$$

上式をさらに  $\Delta t$  で積分すれば、時間積分  $\Delta t$  後の変位は、

$$u_{i,t+\Delta t} = u_{i,t} + \dot{u}_{i,t} \cdot \Delta t$$

$$v_{i,t+\Delta t} = v_{i,t} + \dot{v}_{i,t} \cdot \Delta t$$

$$\theta_{i,t+\Delta t} = \theta_{i,t} + \dot{\theta}_{i,t} \cdot \Delta t \dots\dots\dots (7)$$

このようにして求められた変位を用い、再び式 (1) から式 (7) までの演算を繰り返す。図-3に計算手順のフローチャートを示す。

### 3. 一次元棒の衝撃問題

図-4(a)に示すようなステップ状の衝撃荷重を受ける一端固定棒を考える。これを図-4(b)に示すように  $n$  分割し、 $n+1$  個の要素に分けるこれはすべての要素間のバネ係数が同じになるように考えたもので、各要素間の質量  $m_i$ 、バネ係数  $K_i$  は弾性係数  $E$  を用いて次式のように表せる。

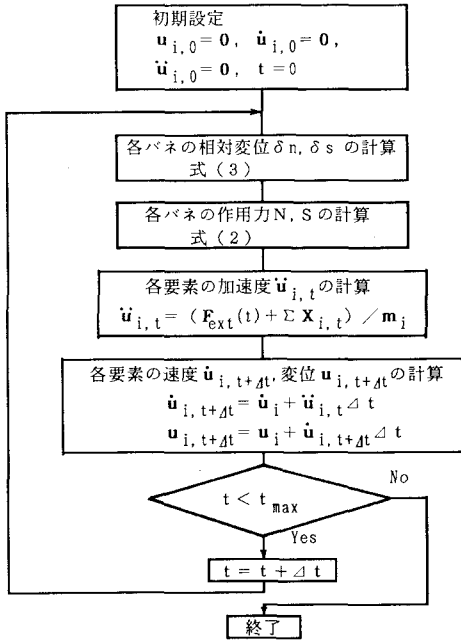


図-3 計算手順 (図中,  $u = [u, v, \theta]$  を表す)

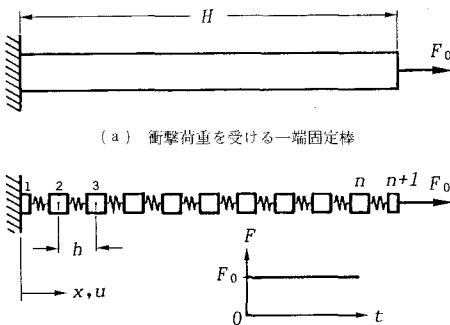


図-4 ステップ状の衝撃荷重を受ける一端固定棒

$$m_i = \rho Ah \dots\dots\dots (8)$$

$$K_i = EA/h \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $\rho$  は密度、 $A$  は棒の断面積、 $h$  は各要素間の距離 (等分割をしているので各要素の長さも同じ)。

図-5 および図-6 に本解析と厳密解による棒中央の変位と応力の応答曲線を示す。これらの図において鉛直変位は荷重  $F_0$  を静的に载荷した時の自由端の変位  $V_s$  で、また応力は  $F_0/A$  で無次元化してあり、時間は次式で表される基本周期  $T_0$  で無次元化してある。

$$T_0 = 4H/c_1 \dots\dots\dots (10)$$

ここに  $c_1$  は応力波の波速であり次式で表せる。

$$c_1 = \sqrt{E/\rho} \dots\dots\dots (11)$$

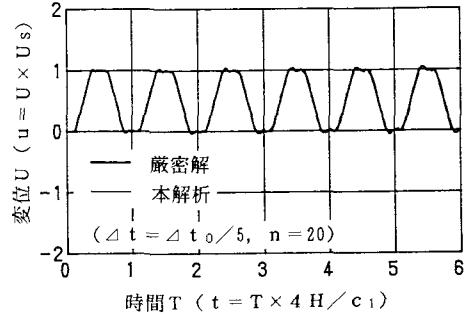


図-5 棒中央点の変位の応答曲線 (分割数  $n=20$ )

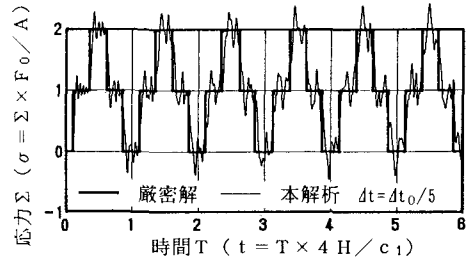


図-6 棒中央点の応力の応答曲線 (分割数  $n=20$ )

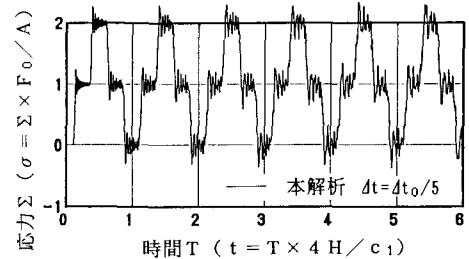


図-7 棒中央点の応力の応答曲線 (分割数  $n=50$ )

計算は  $6T_0$  まで行った。変位においては厳密解とほとんど一致していると言える。中央点は要素の重心であるため、応力は中央の要素の左右のバネの作用応力を平均して求めた。応力は厳密解では規則的な矩形波であるが本解析では立ち上がり後、振動しながら厳密解に近づいていく。本解析が初期値問題であるため、時間の経過とともに理論解からはずれていく傾向はあるが、位相のずれはほとんどない。時間増分  $\Delta t$  を応力波が1要素間を通過する時間  $\Delta t_0$  に等しくした場合、理論解に沿ったきれいな矩形波となり、 $\Delta t$  を  $\Delta t_0$  より大きくした場合、応答値は大きく振動し発散する。逆に  $\Delta t$  を  $\Delta t_0$  より小さくした場合、理論上応力波が通過する以前の要素に、非常に小さな応力の振動が起こるが、解は安定し、本例では  $\Delta t = \Delta t_0/5$  で十分な収束解が得られた。

分割数を細かくした場合、図-7 に示すように厳密解に近づき、2周期目以降の乱れも少なくなるが、応力波の通過後の振動は粗い分割数の場合とほぼ同程度のまま

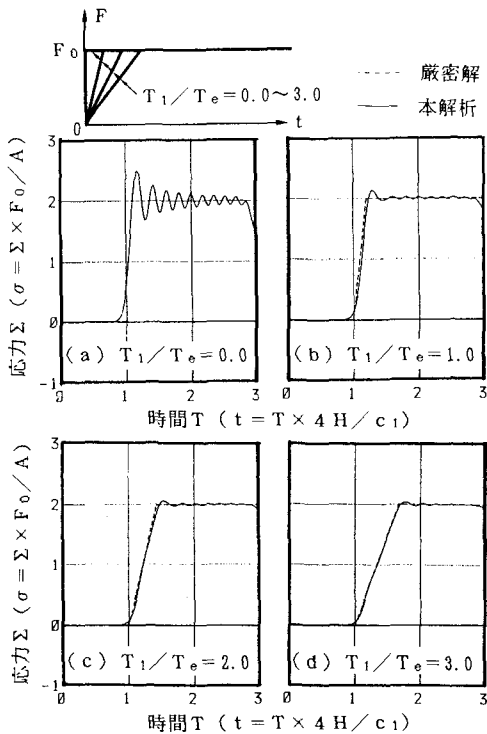


図8 立ち上がり時間を変化させた場合の棒固定端の応力の応答曲線

であり、小さくなる傾向はない。この振動の周期は次式で表される個々の要素の固有振動周期  $T_e$  とほぼ等しいことがかった。

$$T_e = 2\pi / \sqrt{2K_i/m_i} \dots\dots\dots (12)$$

次に、同じ一次元棒に有限の立ち上がり時間  $T_1$  を有する漸増荷重を作用させた場合の固定端における応力の応答曲線を図-8に示す。この図より荷重の立ち上がり時間を大きくすれば、ステップ荷重に比べて応力の立ち上がり後の振動の振幅  $\delta\sigma$  がしだいに小さくなるのが分かる。この傾向は同じ立ち上がり時間においては、要素分割数  $n$  を大きく取ればより顕著になる。これを先ほどの個々の要素の固有周期  $T_e$  を用いて整理したのが図-9である。図の横軸は  $T_1/T_e$  で立ち上がり時間の個々の要素の固有周期に対する比であり、縦軸は  $\delta\sigma_1/\sigma_1$  ( $\sigma_1$  は  $F_0$  作用時の厳密解による応力値、 $\delta\sigma_1$  は立ち上がり後の最初の振動のピーク値) でオーバーシュートの大きさを表している。図には分割数  $n$  を10~40まで変化させた場合の関係を示しているが、いずれも  $T_1/T_e$  が2.0以上であればオーバーシュートの大きさは5%以下になることがわかった。

次に、ひずみ速度に依存する減衰を考慮した場合の解析例を示す。減衰は変位速度に比例する粘性ダッシュポットで表現し、次式で示す運動方程式を用いた。

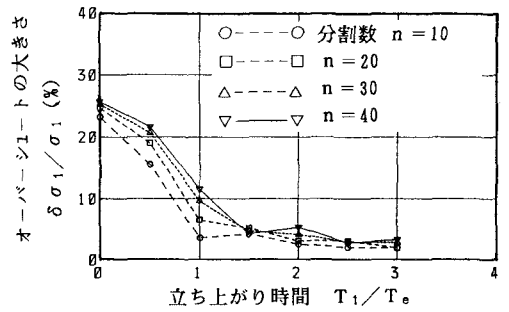


図9 荷重の立ち上がり時間とオーバーシュートの大きさの関係

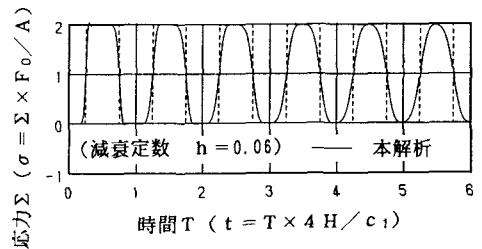


図10 減衰を入れた場合のステップ荷重に対する棒固定端の応力の応答曲線

$$m_i \ddot{u}_i + C \dot{u}_i + K u_i = 0 \dots\dots\dots (13)$$

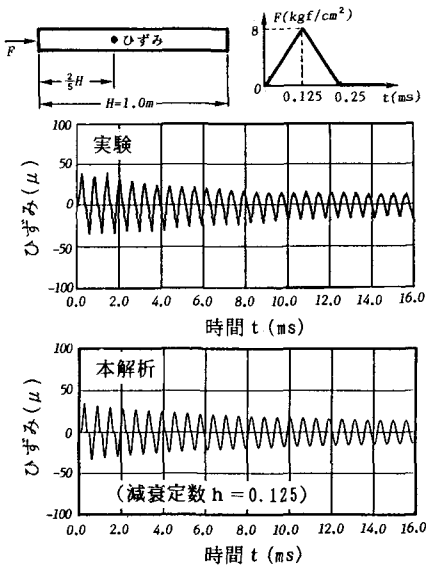
ここに  $\ddot{u} = 2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}$ ,  $C$  は減衰係数で臨界減衰係数  $C_0 = 2\sqrt{K_m}$  を基準に減衰定数  $h$  を用いて  $C = h C_0$  として与える。

図-10はステップ荷重を作用させた場合の固定端の応力であるが、減衰定数  $h=0.06$  のわずかな減衰を入れることによって立ち上がり後の振動は極端に小さくなるが応答曲線の鋭さが失われることがわかる。

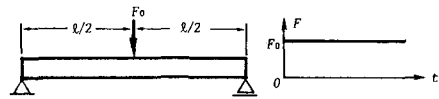
最後に天井から糸で水平に釣り下げられたモルタル棒 (長さ  $H=1$  m, 断面 66 cm) の一端をハンマーで叩いたときの実験結果を本解析法で検討した結果を示す。解析に用いた入力波は、打撃点近傍のひずみ測定点より逆解析し求めたものである。図-11に衝撃を与えた端部から  $2/5 H$  点に置ける軸方向のひずみの応答曲線を示す。減衰係数を  $h=0.125$  にとれば、実験との良い対応がえられることがわかった。

#### 4. はりの横衝撃問題

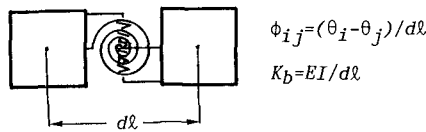
最初に弾性ばりの場合の解析結果を級数解に基づく理論解と比較する。図-12に示すようなスパン中央にステップ状の集中荷重を受ける単純ばりを対象とする。要素は横一列とし、要素数は全スパンに対して41とし、せん断バネだけでは曲げモーメントを伝達できないので、各要素間にせん断バネと図-13に示すような回転バネを用いる。図-14に1次の固有周期  $T_0$  の  $1/4$  までのたわみ曲線の時間的变化を示す。図中、変位  $V$  は静



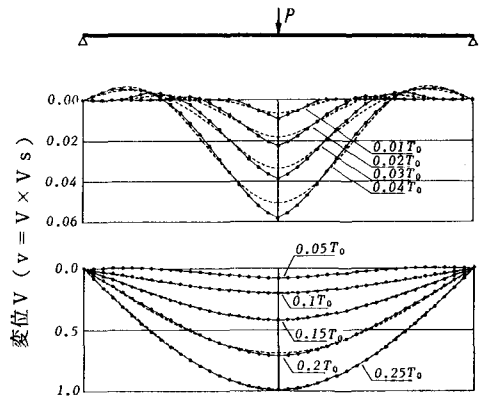
図—11 実験におけるひずみ応答曲線との比較



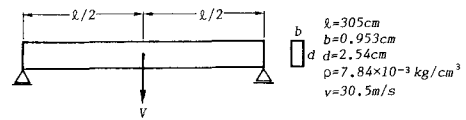
図—12 ステップ状の集中衝撃荷重を受ける単純ばり



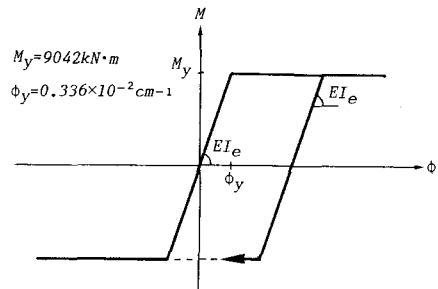
図—13 回転バネと回転バネ係数  $K_b$



図—14 たわみ曲線の時間的変化(破線：級数解, 実線：本解析)



図—15 定速度集中衝撃荷重を受ける単純ばり



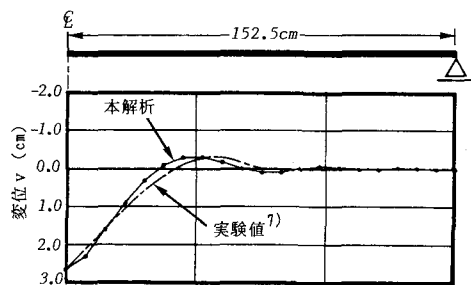
図—16 弾塑性回転バネに用いた曲げ剛性

的に荷重  $F_0$  が作用したときの中央点のたわみ  $V_0$  の比で無次元化してある。曲げ振動波形においては勿論のこと、曲げ波がはりの両端に伝わるまでの過渡曲線においても本解析によるたわみ曲線は理論解とよく一致していることがわかる。

次に弾塑性とした場合の解析例を既往の実験例と比較する。計算の対象としては図—15 に示すような両端単純支持の長いはりがスパン中央に定速度集中横衝撃荷重を受ける場合を考える。回転バネの曲げ剛性として図—16 に示す曲げモーメントと曲率の関係から得られる完全弾塑性の剛性を用いた、図—17 に時間  $t = 0.87$  ms におけるたわみ曲線を示す。本解析値は要素数は 41 で、粗い計算にもかかわらず既往の実験値<sup>7)</sup>とよく一致していることがわかる。

### 5. 二次元弾性体の衝撃問題

図—18 に示すような上辺にステップ状の等分布衝撃



図—17 実験値と本解析のたわみ曲線の比較 ( $t = 0.87$  ms)

荷重が作用する深ばりを対象とする。図—19 に  $20 \times 12$  分割した場合の要素分割と境界条件を示す。支持条件は理論解の条件と合わせる。すなわち、中央断面の境界要素は  $x$  方向の変位と回転を拘束し、端部では  $y$  方向の変位を拘束している。はり平面応力問題として取り扱い、2次元動弾性論に基づいた固有関数展開法による理論解<sup>8)</sup>と比較する。図—20 には中央点 ( $x = l/2, y = h/2$ )

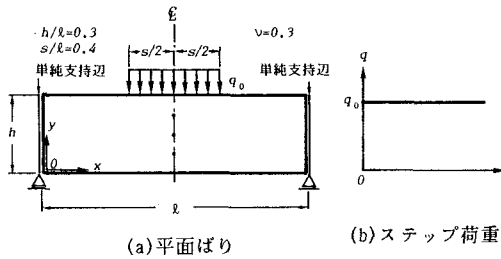


図-18 ステップ状の等分布荷重が作用する平面ばり

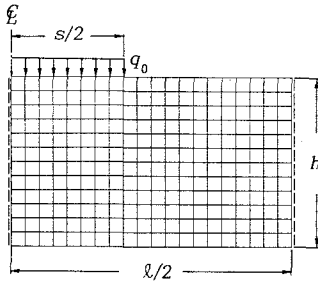


図-19 正方形要素を用いた要素分割

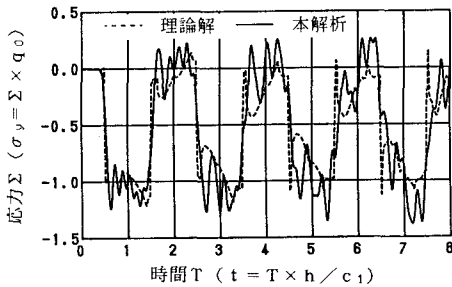


図-20 中央点における高さ方向の応力の応答曲線 (正方形要素,  $E_h = E/(1-\nu^2)$ ,  $E_s = E/(1+\nu)$ )

の鉛直方向の応力  $\sigma_y$  の時間変化を示す。ここでは正方形要素を用い、式(1)で示したバネ係数を用いる。図の横軸は縦波が高さ  $h$  を伝播するのに要する時間  $T_0$  で無次元化した時間であり、縦軸は荷重強度  $q_0$  で無次元化した応力である。理論解では初期状態から時間  $0.5 T_0$  において荷重先端部からのせん断波が到達するまでは、3.で示した1次元棒と同じ応力状態であり、その後、時間  $T_0$  付近で一度圧縮側に大きくなり、時間  $1.5 T_0$  で下端からの反射波が到達し引張応力が生じている。一方、はりのスパン方向に40分割、はり高方向に24分割した場合の本解析法の計算結果では、時間  $0.5 T_0$  から1次元棒の場合と同様に振動しながら理論解に近づいている。時間  $1.0 T_0$  付近では圧縮側に振幅の中心が向かっており、本解析においても荷重先端部からのせん断波(横波)が到達していると思われる。また、本解析の応答曲線は時間の経過とともに位相のずれは見られないが、次

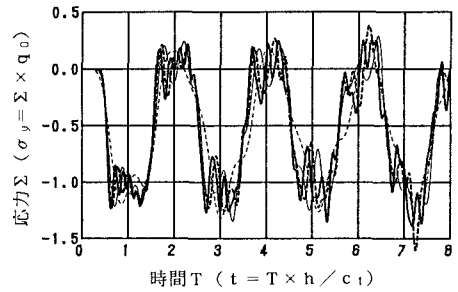


図-21 要素分割数を変化させた場合のはり中央点の高さ方向の応力の応答曲線

- ..... ① 10×6      ——— ② 20×12
- ..... ③ 30×18    ——— ④ 40×24

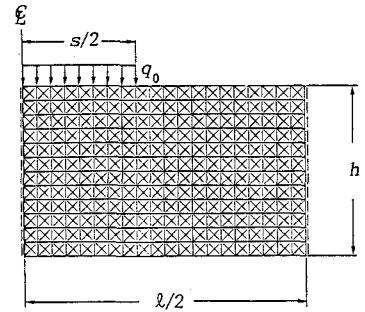
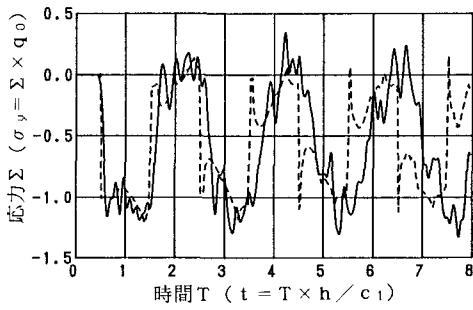


図-22 正方形要素を対角線で4分割したモデル

次に応力の乱れが大きくなっている。

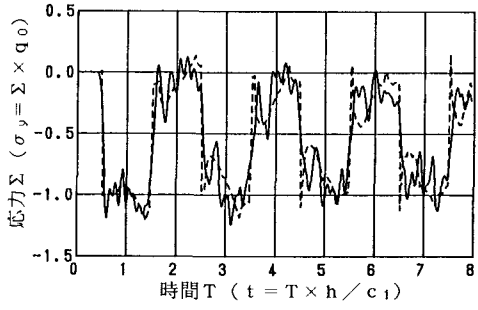
図-21 に要素分割を変化させた場合の応答曲線の収束状況を示す。要素分割を多くした場合、一次元棒の応答と同様に立ち上がり後のピークの数が増えるが振幅の大きさは変わらない。また、時間経過による理論解との位相のずれは要素数が増えるにしたがって小さくなる傾向があるが、初期の応答は、本例の場合、要素分割数が高さ方向24でほぼ一定値に収束している。時間増分を細かくした場合の応答曲線の収束状況は一次元棒の場合と同様で、時間増分  $\Delta t$  を、最小要素間を縦波が伝播するのに要する時間  $t_0$  の1/5程度にすれば一定値に収束していた。

次に、図-22に示すような正方形の要素を対角線で4分割したモデルを用いて要素分割を行い、解析を行った。この要素分割はポアソン比の影響を完全に考慮できることと破壊問題に適用する際に、斜め方向のひびわれに対して必要となると考えられる分割である。式(1)で示した剛度で解析した結果を図-23(a)に示すが正方形要素の応答(図-20)と比べて後半の位相の乱れが大きくなっている。そこで、1つの正方形要素を対角線で4分割した基本モデルを用い、単純圧縮状態における横方向のはらみの比をポアソン比  $\nu$  に合うよう、バネ剛度を次式に変更した。



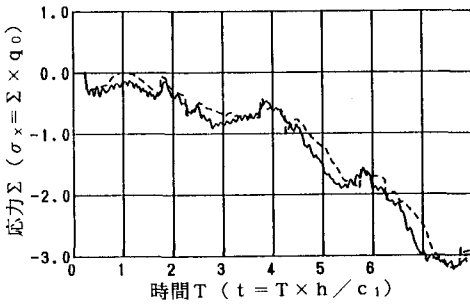
(a)  $E_n = E/(1-\nu^2)$ ,  $E_s = E/(1+\nu)$

(波線：理論解，実線：本解析，中央点は高方向応力)

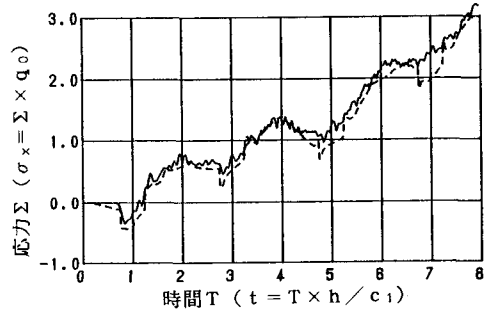


(b)  $E_n = E/(1-\nu)$ ,  $E_s = E/(1+2\nu)$

図-23 3角形要素を用いた場合のバネ剛度による応答の違い



(a) 下辺から  $h/4$  の点



(b) 上辺から  $h/4$  の点

(波線：理論解，実線：本解析)

図-24 中央断面におけるスパン方向応力  $\sigma_x$  の応答曲線

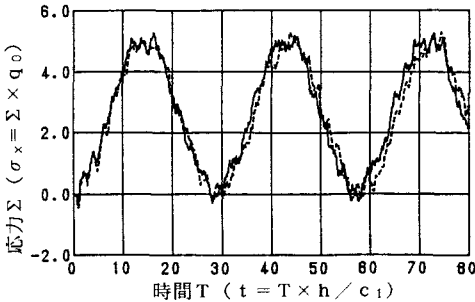


図-25 中央断面下辺から  $h/4$  の点における  $\sigma_x$  の長期応答 (波線：理論解，実線：本解析)

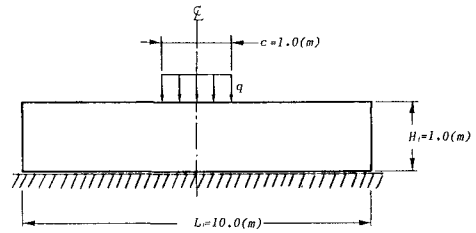


図-26 台形状の等分布荷重が作用する二次元弾性体

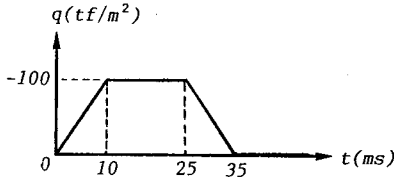
長期応答を示す。多少の位相のずれは見られるが，本解析法が数万ステップの時間刻みにもかかわらず，長期応答は大きく乱れることもなく，理論解とよく一致していると言える。

最後に台形荷重が作用する二次元弾性体の数値解析例を示しておく。解析の対象は図-26に示す高さ1 m 横幅10 mの底面が摩擦のない剛体で支持された弾性板で中央上面に図-27のような台形状の衝撃荷重が作用するものである。なお対象の単位体積重量は17.7 kN/m<sup>3</sup>，弾性係数はラメの定数  $\lambda$  が9.8 MPaである。また，ポアソン比  $\nu=0.45$  である。解析では図-28のような要素分割を用いる。図-29に変形図の時間変化を示す。荷

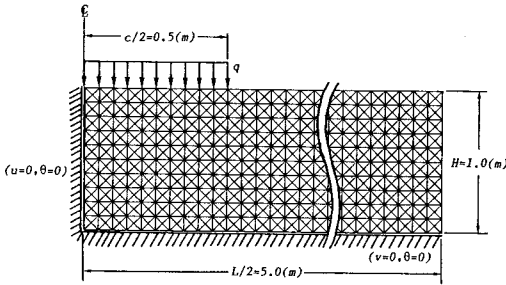
$$K_n = \frac{l_{ij}}{2h_{ij}} \frac{E}{(1-\nu)}$$

$$K_s = \frac{l_{ij}}{2h_{ij}} \frac{E}{(1+2\nu)} \dots \dots \dots (14)$$

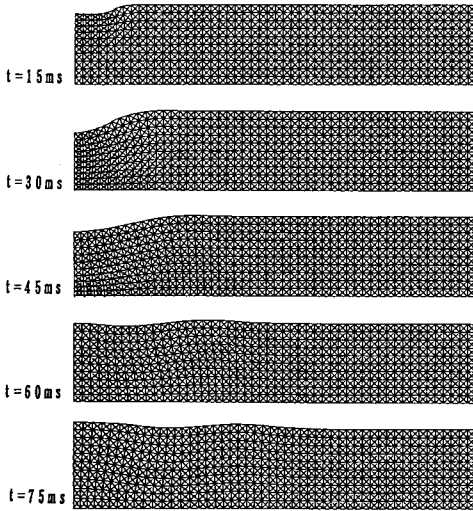
このバネ剛度を用いて計算した結果が図-23 (b) である。位相のずれは少なく，正方要素を用いた解析結果 (図-20) よりも曲線の乱れは少ない。図-24に同様の要素分割を用いた場合の中央断面におけるはりスパン方向の応力の応答曲線を示す。また，図-25に応力の



図—27 台形状の衝撃荷重



図—28 要素分割 (要素数 2000 (50×10×4))

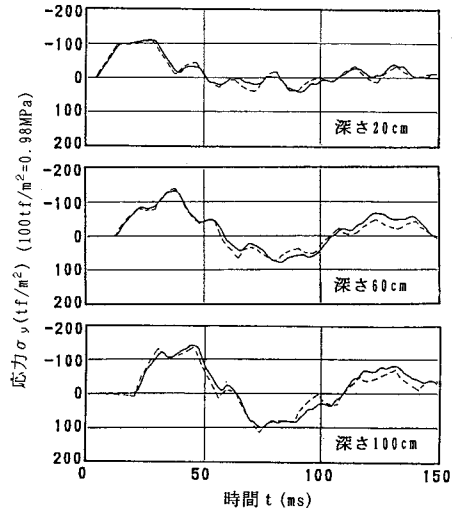


図—29 変形図の時間変化 ( $\lambda=9.8 \text{ MPa}$ )

重の載荷面からひずみが底辺に広がりながら伝播している様子が表されている。図—30 に中央断面の上面から 20 cm, 60 cm, 100 cm の位置における高さ方向の応力を示す。理論解と比較して本解析値が衝撃応力の伝播をよく表していることがわかる。

## 6. ま と め

本論文は、主として静的極限解析のために開発された剛体パネ要素法の衝撃弾性問題に対する適用性を調べた。すなわち、この方法により棒の縦衝撃問題、はりの横衝撃問題、深ばりおよび二次元弾性体の衝撃問題について解析し、おもに既存の弾性理論解と比較し、本解析



図—30 中央断面におけるはり高方向応力の応答波形 (波線：理論解, 実線：本解析)

法が衝撃による応力伝播特性を十分表すことができることを確認した。

個々の解析における得られた成果を以下にまとめる。棒の縦衝撃問題の解析において

- (1) 時間増分を応力波が要素間を伝播する時間よりも小さく取ると解は安定する。
- (2) 変位は理論解と十分一致する。
- (3) ステップ荷重に対する本解析の応答曲線は応力の立ち上がり後、振動しながら理論解に近づく。
- (4) 応力の立ち上がり後の振動の振幅は、荷重の立ち上がり時間を有限にとれば小さくなる。
- (5) 応力の立ち上がり後の振動の振幅は、無筋コンクリート棒の実験で得られる減衰に比十分小さい減衰を入れることによりほぼ消去できる。

はりの横衝撃問題の解析において

- (6) たわみ曲線の時間変化は弾性理論解とよく一致する。
- (7) 弾塑性回転パネを用いた解析で本解析のたわみ曲線は既往の一つの研究における弾塑性実験値とよく一致する。

深ばりおよび二次元弾性体の衝撃問題の解析において

- (8) 圧縮波の伝播によるはり高さ方向の応力は棒の場合と同様に理論解の近くで振動している。
- (9) 正方形を 4 分割した組合せ要素では、ポアソン比の影響を考慮した式 (14) のパネ剛度により応力の応答が理論解とよく一致する。

- (10) スパン方向の応力の応答は理論解とよく一致する。

- (11) 長期応答でも、解は安定しており、本解析の結果は理論解とよく一致する。



(12) 滑らかな剛な平面の上にある弾性体の応力伝播に対しても、本解析は理論解とよく一致した解を与える。

(13) 台形荷重のような有限の立ち上がりを有する荷重に対しては立ち上がり後の振動はほとんどなくなり、精度のよい解が得られる。

#### 参 考 文 献

- 1) 浅田和雄：材料の衝撃問題の基礎と応用，3. 衝撃問題に利用されている計算コード，「材料」第34巻，No. 385，pp. 1228-1234，1985.
- 2) 竹田・立川・藤本：コンクリートと衝撃，コンクリート工学，Vol. 15，No. 4，pp. 1-11，1977. 4.
- 3) 藤井・宮本：衝撃荷重下におけるコンクリート構造物の挙動，コンクリート工学，Vol. 21，No. 9，1983. 9.
- 4) Kawai, T.: New Element Models in Discrete Structural Analysis, 日本造船学会論文集，第141号，pp. 174-180，1977. 5.
- 5) 川井・竹内：離散化極限解析プログラミング，培風館，1990. 6.
- 6) 青柳史朗：構造物における衝撃現象の数値解析，土木学会論文報告集，第206号，1972. 10.
- 7) Duwez, P.E., Dlark, D.S. and Bohnenblust, H.F.,: The Behavior of Long Beams Under Impact Loading, Journal of Applied Mechanics, Vol. 17, No. 1, pp. 27-34, 1950. 3.
- 8) 奥田・小林・園田：衝撃荷重を受ける平面梁の応力波伝播解析，土木学会第43回年次学術講演概要集，第I部門，pp. 898-899，1988. 10.

(1990. 12. 18 受付)

## APPLICABILITY OF A RIGID BODY SPRING MODEL TO IMPACT PROBLEMS OF ELASTIC BODIES

Keiichiro SONODA and Atsushi KAMBAYASHI

An explicit finite difference scheme with rigid body spring model is developed to analyze impact problems for elastic bodies.

Firstly the scheme is applied to problems of longitudinal wave in uniform bars and flexural wave in beams. And the sufficient condition of time increment is investigated for the stability and the fluctuation of stress wave due to lumped mass and stiffness.

Secondly problems of stress wave propagations in two dimensional deep beams subjected to impact loads have been analyzed and the element shape and the spring stiffness to be used are examined.

Numerical results obtained for two dimensional impact problems have a good agreement with the theoretical solutions.

In conclusion, presented scheme has good applicability to the impact problems of stress wave propagation within an elastic body.