

# 集中力／分布力加振に対する粘弾性 多層半無限地盤の2次元グリーン関数 の数値計算法

竹宮宏和\*・有岡謙一\*\*

本論文は、2次元粘弾性多層半無限地盤の調和集中力／分布力加振に対するグリーン関数の数値計算法を示したものである。解法として、Navier波動方程式の水平方向伝播についてFourier変換を施し、各層の動的剛性マトリックス、加振層の外力ベクトルから全体層の方程式を作成し、この波数領域解を逆Fourier変換、つまり波数積分において、修正Clenshaw-Curtis法を用いる場合の合理的な誤差評価法を提案し、同積分を効率的に遂行する手法を示した。

**Keywords** : green function, viscoelastic layered halfplane, concentrated/distributed source force, modified Clenshaw-Curtis method

## 1. ま え が き

地震工学の分野で、地震波の表層地盤内の伝播過程、地盤と構造物の動的相互作用解析において境界要素法の適用が、最近多く見られる。この場合、適切なグリーン関数が前提となる。これに関するものとしては、半無限一様弾性体の集中力加振に対する研究がLamb<sup>1)</sup>以来続けられている。ここではFourier変換を利用して波数領域解を求め、その逆Fourier変換の波数積分をとる。そのための工夫が種々なされてきた<sup>2)-4)</sup>。集中力加振解では、加振点近傍において強い特異性が現れる。それよりも分布力加振を仮定すれば特異性を弱めることができる利点があり、その有用性が強調される<sup>5)</sup>。分布加振に対するグリーン関数は既に提案されているが<sup>6)</sup>、その逆Fourier変換における厳密な取り扱いが必要である。

地盤は一般に成層構成であり、多層地盤におけるグリーン関数が望まれる。多層地盤に対する波数領域解を求めるために、(1) Haskellの伝達マトリックス法<sup>6)-9)</sup>、(2) 一般化透過係数と反射係数による波線法<sup>10)</sup>、(3) 各層の剛性マトリックスを評価する直接剛性法<sup>11)</sup>などが採られてきている。

つぎに波数積分の計算方法には、様々な直接数値積分法が用いられている。例えば、有限区間においては、Simpson則、Gauss求積法、Filon積分法、Chebyshev多項式展開に基づいたClenshaw-Curtis法<sup>12)</sup>等があり、無限区間においては、オイラー変換を用いるLongman<sup>13)</sup>の方法、修正Clenshaw-Curtis法を適用したXu and Mal<sup>9),14)</sup>の方法等がある。問題は数値的に与えられる波数領域解の無限積分を高精度でしかも効率的に遂行することにある。

本論文では、2次元粘弾性多層半無限地盤における内部集中および一様分布加振に対するグリーン関数を、次の点に主眼をおいて、計算する方法を提案する。

(1) 直接剛性法によって波数領域解を求めるが、その際の精度落ちの問題を明確にし、その対策方法を示す。

(2) 波数積分計算において提案されている修正Clenshaw-Curtis法を基本にした直接数値積分法を適用するが、その際の誤差推定式を新しく確立する。被積分関数全体をChebyshev多項式に近似して積分するClenshaw-Curtis法に対する積分値の誤差推定については、O'Haraら<sup>15),16)</sup>が詳しく検証しているが、被積分関数のうち波数領域解のみをChebyshev多項式に近似する修正Clenshaw-Curtis法に対する積分値の誤差推定については、多くの数値計算例からの経験的な判定基準が報告されているに過ぎない<sup>14),17)</sup>。そして、これらの方法では無限区間における誤差推定が不明確であり、また有限区間における誤差推定式に有限区間幅の影響が含まれていないために、誤差推定に問題がある。ここでは新しい誤差推定式を用い、要求される精度のもとで、波数を自動分割し積分する方法を提示する。

## 2. 波数領域解

### (1) 基本式

対象系は2次元粘弾性多層半無限地盤とし、角振動数 $\omega$ の面内調和加振状態を考える。同波動場はP-SV波が関係し、変位 $\mathbf{u}$ に関してNavierの式

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla\mathbf{u}) - \mu\nabla\times\mathbf{u} - \rho\omega^2\mathbf{u} = \mathbf{f}e^{-i\omega t} \dots\dots\dots (1)$$

に支配される。ここに $\nabla$ はハミルトン演算子を定義する。以下、時間項 $\exp(-i\omega t)$ を表現で省略する。

加振力の作用は、Fig.1に示すように、(a)集中力加振、(b)鉛直面、(c)傾斜面、(d)水平面上の一様分布加振力とする。(a)に対しては、

$$f_\alpha = F_\alpha\delta(x-\xi)\delta(z-\eta), \alpha = x, z \dots\dots\dots (2\cdot a)$$

\* 正会員 工博 岡山大学教授 工学部土木工学科  
(〒700 岡山市津島中3-1-1)

\*\* 正会員 工博 東洋建設(株)技術本部設計部

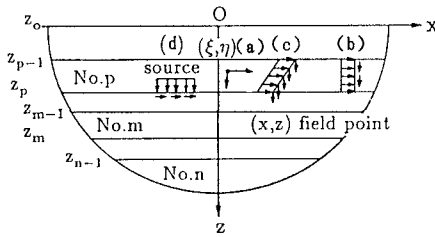


Fig.1 Geometry of the layered halfplane and loading

但し、 $\delta(\ )$  は Dirac のデルタ関数である。  
 (b) に対してはある層厚にわたった分布を仮定し、  
 $f_\alpha = F_\alpha \delta(x - \xi) [H(z_p) - H(z_{p-1})]$ ,  $\alpha = x, z \dots \dots (2 \cdot b)$   
 但し  $H(\ )$  は Heaviside のステップ関数である。  
 (c) に対しては  
 $f_\alpha = F_\alpha \delta(x - x_p(z))$ ,  $\alpha = x, z \dots \dots (2 \cdot c)$   
 ただし、 $x = cz + d$  で、係数  $c, d$  は加振幅の両端の座標から決定される。  
 (d) に対しては、加振幅を  $2a_0$  とすると、  
 $f_\alpha = F_\alpha [H(x - \xi + a_0) - H(x - \xi - a_0)]$ ,  $\alpha = x, z \dots \dots (2 \cdot d)$

本論文において使用する記号を次のように定義する。  
 $k_j = (1 + i\zeta_j) \omega / c_j, j = 1, 2$   
 $\mu = \rho c_2^2 / (1 + i\zeta_2)^2, \lambda + 2\mu = \rho c_1^2 / (1 + i\zeta_1)^2$   
 $\nu_j = \sqrt{k^2 - k_j^2}$  ただし  $Re(\nu_j) > 0, j = 1, 2$   
 ここに下添字  $j = 1, 2$  はそれぞれ P 波, SV 波に対応しており、 $c_j$  は波速、 $\zeta_j$  は内部減衰定数、 $\lambda, \mu$  は複素ラメー定数、 $\rho$  は単位質量、 $k$  は  $x$  方向の波数を表す。変位および応力の逆 Fourier 変換 (波数積分) 表示の一般解は次のように表現される。

$$[u, w, \tau_{xz}, \sigma_{zz}, \sigma_{xx}]^T = \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{u}, \hat{w}, \hat{\tau}_{xz}, \hat{\sigma}_{zz}, \hat{\sigma}_{xx}]^T \exp[ik(x - \xi)] dk \dots \dots (3)$$

ここに、上添字  $\hat{\ }$  は波数領域解を意味する。  
 いま、式 (1) で表される各層内の波動伝播を  $x$ -軸方向の距離変数に関する Fourier 変換から求め、次式の変位-応力の状態ベクトルで定義する。

$$\{\hat{S}(z, k)\} = [\hat{u}, \hat{w}, \hat{\tau}_{xz}, \hat{\sigma}_{zz}]^T \dots \dots (4)$$

そのときの解は  
 $\{\hat{S}(z, k)\} = \{\hat{S}_h(z, k)\} + \{\hat{S}_p(z, k)\} \dots \dots (5)$   
 但し、 $\{S_h(z, k)\}, \{S_p(z, k)\}$  はそれぞれ斉次解、特解である。 $\{S_h(z, k)\}$  は未知積分定数を含んだ形であり、 $\{\hat{S}_p(z, k)\}$  は加振の種類、位置によって確定される<sup>9)</sup>。集中力加振の場合は文献 9) にあるので、一様分布力加振の場合のみを付録 I に示しておいた。

(2) 直接剛性法

対象地盤全体の波数領域の解を求めるために、各層の上端 (A)、下端 (B) における波数領域の変位  $\{\hat{U}_{AB}\}$

と応力  $\{\hat{T}_{AB}\}$  の関係式を、式 (5) を変形することによって求める。

$$\{\hat{T}_{AB}\} = [K] \{\hat{U}_{AB}\} - \{\hat{P}_{AB}\} \dots \dots (6)$$

ここに、

$$\{\hat{P}_{AB}\} = [K] \{\hat{U}_{pAB}\} - \{\hat{T}_{pAB}\}$$

$$\{\hat{T}_{AB}\} = [\hat{\tau}_{zzA}, \hat{\sigma}_{zzA}, \hat{\tau}_{xzB}, \hat{\sigma}_{zzB}]^T$$

$$\{\hat{U}_{AB}\} = [\hat{u}_A, \hat{w}_A, \hat{u}_B, \hat{w}_B]^T$$

であり、 $[K]$  は各層の剛性行列を、 $\{\hat{P}_{AB}\}$  が層境界に作用する外力項ベクトルを定義している。なお、 $[K]$  および  $\{\hat{P}_{AB}\}$  の内容は付録 I に示す。 $\{\hat{U}_{pAB}\}, \{\hat{T}_{pAB}\}$  はそれぞれ層内に加振源がある場合の層の両端における変位と応力の特解ベクトルである。ここでは剛性行列の対象性を得るために  $\hat{w}$  と  $\hat{\sigma}_{zz}$  に虚数単位  $i$  を乗じていく。また、最下層の半無限体の剛性行列は斉次解における上昇波成分が存在しないという条件から求める。式 (6) を各層に対して適用し、層内のつり合い条件と連続条件から全体系の支配方程式を得る。

3. 数値計算法

波数領域解を計算し、それを波数積分する過程における問題点とその対策法について以下に述べる (なお、数値計算においては長さの単位は最大せん断波数  $k_{2,max}$ 、力の単位は最小せん断剛性  $\mu_{min}$  を用いて無次元化する)。

(1) 波数領域解

a) 剛性行列

対象層厚を  $h$  とすると剛性行列の計算において  $Re(k_2)/k$  の値が非常に小さくなると要素間に差がなくなり桁落ちによる精度低下が起り、 $Re(\nu_j)h$  の値が大きくなると、双曲線関数の項においてオーバーフローの問題が発生する。そこで、桁落ちに対しては、2次までのテーラー展開近似を用い、オーバーフローに対しては  $\exp(\nu_j h)$  等で元の剛性行列要素を割ることによってそれぞれ新しい近似剛性行列を作り処理した (付録 I 参照)。

b) 層内応答点

式 (5) における  $\{S_h(z, k)\}$  には  $\exp\{\nu(z - z_{m-1})\}$  の項が含まれており、 $\nu(z - z_{m-1})$  の値がある程度大きくなると精度の低下が起る。さらに大きくなるとオーバーフローも避けられない。そこで地盤の物性値が異なる層分割に加えて次式の  $D$  の値がある限度を越えると応答点の位置で層を自動的にサブ層に分割することにした。

$$D = k_e(z - z_{m-1}) \dots \dots (7)$$

ここに、 $k_e$ : 数値計算する無次元波数の最大値、 $z, z_{m-1}$ : それぞれ  $k_{2,max}$  によって正規化された応答点レベルと応答点を含む層の上端レベルである。

(2) 数値積分

a) 被積分関数の性質

振動数領域での応答値は、式(3)を用いて一般に無限積分表示で与えられる。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} F(k, z, \eta) \exp(ik(x-\xi)) dk \dots\dots\dots (8)$$

ここで、被積分関数  $F(k, z, \eta)$  は波数領域解であり、集中力加振、鉛直面および水平面上の分布力加振に対しては、加振力の方向により、変位-応力の状態ベクトルの各成分は明らかに  $k$  に関して偶関数か奇関数に分けることができる。傾斜面上の加振の場合は、特解式(I-2)からわかるように  $\exp(ika)$  項のため、工夫を要する<sup>18)</sup>。したがって、式(8)は次のいずれかの式で表され、積分区間を  $(-\infty, \infty)$  から  $[0, \infty)$  に変更できる。

$$I = 2 \int_0^{\infty} F(k, z, \eta) \cos\{k(x-\xi)\} dk \dots\dots\dots (9 \cdot a)$$

$$I = 2i \int_0^{\infty} F(k, z, \eta) \sin\{k(x-\xi)\} dk \dots\dots\dots (9 \cdot b)$$

つぎに多層地盤を取り扱う場合、たとえば2層半無限地盤であっても、上層の層厚が増加したり、振動数が大きくなるにつれてレーリ波に対する複素ポールの数が増える。波数  $k$  の実軸上の積分においては被積分関数が急激に変化して増大する波数帯域があり、それより大きい波数では指数的に単調に減少する。例えば数値計算例のCase-1における振動数  $f=0.1, 1.0, 5.0$  Hz に対する波数領域解(変位:  $u$ )を Fig.2 に示す。これらをそれぞれ有限区間  $[0, k_c]$ 、無限区間  $[k_c, \infty)$  と呼び、それぞれの区間に適した数値積分スキームを行う。なお、 $k_c$  の値は同一の振動数に対しても、加振点と応答点の距離によって変化する。

b) 有限区間および無限区間の数値積分

数値積分の方法は Xu and Mal<sup>9), 14)</sup> が提案した修正 Clenshaw-Curtis 法に従った。有限区間においては区間をさらに細分割し、 $F(k, z, \eta)$  を Chebyshev 多項式で近似し、その係数を用いて閉区間を解析的に積分する。無限区間においては、加振源の種類に応じて被積分関数  $F(k, z, \eta)$  は波数  $k$  が増大するにつれて以下のような関数に漸近する。

a) 集中加振

$$F(k, z, \eta) = \left[ \sum_{n=0}^N A_n(z, \eta) k^{1-n} \right] \exp(-k|z-\eta|) \dots\dots\dots (10 \cdot a)$$

b) 鉛直面一様分布加振

$$F(k, z, z_s) = \left[ \sum_{n=0}^N A_n(z, z_s) k^{-n} \right] \exp(-k|z-z_s|) \dots\dots\dots (10 \cdot b)$$

c) 傾斜面一様分布加振

$$F(k, z, z_s) = \left[ \sum_{n=0}^N A_n(z, z_s) k^{-n} \right] \sin(ka + \theta)$$

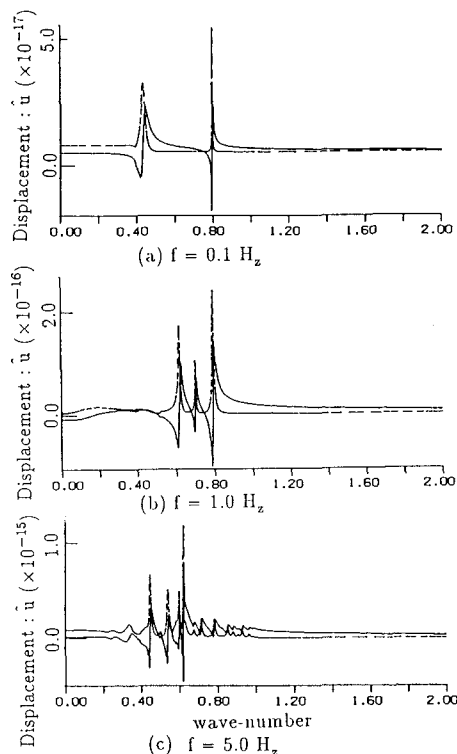


Fig.2 Normalized real part (solid line) and imaginary part (dashed line) of the wave-number domain results:  $\bar{u}$  for Case-1

$$\exp(-k|z-z_s|) \dots\dots\dots (10 \cdot c)$$

d) 水平面一様分布加振

$$F(k, z, \eta) = \left[ \sum_{n=0}^N A_n(z, \eta) k^{-n} \right] \sin(ka_0) \exp(-k|z-\eta|) \dots\dots\dots (10 \cdot d)$$

ここに、 $z_s$  は分布加振源において応答点と加振源の位置関係によって決定される加振源レベルの代表値である<sup>18)</sup>。なお以上において、変位に対しては、 $A_0=0$  となる。

つぎに、 $k=1/q$  とおくと、新しい関数  $G(q, z, \eta)$  を  $q$  のべき級数になるように定義することができる。例えば、水平面上の一様分布加振の場合は次のようにおく。

$$G(q, z, \eta) = F(1/q, z, \eta) \exp(|z-\eta|/q) / \sin(a_0/q) \dots\dots\dots (11)$$

この  $G(q, z, \eta)$  を区間  $[q_c, q_e]$  において Chebyshev 多項式で近似すると、式(10・d)の係数  $A_n$  の値が確定する。ここに  $q_c=1/k_c$ 、 $q_e=1/k_e$  であり、分布加振の場合、 $k_e=40 \sim 80$  程度とすればよい。無限区間の波数積分は  $F(k, z, \eta)$  が偶関数の場合、次のように変換できる。

$$I = 2 \int_{k_c}^{\infty} F(k, z, \eta) \cos\{k(x-\xi)\} dk$$

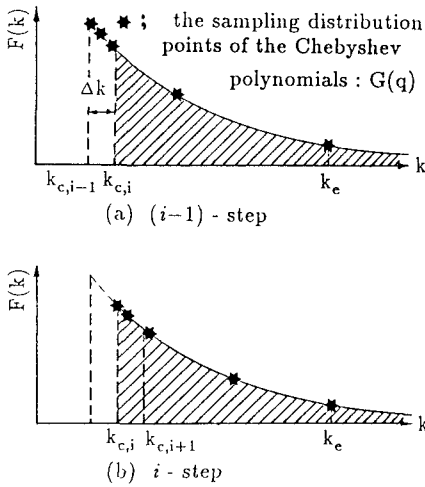


Fig.3 Error estimate in semi-infinite range

$$= 2 \sum_{n=0}^N A_n(z, \eta) \operatorname{Re} \left[ \int_{k_c}^{\infty} k^{-n} \sin(ka_0) \exp(-kt) dk \right] \dots \dots \dots (12)$$

ここに  $t = |z - \eta| - i(x - \xi)$  であり、この無限積分は漸化式(付録II参照)を用いることによって解析的に遂行することができる。鉛直面、傾斜面に分布する加振力に対しても同様である。

4. 誤差推定と積分区間の自動分割

(1) 無限区間の誤差推定

無限区間の数値積分に対しては Fig.3 に示すように  $\Delta k = k_{c,i} - k_{c,i-1}$  とし、区間  $[k_{c,i-1}, k_e]$  に基づく近似関数から得られる  $[k_{c,i}, \infty)$  の積分値  $I_{i-1,2}$  と、さらに区間  $[k_{c,i}, k_e]$  に基づく近似関数から得られる  $[k_{c,i}, \infty)$  の積分値  $I_{i,1}$  の誤差  $\epsilon_1$  を次式で定義する。

$$\epsilon_1 = |I_{i-1,2} - I_{i,1}| \dots \dots \dots (13)$$

(2) 有限区間の誤差推定

有限区間が  $L$  個のサブ区間に細分割されたものとする。まず細分割された一つの区間  $\Delta k_l (l=1, 2, \dots, L)$  を考える。この一つの区間に対する積分値の誤差は Chebyshev 多項式の項数を無限としたときの積分値  $I_l$  と有限項(積分次数  $N$ ) で打ち切った場合の積分値  $I_{Nl}$  の差となる。以後の式において被積分関数  $F(k, z, \eta)$  は  $z, \eta$  をパラメーターとする  $k$  の関数と考えて  $F(k)$  と表し、混乱しない限り下添字の  $l$  は省略する。

被積分関数  $F(k)$  を偶関数とすれば、区間  $[a, b], [-b, -a]$  における積分値の和  $I$  は式(9)より次式となる。

$$I = 2 \int_a^b F(k) \operatorname{Re} [\exp(ik(x - \xi))] dk \dots \dots \dots (14)$$

ここで区間  $[a, b]$  において  $F(k)$  を積分次数  $N$  次の有限 Chebyshev 多項式に展開する。

$$F(k) \equiv f(t) = \sum_{m=0}^N C_m T_m(t) \dots \dots \dots (15)$$

ここに、 $k = At + B$

$$A = \frac{b-a}{2} = \Delta k_l / 2, B = \frac{b+a}{2}$$

$$C_m = \frac{2}{N} \sum_{s=0}^N f \left( \cos \frac{s\pi}{N} \right) \cos \frac{ms\pi}{N}$$

$$T_m(t) = \cos(m \cos^{-1} t)$$

$\sum$  は級数項の最初と最後の項は半分にすることを意味する。式(15)を式(14)に代入したときの積分の近似値  $I_N$  は、項別積分が可能であるとすると次式となる。

$$I_N = 2A \sum_{m=0}^N C_m \operatorname{Re} [\exp(i\beta) J_m(\alpha)] \dots \dots \dots (16)$$

ここに、 $\alpha = A(x - \xi), \beta = B(x - \xi)$  であり、

$$J_m(\alpha) = \int_{-1}^1 T_m(t) \exp(i\alpha t) dt \dots \dots \dots (17)$$

である。なお  $J_m(\alpha)$  の詳細な内容は付録IIIに示す。

次に区間  $[a, b]$  において  $F(k)$  を無限 Chebyshev 多項式に展開する。

$$F(k) \equiv f(t) = \frac{1}{2} A_0 + A_1 T_1(t) + A_2 T_2(t) + \dots$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} A_r T_r(t) \dots \dots \dots (18)$$

ここに  $\sum'$  は級数項の最初の項だけを半分にすることを意味する。無限 Chebyshev 多項式の係数  $A_r$  と有限 Chebyshev 多項式の係数  $C_m$  の関係は次式で表される<sup>12)</sup>。

$$C_m = A_m + A_{2N-m} + A_{2N+m} + A_{4N-m} + A_{4N+m} + A_{6N-m} + \dots \dots \dots (19)$$

ここで  $A_{3N}$  以上の項は無視できるものとする、

$$C_m = A_m + A_{2N-m} + A_{2N+m} \quad (m=0, 1, \dots, N-1)$$

$$C_N = 2A_N \dots \dots \dots (20)$$

式(18)を式(14)に代入したときの真の積分値  $I$  は、

$$I = 2A \sum_{r=0}^{\infty} A_r \operatorname{Re} [\exp(i\beta) J_r(\alpha)] \dots \dots \dots (21)$$

となる。ところで、 $J_m(\alpha)$  は  $m$  が偶数のとき実数、奇数のとき虚数である。また  $\exp(i\beta)$  を分解し、式(19)を考慮すると、積分値の誤差  $\epsilon$  は次式となる。

$$\begin{aligned} \epsilon = I - I_N = & 2A \left[ \cos\beta \sum_{r=1}^{N/2} \{J_{N+2r}(\alpha) - J_{N-2r}(\alpha)\} A_{N+2r} \right. \\ & - \sin\beta \sum_{r=1}^{N/2} \{ \operatorname{Im}[J_{N+2r-1}(\alpha)] - \operatorname{Im}[J_{N-2r+1}(\alpha)] \} A_{N+2r-1} \\ & + \cos\beta \sum_{r=1}^{N/2-1} \{J_{2N+2r}(\alpha) - J_{2r}(\alpha)\} A_{2N+2r} \\ & \left. - \sin\beta \sum_{r=1}^{N/2} \{ \operatorname{Im}[J_{2N+2r-1}(\alpha)] - \operatorname{Im}[J_{2r-1}(\alpha)] \} A_{2N+2r-1} \right] \dots \dots \dots (22) \end{aligned}$$

ここで、次式を仮定する。

$$|A_{r+2}/A_r| = K_N \text{ for } r > N+2 \dots \dots \dots (23)$$

この式は通常、解析関数に対して満足され、 $K_N=1/8\sim 1/4$ とする<sup>18)</sup>。これによって、誤差  $\epsilon$  の最大値として次式が定義できる。

$$\epsilon \leq \epsilon_{\max} = 2A \{ |\cos \beta P(\alpha)| + |\sin \beta Q(\alpha)| \} |C_N| \leq \Delta k_l R(\alpha) |C_N| \dots \dots \dots (24)$$

ここに、

$$R(\alpha) = \sqrt{\{P(\alpha)\}^2 + \{Q(\alpha)\}^2}$$

$$P(\alpha) = \left[ \sum_{r=1}^{N/2} \{J_{N+2r}(\alpha) - J_{N-2r}(\alpha)\} K_N^{r-1} + \sum_{r=1}^{N/2-1} \{J_{2N+2r}(\alpha) - J_{2r}(\alpha)\} K_N^{N/2+r-1} \right] / 2$$

$$Q(\alpha) = \left[ \sum_{r=1}^{N/2} \{Im[J_{N+2r-1}(\alpha)] - Im[J_{N-2r+1}(\alpha)]\} K_N^{r-1} + \sum_{r=1}^{N/2} \{Im[J_{2N+2r-1}(\alpha)] - Im[J_{2r-1}(\alpha)]\} K_N^{N/2+r-1} \right] / 2 \dots \dots \dots (25)$$

なお、上式においては式 (19) より  $|A_N| = |A_{N+1}| = |A_{N+2}| = |C_N|/2$  としている。 $F(k)$  が奇関数の場合も同様の過程を経て結局、式 (24) となる。ここで  $R(\alpha)$  の特徴を調べると、偶関数で、 $R(\infty) \rightarrow 0$ 、数値的には  $N=4, K_N=1/4; N=8, K_N=1/4$  の場合を Fig.4 に示したが、 $K_N=1/8$  の場合も同じ様な結果が得られ、 $R(\alpha)_{\max} < 0.8$  となる。したがって、一つの区間の積分値の最大誤差として次の量が定義できる。

$$\epsilon_{2l} = |I_l - I_{Nl}|_{\max} = \Delta k_l R |C_{Nl}| \dots \dots \dots (26)$$

ここに  $R$  は定数であり、上記の数値実験より  $R=0.8$  とする。したがって、有限区間における累積誤差  $\epsilon_2$  は、

$$\epsilon_2 = \sum_{l=1}^L \Delta k_l R |C_{Nl}| \dots \dots \dots (27)$$

ここで、 $|C_{Nl}|$  を各区間において同じになるように区間幅を決定すれば、次のようになる。

$$\epsilon_2 = R |C_N| \sum_{l=1}^L \Delta k_l = R |C_N| k_c \dots \dots \dots (28)$$

なお、式 (25), (26), (27) とも、被積分関数の  $k$  に関する偶関数、奇関数の性質を利用し、 $k$  が負の場合も考慮した値である。

(3) 積分区間の自動分割

全積分区間の誤差  $\epsilon$  は無限区間における誤差  $\epsilon_1$  と有限区間における誤差  $\epsilon_2$  を加えたものである。この誤差  $\epsilon$  が許容誤差  $\epsilon_a$  以内になるように積分区間を決定する。そのために、 $\epsilon_1$  と  $\epsilon_2$  は次の条件式を満たす必要がある。

$$\epsilon_1 \leq p \epsilon_a$$

$$\epsilon_2 \leq (1-p) \epsilon_a, 0 < p < 1 \dots \dots \dots (29)$$

ところが、無限区間の積分値と、有限区間の積分値の割合は被積分関数によって様々あり、 $p$  を一義的に決めることはできない。 $p$  の値を小さく採れば、無限区間における許容誤差が厳しくなり、 $k_c$  の値が大きくなる。 $p$  の

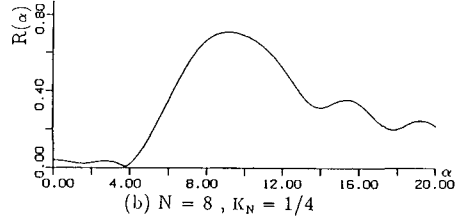
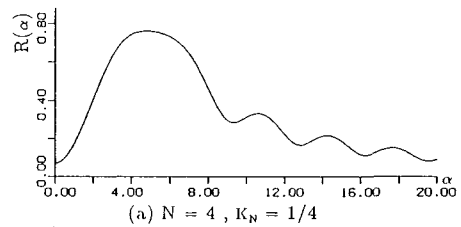


Fig.4 Variation of  $R(\alpha)$  versus  $\alpha$

値を大きくすると逆に有限区間における許容誤差が厳しくなり、サブ区間の幅が小さくなり分割数が増大する。そこで、本研究においては、 $p=1/2$  を採用している。

a)  $k_c$  の推定

$k_c$  の初期値として  $k_{c,0} > 1.0$  を採り、 $\Delta k$  ずつ増加させて式 (11) により  $\epsilon_1$  を計算し、式 (28) を満足するような  $k_c$  の値を求める。通常  $k_{c,0}=1.5, \Delta k=0.5$  を用いている。

b) 有限区間の自動分割

式 (27), (28) より

$$\frac{R k_c}{1-p} |C_N| \leq \epsilon_a \dots \dots \dots (30)$$

一つのサブ区間において、Chebyshev 係数の  $|C_N|$  が式 (30) を満足するように区間を分割していけばよいことになる。一つのサブ区間において、Chebyshev 多項式の次数  $N=4$  の場合を計算し、条件を満たさなければ、 $N=8$  にする。満足すれば次の区間に移る。しかし、条件を満たさなければ 8 分割された細分割区間のそれぞれに対して、 $N=4, N=8$  を適応していく。この操作を次々と繰り返していく。最初は  $[0, k_c]$  が一つの区間であるが、この場合だけは、8 分割されたサブ区間から始める。

ただ、 $|C_N|$  は条件によって非常に小さな値になることがある。そのための検証を次のように行っている。

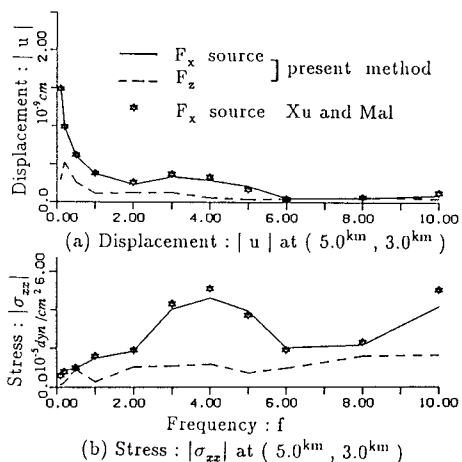
まず、 $|C_N|, |C_{N-1}|, |C_{N-2}|$  の関係は多くの数値実験によれば、 $|C_N|/|C_{N-1}| = r$  とすると  $|C_{N-1}|/|C_{N-2}|$  はおおよそ  $r/2$  となっている。また  $r$  の値は  $|C_N|$  の値によって大きく変化し、一般に  $r < 1.0$  であるが、 $|C_N|$  が小さくなるにつれて  $r$  は非常に小さくなる。したがって、 $r$  の値とは無関係に式 (30) を満足する場合、

$$s = |C_N| |C_{N-2}| / |C_{N-1}|^2 \dots \dots \dots (31)$$

を計算し、 $s \geq 2.0$  の場合は、 $|C_N|$  の値が正常であるとみなし、収束完了とする。ただ、 $s < 2.0$  の場合であっても、

**Table 1** Soil Properties for Case-1

| Thickness (km) | $c_1$ (km/s) | $c_2$ (km/s) | $Q_1$ | $Q_2$ | Density ( $g/cm^3$ ) |
|----------------|--------------|--------------|-------|-------|----------------------|
| 5.0            | 4.0          | 2.5          | 200   | 100   | 2.0                  |
| $\infty$       | 6.4          | 3.7          | 500   | 300   | 2.8                  |



**Fig.5** Comparison with Xu and Mal's result for Case-1 analysis

新たに

$$t = 2|C_{N-1}|^2 / |C_{N-2}| \dots \dots \dots (32)$$

とおき、式 (30) の  $|C_N|$  の代わりに  $t$  を代入し、式 (30) を満足すれば収束完了とする。

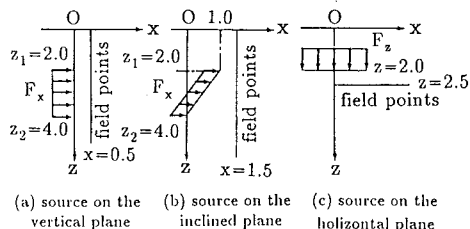
### 5. 数値計算例

本計算法の妥当性を検証するために、Case-1として Xu and Mal<sup>9)</sup> が2層地盤に対して計算した集中地中加振の応答結果と比較する。地盤の物性値を **Table 1** に示す。但し、内部減衰定数は  $\zeta_j = 0.5/Q_j (j=1, 2)$  で与えた。加振源は  $(0, 3^m)$ 、応答点は  $(5^m, 3^m)$  であり振動数領域における加振力は  $F_x = F_z = 1.0$  dyne/cm である。計算結果を **Fig.5** に示す。この計算例では、加振点と応答点間の距離がせん断波長の  $1/5 \sim 20$  となっており、このような状況下では Xu and Mal の結果は妥当性を有することがわかる。

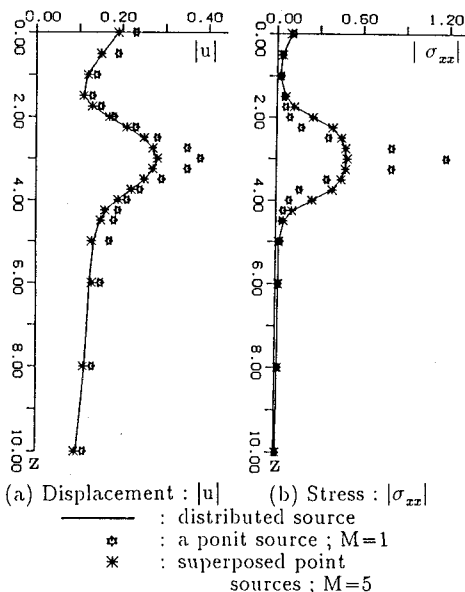
次に、計算例 Case-2として **Table 2** に示すような半無限一様地盤を対象とした。表中の数値は無次元化された値である。加振力は  $F_x = F_z = 1.0$  であり、角周波数  $\omega = 1.0$  (rad/sec) である。分布加振源および応答面の位置関係を **Fig.6** に示す。解析は、分布力加振に対する応答値と集中力加振解を  $M$  個 ( $M=1.5$ ) 重ね合わせて等価なものとしたときの応答値を比較する。その加振力は強度の合計において分布加振合力と一致するように決める。加振位置は加振面を  $M$  等分し、それぞれの中心点とする。

**Table 2** Nondimensional properties for hlaf space media (Case-2)

| Thickness | $c_1$ | $c_2$ | $\zeta_1$ | $\zeta_2$ | Density |
|-----------|-------|-------|-----------|-----------|---------|
| $\infty$  | 2.0   | 1.0   | 0.1       | 0.1       | 1.0     |



**Fig.6** Disposition of the distributed source and the field points for Case-2 analysis



**Fig.7** Comparison of results for the distributed source;  $F_z$  on the vertical plane and superposed point sources

**Fig.7, 8, 9** はそれぞれ鉛直面に  $F_x$  加振、傾斜面に  $F_x$  加振、水平面に  $F_z$  加振を与えたときの応答分布を表したものである。いずれも、分布加振による応答値は、集中加振を5個重ね合わせた場合の応答値とよく一致していることがわかる。また、同一精度の下で各加振状態毎に比較した計算時間は、集中加振の重ね合わせ ( $M=5$ ) による応答分布を得るための計算時間を1.0とすると、鉛直、傾斜、水平面分布加振によるそれらはそれぞれ  $0.4 : 1.3 : 0.3$  であった。傾斜面加振の場合は、水平面、鉛直面加振とは逆に増大しているが、その理由は被積分関数を2つに分解しなければならないことと、加振層の境界近傍の応答点に対して無限積分の収束が非常に遅いためである。なお、境界近傍から応答点を離すと計

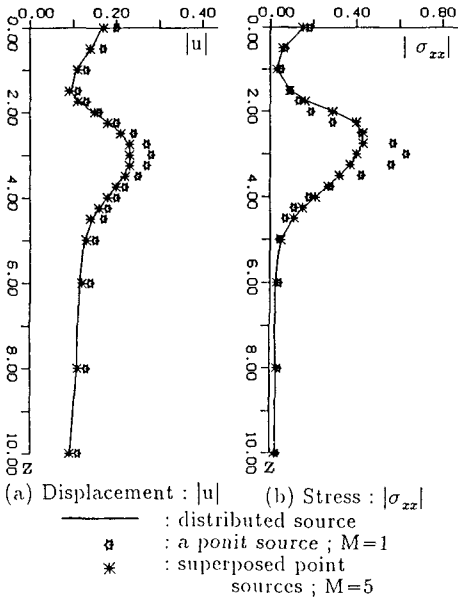


Fig.8 Comparison of results for the distributed source;  $F_x$  on the inclined plane and superposed point sources

算時間の比率は1.0よりも小さくなる。

### 6. むすび

本報告は2次元半無限粘弾性多層地盤における調和集中力、分布力加振に対するグリーン関数の数値計算法を示したもので、直接剛性法による波数領域解からChebyshev多項式展開を用いて直接数値積分するClenshaw-Curtis法を適用する際の、数値計算上、問題になるいくつかの点についてその対処方法を提案した。そして数値解析例によって本手法の妥当性を検証した。その結果は、

(1) 精度のよい波数領域解が地盤の物性値、加振源、応答点位置等の影響を受けずに計算できる。波数積分においては合理的な誤差推定を行うことにより、効率的な波数の自動分割法を用いることができ、要求される精度の振動数領域解が得られる。

(2) 分布力加振に対して、等価規範の下に複数の集中力加振による応答値を重ね合わせた解と比較し、両者の計算結果がよく一致していることを確かめた。その際、計算時間に関しては、傾斜面加振において応答点が加振層の近傍にある場合を除いて、分布力加振を使用した方が、集中力加振を使用するよりも一般に有利になることがわかった。

(3) 分布力加振状態は特異性が低いため、同加振源による応答分布は変位、応力において集中力加振のときと比べて明らかに滑らかになる。このグリーン関数の性質は、実際の構造物と地盤の動的相互作用解析において、

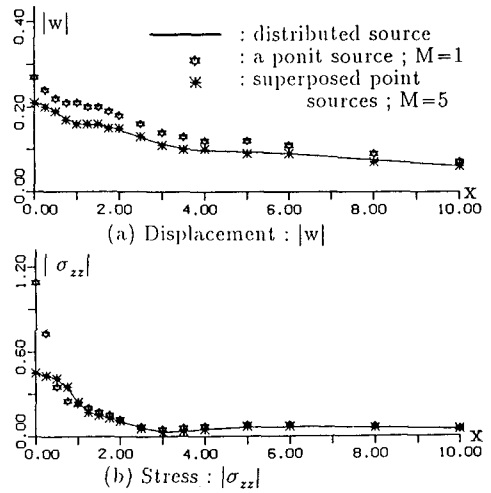


Fig.9 Comparison of results for the distributed source;  $F_2$  on the horizontal plane and superposed point sources

数値計算上有利になる可能性がある。すなわち、地盤インピーダンスを求める際、集中加振源に比べ分布加振源の数を少なく限っても所定の精度を達成できる可能性が期待できる。

### 付録I 直接剛性法

層剛性マトリックスおよび、鉛直面、傾斜面、水平面上の分布力加振に対する特解を求める。その場合、加振幅を含むように仮想層を設ける。前者は斉次解から得られるが、計算上の桁落ち、オーバーフロー防止のため下図の様に分類する。但し、 $h$ は層厚である。なお、本計算においては、指標を  $E1=0.01, E2=30.0$  としている。

a) 層状地盤の剛性行列は、

$$[K] = \frac{\mu}{D_i} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (I \cdot 1)$$

(A-1)

$$D_1 = 2k^2 + (k^4/\nu_1/\nu_2 + \nu_1\nu_2)S_1S_2 - 2k^2C_1C_2$$

$$K_{11} = k_2^2(-\nu_1S_1C_2 + k^2C_1S_2/\nu_2)$$

$$K_{12} = k[(4k^2 - k_2^2)(C_1C_2 - 1) - \{2\nu_1\nu_2 + k^2(2k^2 - k_2^2)/\nu_1/\nu_2\}S_1S_2]$$

$$K_{13} = k_2^2(\nu_1S_1 - k^2S_2/\nu_2)$$

$$K_{14} = kk_2^2(-C_1 + C_2)$$

$$K_{22} = k_2^2(k^2S_1C_2/\nu_1 - \nu_2S_2C_1)$$

$$K_{23} = -K_{14}$$

$$K_{24} = k_2^2(-k^2S_1/\nu_1 + \nu_2S_2)$$

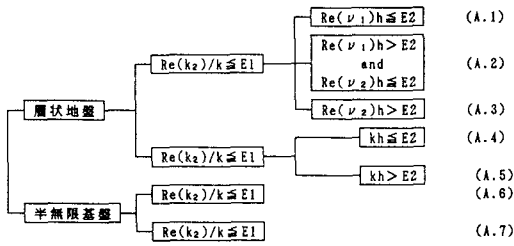


Fig. 1 Classification of stiffness matrix

$$S = \sinh(kh), C = \cosh(kh), H = kh, \varepsilon = k_1/k_2 \quad (A.5)$$

$$[K] = \frac{2\mu k}{1 + \varepsilon^2} \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon^2 & 0 & 0 \\ -\varepsilon^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon^2 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 & 1 \end{bmatrix}$$

b) 半無限基盤の剛性行列は, (A.6)

$$[K_0] = \frac{\mu}{D_6} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

$$D_6 = k^2 - \nu_1 \nu_2$$

$$K_{11} = k_2^2 \nu_1$$

$$K_{12} = K_{21} = k(2\nu_1 \nu_2 + k_2^2 - 2k^2)$$

$$K_{22} = k_2^2 \nu_2$$

(A.7)

$$[K_0] = \frac{2\mu k}{1 + \varepsilon^2} \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon^2 \\ -\varepsilon^2 & 1 \end{bmatrix}$$

外力項は, 特解から求められる.

a) 鉛直面一様分布加振

$$\{\widehat{S}_p(z, k)\} = \{\widehat{S}_p(k)\} =$$

$$\frac{1}{2\pi\rho\omega^2} \begin{bmatrix} k_1^2/\nu_1^2 & 0 \\ 0 & k_2^2/\nu_2^2 \\ 0 & i\mu k k_2^2/\nu_2^2 \\ i\mu k(k_2^2 - 2k_1^2)/\nu_1^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_z \end{Bmatrix}$$

..... (I.2)

b) 傾斜面一様分布力加振の場合

$$\{\widehat{S}_p(z, k)\} = \exp(ika) \{\widehat{S}_{p0}(z, k)\} \dots \dots \dots (I.3)$$

$$\{\widehat{S}_{p0}(z, k)\} = \frac{1}{2\pi\rho\omega^2(c^2 k^2 + \nu_1^2)(c^2 k^2 + \nu_2^2)}$$

$$\begin{bmatrix} c^2 k_2^2 k^2 + k_1^2 \nu_2^2 \\ c(k_2^2 - k_1^2) k^2 \\ i\mu k c \{ (2 - c^2) k_2^2 - 2k_1^2 \} k^2 - k_2^2 \nu_1^2 \\ -i\mu k \{ c^2 k_2^2 k^2 + (2k_1^2 - k_2^2) \nu_2^2 \} \\ c(k_2^2 - k_1^2) k^2 \\ c^2 k_1^2 k^2 + k_2^2 \nu_1^2 \\ i\mu k \{ c^2 k^2 (2k_1^2 - k_2^2) + k_2^2 \nu_1^2 \} \\ -i\mu k c \{ (2 + c^2) k_2^2 - 2k_1^2 \} k^2 + k_2^2 \nu_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_z \end{Bmatrix}$$

..... (I.4)

ここに,

$$a = \xi - cz - d, \xi = (\xi_1 + \xi_2)/2$$

c) 水平面一様分布力加振は, 作用面での不つり合い応力として Heaviside のステップ関数を用いて表せるので,

$$K_{33} = K_{11}, K_{34} = -K_{12}, K_{44} = K_{22}, K_{ij} = K_{ji}$$

ここに,

$$S_j = \sinh(\nu_j h), C_j = \cosh(\nu_j h), j = 1, 2$$

(A.2)

$$D_2 = (k^4/\nu_1/\nu_2 + \nu_1 \nu_2) S_2 - 2k^2 C_2$$

$$K_{11} = k_2^2 (-\nu_1 C_2 + k^2 S_2/\nu_2)$$

$$K_{12} = k[(4k^2 - k_2^2) C_2 - (2\nu_1 \nu_2 + k^2(2k^2 - k_2^2)/\nu_1/\nu_2) S_2]$$

$$K_{13} = k_2^2 (\nu_1 - k^2 E_h/\nu_2)$$

$$K_{14} = k k_2^2 (-1 + E_h)$$

$$K_{22} = k_2^2 (k^2 C_2/\nu_1 - \nu_2 S_2)$$

$$K_{23} = -K_{14}$$

$$K_{24} = k_2^2 (-k^2/\nu_1 + \nu_2 E_h)$$

$$K_{33} = K_{11}, K_{34} = -K_{12}, K_{44} = K_{22}, K_{ij} = K_{ji}$$

ここに,

$$E_h = \exp\{(\nu_2 - \nu_1)h\}$$

(A.3)

$$D_3 = (k^4 + \nu_1^2 \nu_2^2) - 2k^2 \nu_1 \nu_2$$

$$K_{11} = k_2^2 \nu_1 (k^2 - \nu_1 \nu_2)$$

$$K_{12} = k \{ (4k^2 - k_2^2) \nu_1 \nu_2 - 2\nu_1^2 \nu_2^2 - k^2 (2k^2 - k_2^2) \}$$

$$K_{13} = K_{14} = 0$$

$$K_{22} = k_2^2 \nu_2 (k^2 - \nu_1 \nu_2)$$

$$K_{23} = K_{24} = 0$$

$$K_{33} = K_{11}, K_{34} = -K_{12}, K_{44} = K_{22}, K_{ij} = K_{ji}$$

(A.4)

$$D_4 = \{(1 + \varepsilon^2)^2 S^2 - (1 - \varepsilon^2)^2 H^2\} / 2$$

$$K_{11} = k \{ (1 + \varepsilon^2) SC - (1 - \varepsilon^2) H \}$$

$$K_{12} = k \{ -\varepsilon^2 (1 + \varepsilon^2) S^2 + (1 - \varepsilon^2)^2 H^2 \}$$

$$K_{13} = k \{ -(1 + \varepsilon^2) S + (1 - \varepsilon^2) HC \}$$

$$K_{14} = -k(1 - \varepsilon^2) HS$$

$$K_{22} = k \{ (1 + \varepsilon^2) SC + (1 - \varepsilon^2) H \}$$

$$K_{23} = -K_{14}$$

$$K_{24} = -k \{ (1 + \varepsilon^2) S + (1 - \varepsilon^2) HC \}$$

$$K_{33} = K_{11}, K_{34} = -K_{12}, K_{44} = K_{22}, K_{ij} = K_{ji}$$

ここに,



$$\{\widehat{T}\} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(ka_0)}{k} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_z \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (I \cdot 5)$$

$$+ \frac{2i}{\alpha(m-2)} \{ \exp(i\alpha) - (-1)^m \exp(-i\alpha) \} \dots\dots\dots (III \cdot 2)$$

付録Ⅱ 積分  $I_{c,m}I_{s,m}$

傾斜面加振，水平面加振に対する無限区間における積分計算には次式の  $I_{c,m}I_{s,m}$  の値が必要になる。

$$I_{c,m} = \int_{k_c}^{\infty} k^m \cos(ka) \exp(-kt) dk$$

$$I_{s,m} = \int_{k_c}^{\infty} k^m \sin(ka) \exp(-kt) dk \dots\dots\dots (II \cdot 1)$$

ここに  $m=0, -1, \dots, -N$ ，傾斜面加振の場合，  
 $a = \xi - cz_s - d, t = |z - z_s| - i(x - \xi)$   
 水平面加振の場合， $a = a_0, t = |z - \eta| - i(x - \xi)$

i)  $m=0$  の場合

$$I_{c,0} = (t \cos p - a \sin p) \exp(-s) / (a^2 + t^2)$$

$$I_{s,0} = (a \cos p + t \sin p) \exp(-s) / (a^2 + t^2) \dots\dots\dots (II \cdot 2)$$

ここに， $p = k_c a, s = k_c t$   
 ii)  $m=-1$  の場合

$$I_{c,-1} = \{(f_1 + f_2) + i(f_3 - f_4)\} / 2$$

$$I_{s,-1} = \{(f_3 + f_4) + i(-f_1 + f_2)\} / 2 \dots\dots\dots (II \cdot 3)$$

ここに

$$f_1 = Re(g_1), f_2 = Re(g_2)$$

$$f_3 = Im(g_1), f_4 = Im(g_2)$$

$$g_j = \int_{k_c}^{\infty} \frac{\exp(-kh_j)}{k} dk, j=1, 2$$

$$h_1 = |z - z_s| - i(a + (x - \xi)),$$

$$h_2 = |z - z_s| - i(a - (x - \xi))$$

であり  $g_j$  は積分指数関数である<sup>9)</sup>。

iii)  $m \leq -2$  の場合は次の漸化式が使える。

$$I_{c,m} = \{-k_c^{m+1} \cos p \exp(-s) + t I_{c,m+1} + a I_{s,m+1}\} / (m+1)$$

$$I_{s,m} = \{-k_c^{m+1} \sin p \exp(-s) + t I_{s,m+1} - a I_{c,m+1}\} / (m+1) \dots\dots\dots (II \cdot 4)$$

付録Ⅲ 関数  $J_m(\alpha)$

$$J_m(\alpha) = \int_{-1}^1 T_m(t) \exp(i\alpha t) dt$$

の積分値は次式で与えられる。

$$J_0(\alpha) = \frac{2 \sin \alpha}{\alpha}$$

$$J_1(\alpha) = \frac{2i(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)}{\alpha^2}$$

$$J_2(\alpha) = \frac{2(\alpha^2 \sin \alpha - 4 \sin \alpha + 4 \cos \alpha)}{\alpha^3} \dots\dots\dots (III \cdot 1)$$

$m \geq 3$  の場合は次の漸化式が使える。

$$J_m(\alpha) = \frac{2im}{\alpha} J_{m-1}(\alpha) + \frac{m}{m-2} J_{m-2}(\alpha)$$

参 考 文 献

- 1) Lamb, H. : On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, Trans. Phil. Soc. London, Ser. A, pp.1~42, 1904.
- 2) 松岡理・八幡夏恵子：三次元均質等方弾性体動問題の基本解とその応用（その1），日本建築学会論文報告集，第288号，pp.73~84, 1980.；（その2），同論報，第293号，pp.35~44, 1980.；（その3），同論報，第298号，pp.43~53, 1980.
- 3) Kobori, T. et al. : Fast Fourier Transforms for Calculating the Green's Function for Semi-Infinite Soil Media, Development in Geotechnical Engineering, Vol.44, Ed. by A.S. Cakmak, Elsevier, pp.365~374, 1987.
- 4) 小林俊夫：半無限弾性体地表面点加振解の無限積分を有限積分で表す方法（続）内部減衰を考慮する場合，日本建築学会構造系論文報告集，第375号，pp.53~63, 1987.
- 5) Vogt, R.F., Wolf, J.P. and Bachmann, H. : Wave Scattering by a Canyon of Arbitrary Shape in a Layered Half-space, Earthq. Eng. Struc. Dyn., Vol.16, pp.803~812, 1988.
- 6) Harkrider, D.G. : Surface waves in multilayered elastic media, Part I. Rayleigh and Love waves from buried sources in a multilayered elastic half-space, Bull. Seism. Soc. Am. 54, pp.627~680, 1964.
- 7) 平澤光春：3次元多層地盤の地中加振問題の解法—地中加振を用いた地盤—構造物の相互作用解析 I，日本建築学会論文報告集，第343号，pp.51~61, 1984.
- 8) Kundu, T. and Mal, A.K. : Elastic waves in a multilayered solid due to a dislocation source, Wave Motion 7, pp.459~471, 1985.
- 9) Xu, P.C. and Mal, A.K. : Calculation of the inplane Green's functions for a layered viscoelastic solid, Bull. Seism. Soc. Am., Vol.77, No.5, pp.1823~1837, 1987.
- 10) Luco, J.E. and Aspel, R.J. : On the Green's function for layered half-space Part I, Bull. Seism. Soc. Am., Vol.73, No.4, pp.909~929, 1983.
- 11) Kausel, E. and Roesset, J.M. : Stiffness matrices for layered soils, Bull. Seism. Soc. Vol.71, No.6, pp.1743~1761, 1981.
- 12) Clenshaw, C.W. and Curtis, A.R. : A method for numerical integration on an automatic computer, Numer. Math. 2, pp.197~205, 1960.
- 13) Longman, I.M. : A method for the numerical evaluation of finite integrals of oscillatory functions, Math. Comput. 14, pp.53~59, 1960.
- 14) Xu, P.C. and Mal, A.K. : An adaptive integration scheme for irregularly oscillatory functions, Wave Motion 7, pp.235~243, 1985.
- 15) O'Hara, H. and Smith, F.J. : Error estimation in the Clenshaw-Curtis quadrature formula, Comput. 11, pp.213~219, 1968.
- 16) O'Hara, H. and Smith, J.F. : The evaluation of define

integral by interval subdivision, *Comput. 12*, pp.179~182, 1969.

- 17) Dravinski, M. and Mossessian, T.M. : On evaluation of the Green functions for harmonic line loads in a viscoelastic half space, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.26, pp.823~841,

1988.

- 18) 有岡謙一：多層地盤のグリーン関数の計算方法と地震工学問題への応用，岡山大学学位論文，1990.

(1990. 10. 13 受付)

## NUMERICAL EVALUATION OF 2 D-GREEN FUNCTION OF VISCOELASTIC MULTI-LAYERED HALFPLANE FOR CONCENTRATED/DISTRIBUTED FORCES

Hirokazu Takemiya and Kenichi Arioka

In this paper, assuming the 2-dimensional (2-D) plane strain state, the authors have developed an effective and efficient procedure to evaluate the harmonic Green function of a viscoelastic multilayered halfspace medium for buried concentrated/uniformly distributed forces. For the formulation, after the Fourier transform of the governing equation, the direct stiffness method is employed in the wave number domain with a due consideration to the precision problem. In the inverse Fourier transform, the modified Clenshaw-Curtis scheme is applied with a newly proposed criterion for the error estimation. Further, an automatic segmentation process is implemented for the concerned wave number integration based on it. Numerical examples give a validity of the present procedure. The advantage of using the distributed forces for the BEM is pointed. Also, mentioned is the accuracy of the use of the concentrated forces for the equivalent representation of uniformly distributed forces.