

**投稿論文** (和文ノート)

**TECHNICAL  
NOTE**

# 急曲線区間におけるレール波状摩耗と車輪・軌道の動的相互作用

角 知憲\*・佐々木英之\*\*・松本嘉司\*\*\*・大嶋孝二\*\*\*\*

本稿は、急曲線区間における車輪のころがり・すべり摩擦が、輪軸のねじり振動を励起し波状摩耗を発生させる過程に、車輪と軌道の相互作用に起因する輪重変動が与える効果を理論的に検討したものである。検討の結果、ねじり振動が同じ場所で繰り返される場合には、車輪と軌道の動的相互作用がこれを助長して波状摩耗が徐々に成長し、あるいはねじり振動と輪重変動の間で複雑な変調を受けた波形を生じる可能性があることが示された。

**Keywords :** Rail corrugation, torsional vibration, wheel-track interaction, track dynamics

## 1. はじめに

急曲線区間におけるレールの波状摩耗が、列車の曲線通過に伴う輪軸系のねじり自励振動に由来する可能性は、すでに指摘した<sup>1)</sup>。ところで、軌道と走行する車輪との間に生じる動的な相互作用は輪重変動を伴い、摩擦力の変動をもたらす。そのため、上記の自励振動が比較的起こりにくい条件でも、これを助長し変調する効果があり得る。本稿は、この効果を理論的に検討し、前報の論点を補強しようとするものである。

## 2. 曲線通過に伴う輪軸のねじり振動

図-1は、横軸をすべり率  $s$ 、縦軸を摩擦係数  $\mu$  として、車輪とレールのころがり・すべり摩擦係数を示したものである。この図は室内実験結果<sup>2),3)</sup>に基づいて与えてある<sup>1)</sup>。塗油される外軌は同図の「潤滑」に、内軌は「非潤滑」の曲線に相当する。曲線部では、内外軌ですべりが発生する結果、車軸は定常的にねじられた状態で走行している。この時、外軌が、図の  $A_1$  のようにすべり率とともに摩擦力が減少するネガティブダンピングの領域にある一方、内軌のポジティブダンピングが比較的小さい場合、なんらかの攪乱を受けて輪軸の歪エネルギーが解放されると、外軌で補給されるエネルギーが内軌で消費されるエネルギーをうまわまって輪軸に自励振動が発生するというのが、前報で提出した仮説である。ところで、外軌で補給されるエネルギーが内軌で消費されるエネルギーよりもやや小さい  $A_2$  のような場合には、歪エネルギーから転換した運動エネルギーが非潤滑側の摩擦

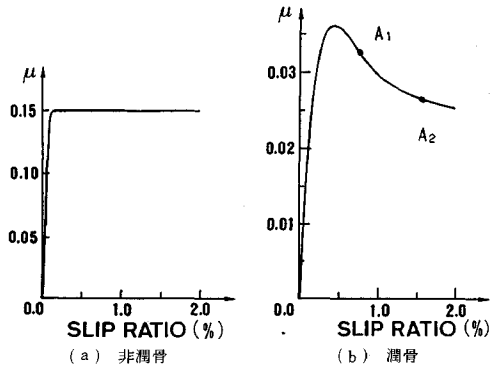


Fig.1 Rolling-slipping friction of two wheels

で消費されるまで、何サイクルかの減衰振動が起こる。この場合でも、結果的に波状摩耗が起き得る。

レール上を走行する輪軸系のねじり振動を計算するためのモデルを図-2に示す。輪軸は、車軸にタイトにはめ込まれた左右の車輪と減速用大歯車からなるものとする。輪軸系のねじりの運動方程式は次のとおりである。

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 + K_1(\theta_1 - \theta_2) + C_1 \dot{\theta}_1 + M_{F1} + M_{Q1} &= 0 \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + K_1(\theta_2 - \theta_1) + K_2(\theta_2 - \theta_3) &= T \\ I_3 \ddot{\theta}_3 + K_2(\theta_3 - \theta_2) + C_3 \dot{\theta}_3 + M_{F3} + M_{Q3} &= 0 \dots\dots(1) \end{aligned}$$

ここに、 $I_1, I_2, I_3$  および  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  はそれぞれ外軌側車輪、減速大歯車、内軌側車輪の回転慣性およびねじれ角、 $K_1, K_2$  は車軸のねじりばね定数、 $C_1, C_2$  は減衰定数(当量0とおく)、 $T$  は駆動トルクである。 $M_{Q1}, M_{Q3}$  は左右輪踏面に、 $M_{F1}, M_{F3}$  はフランジ外縁に作用する摩擦モーメントで、

$$\begin{aligned} M_{Qi} &= r_i W_i \mu_i(s_i), \quad i=1, 3 \\ M_{Fi} &= r_F Q_F \mu_i(s_{Fi}), \quad i=1, 3 \dots\dots(2) \end{aligned}$$

で与えられる。ここに、 $r_F$  はフランジ外縁半径、 $r$  は車輪踏面半径、 $W$  は輪重、 $Q_F$  はフランジ圧、 $s$  はすべり率、

\* 正会員 工博 九州大学教授 工学部土木工学科 (〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)  
 \*\* 正会員 工修 パシフィックコンサルタント(株)  
 \*\*\* 正会員 工博 東京理科大学教授 工学部土木工学科  
 \*\*\*\* 正会員 熊谷組技術研究所

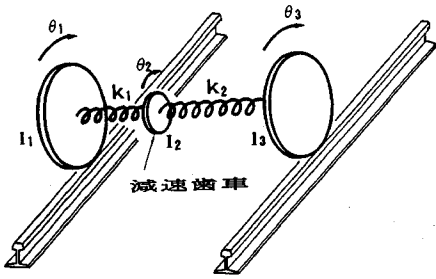


Fig.2 Model of wheel-shaft system

$\mu_i(s_i)$  はころがり・すべり摩擦係数である。  $M_{F1}$  はボギー後軸では0, 逆に  $M_{F3}$  は前軸で0である。 もっとも、通常のスラックの範囲では、後軸でも  $M_{F3}=0$  となる。

定常走行状態では、  $s$  はボギーに作用する力のつりあいから決定されるが<sup>1)</sup>、 計算は複雑であるうえ、 図-1の摩擦係数も確実に与えられておらず、 現状では定量的な議論ができない。 そこで本稿では、 ボギー後軸を想定してフランジの摩擦を無視したうえ (後軸では、フランジはレールにほぼ接触しない<sup>1)</sup>)、 次のように簡便な方法で減衰振動が計算される条件を求め、 これに相互作用を加える計算を行って相対的に比較することにする。 まず、  $T$  には、 曲線抵抗を考慮した定常走行抵抗に見合う値を予め与える<sup>9)</sup>。 次に、  $s$  を次式で与える。

$$s_i = |r_i \omega - V| / V_i, \quad i=1, 3 \dots \dots \dots (3)$$

ここに、  $V_i = R_i \Omega$  であり、  $R_i (i=1, 3)$  は内・外軌の曲率半径、  $\Omega$  は曲率中心まわりの車軸の旋回角速度、  $\omega$  は車輪回転角速度である。  $r_i$  は車輪半径で、 スラックを考慮しつつタイヤ最大半径と踏面勾配から算出する。 こうして得た定常すべり率から輪軸の定常状態のねじれ角を求める。 次に、 前報と同様に攪乱としてそのねじれ角を10%だけ増大させ、 ルンゲ・クッタ・ギル法で以後の輪軸の挙動を計算する。 走行速度 ( $V_i$ の平均値) を40 km/h、 曲線半径 ( $R_i$ の平均値) 200 m、 スラック9 mmとしてこの計算を実行したのが図-3である。 ただし、 非潤滑時の最大摩擦係数は40~60 km/hの実用粘着係数<sup>9)</sup>をとって0.15とした。 この値は前報で用いた値より小さく、 従ってねじり振動の振幅を小さくする。

### 3. 車輪・軌道の動的相互作用

輪重  $W$  に変動を考慮すると、 図-3の減衰振動も減衰しなくなること示すのが本節の目的である。

レールと車輪の相互作用を取り扱うにはフーリエ変換を用いる方法がある<sup>4)</sup>。 図-4のように、 レール上に基準線からの距離  $a(x)$  で表される凹凸があるとす。  $x$  軸はレール軸方向である。 車輪とともに走行する座標系から見ると、 この凹凸は  $a_i(t) = a(x/V)$  で現れる。 ここに、  $t$  は時間である。 走行中、 車輪とレールの接触が保たれるとすると、 両者の変位、  $y_1, y_2$  には、

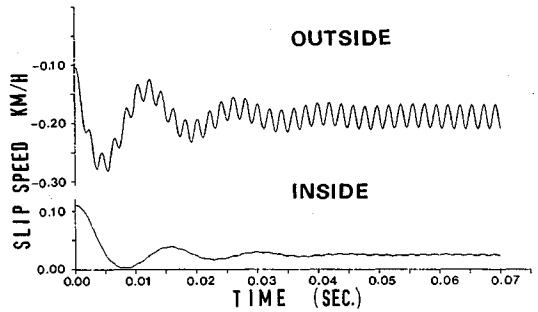


Fig.3 Slip speed of wheels (damped)

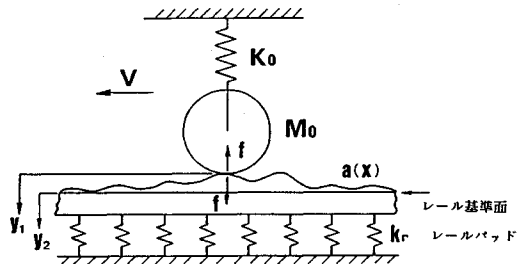


Fig.4 Interaction between wheel and rail

$$y_2(t) - y_1(t) = a_i(t) \dots \dots \dots (4)$$

の関係が成立する。式(4)をフーリエ変換すると、

$$Y_2 - Y_1 = a_i \dots \dots \dots (5)$$

が得られる。ここに、フーリエ変換を次のようにおいた。

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e^{-i\omega t} dt$$

車輪・レールの接触点において、車輪側のスティフネスを  $K_w$ 、レール側のそれを  $K_r$ 、接触点内力を  $f$ 、そのフーリエ変換を  $F$  とする。  $F$  と  $K_w, K_r, Y_1, Y_2$  の間には次の関係がある。

$$F = -K_w Y_1 = K_r Y_2 \dots \dots \dots (6)$$

式(5)、(6)から  $Y_1, Y_2$  を消去して次式が得られる。

$$F = H a_i \dots \dots \dots (7)$$

$$H = \frac{K_w K_r}{K_w + K_r}$$

式(7)を逆変換すれば輪重の変動成分が求められる。これを静的な輪重に付加して式(2)の  $W_i$  に代入すればよい。

$K_w$  は次のようにして求める。剛な車輪が台枠から十分やわらかい軸ばねで取り付けられ、考慮する周波数領域において台枠は疑似静止点とみなしてよいとする。車輪踏面に任意の力  $f_a$  を加えた場合の運動方程式は、

$$M_0 \ddot{y}_1 + C_0 \dot{y}_1 = f_a \dots \dots \dots (8)$$

である。ここに、  $M_0$  は車輪のばね下質量、  $C_0$  は軸ばねダンパーの減衰定数、  $K_0$  は軸ばねのばね定数である。

式(8)式をフーリエ変換すれば、次のように  $K_w$  が

得られる。

$$K_w = F_a / Y_1 = (-\alpha^2 M_0 + i\alpha C_0 + K_0) \dots (9)$$

$K_r$  は次のように求められる。最も簡単な軌道構造として、剛な床の上に弾性層で支えられたレールを持つ軌道を考えよう。レールを無限長の梁とみなし、 $x > Vt$  となる領域のレールについて、曲げ波の伝播方程式を作成する。

$$EIy_2^{(4)} + k_r(1+i\eta)y_2 + m_r \ddot{y}_2 = 0 \dots (10)$$

ここに、 $y_2^{(n)}$  は  $y_2$  の  $x$  に関する  $n$  階の微分、 $\ddot{y}_2$  は  $t$  に関する 2 階微分、 $EI$  はレールの曲げ剛性、 $m_r$  はレールの単位長さ当り質量、 $k_r$  は単位長さ当り支持ばね定数、 $\eta$  は支持ばねの複素損失係数である。境界条件としては、

$$EIy_2^{(3)}|_{x=Vt} = f_a/2 = f_{a0}e^{i\alpha t},$$

$$y_2^{(1)}|_{x=Vt} = 0,$$

$$y_2|_{x=\infty} = 0 \dots (11)$$

を考える。ここに、 $f_{a0}$  はある入力荷重の半振幅である。 $x_1 = x - Vt$  と変数変換し、 $y_2 = Ce^{\gamma x_1} e^{i\alpha t}$  とおいて式 (10) に代入すると次式を得る。

$$\gamma^4 - \{m_r \alpha^2 - k_r(1+i\eta)\} / EI = 0 \dots (12)$$

式 (12) が与える 4 根  $\gamma_j (j=1-4)$  のうち、式 (11) 式の境界条件を満たす 2 根  $\gamma_1, \gamma_2$  を用いて応答変位  $y_2$  が、

$$y_2 = (C_1 e^{\gamma_1 x_1} + C_2 e^{\gamma_2 x_1}) e^{i\alpha t} \dots (13)$$

と表わされる。ここに  $C_1, C_2$  は、式 (11) から、

$$\left. \begin{aligned} C_1 \gamma_1^3 + C_2 \gamma_2^3 &= 1 / (2EI) \\ C_1 \gamma_1 + C_2 \gamma_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

の関係を満たさなければならない。式 (13) に  $x_1 = 0$  を代入したうえ、 $f_a$  を  $y_2$  で割れば  $K_r$  が次のように求められる。

$$K_r = f_a / y_2 = -2EI\gamma_1\gamma_2(\gamma_1 + \gamma_2) \dots (14)$$

そこで、 $a_0$  を波状摩耗の片振幅、 $\alpha_0$  を輪軸のねじりの固有振動数、 $\phi_0$  を位相差として、 $a_t(t)$  を式 (15) で与えれば、輪重の動的成分は、式 (16) で与えられる。

$$a_t(t) = a_0 \cos(\alpha_0 t + \phi_0) \dots (15)$$

$$f(t) = |F(\alpha_0)| \cos(\alpha_0 t + \phi_0 + \phi_1) \dots (16)$$

$$F(\alpha_0) = H \cdot a_0$$

$$\phi_1 = \tan^{-1} [Im\{F(\alpha_0)\} / Re\{F(\alpha_0)\}]$$

ところで、輪軸のねじり振動によりレール摩耗が生じるなら、その基本的な波長は輪軸のねじりの固有振動に対応する。さらに、輪軸のねじりがレール継目など一定の場所をきっかけとして発生して再現性があり、一方、自励振動が発散しない範囲では摩擦係数が小さいほどねじり振動を抑制しないと考えると、ねじり振動を原因とする凹凸に由来する輪重変動とねじり振動とは同位相になる。そこで、式 (16) の与える  $f(t)$  が最小となる  $t$  で式 (1) の与えるすべり速度が最大となるように  $\phi_0$  を

Table 1 Numerical data for a wheel-shaft system

$M_0$	1.56kg·cm/sec <sup>2</sup> (1,530kg)
$K_0$	323kg/mm (3165.4N/mm)
$C_0$	60.8kg·sec/cm (595.84N·sec/cm)
$I_1$	258kg·cm·sec <sup>2</sup> (2.53×10 <sup>5</sup> kg·cm) <sup>2</sup>
$I_2$	201kg·cm·sec <sup>2</sup> (1.97×10 <sup>5</sup> kg·cm) <sup>2</sup>
$I_3$	260kg·cm·sec <sup>2</sup> (2.544×10 <sup>5</sup> kg·cm) <sup>2</sup>
$K_1$	1.14×10 <sup>9</sup> kg·cm/rad. (1.12×10 <sup>10</sup> N·cm/rad.)
$K_2$	8.34×10 <sup>4</sup> kg·cm/rad. (8.17×10 <sup>9</sup> N·cm/rad.)

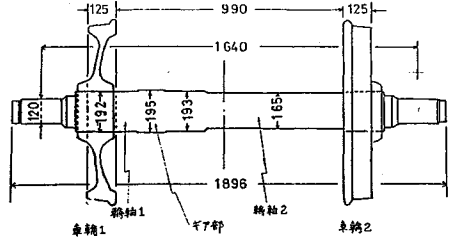


Fig.5 An example of wheel-shaft system

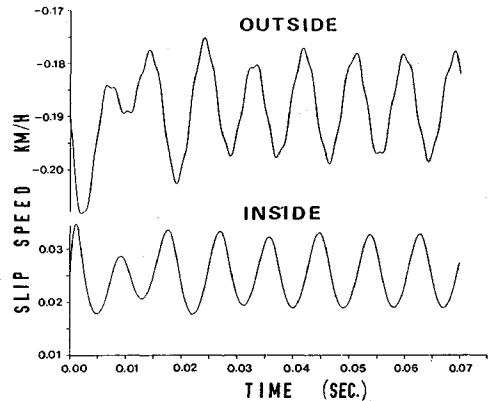


Fig.6 Wheel slip speed

与えて、輪軸のねじり振動を計算することにする。

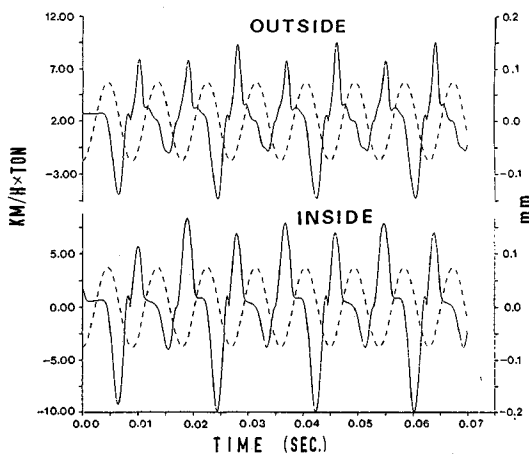
#### 4. 数値計算と考察

##### (1) 輪軸と軌道の構造

以下の計算に必要な輪軸系の概形および輪軸系に関する数値を表-1、図-5に示す。静的輪重は5t、車輪の平均半径は820mm、踏面勾配は1/20である。なお、軌道は、50Nレールを50t/cmの弾性を持つ締結装置で58cm間隔で支持したコンクリート直結道床軌道を想定する。50Nレールの曲げ剛性は411.6×10<sup>7</sup>kg·cm<sup>2</sup>、1m当り重量は50.4kgである<sup>5)</sup>。また、 $\eta$ は、合成ゴムパッドを使用することを想定して0.1とした<sup>6)</sup>。

##### (2) すべり速度

図-3と同じ計算条件に、波高0.15mm(片振幅

Fig.7 Wear index ( $K_v=300 \text{ t/cm/58 cm}$ )

0.75 mm) の凹凸を与えて求めた輪重変動を付加して、車輪のすべり速度を計算してみたのが図-6である。図-3では何サイクルかで減衰した輪軸ねじり振動も、ひとたびレール面に凹凸が形成されると安定的に継続することが分かる。これは、波高がさらに小さくとも同じであった。従って、レール継目など、輪軸のねじり振動のきっかけとなる場所が固定されていると、減衰振動が繰り返されて生じた摩耗が、その後のねじり振動を助長し波状摩耗を時間とともに成長させるといふ推論を可能とする。

### (3) 軌道の動特性の影響

図-7は、レールパッドのばね定数を  $300 \text{ t/cm}$  にとって同様の計算を試みたものである。ただし、縦軸は摩耗速度を表すためすべり速度の絶対値と輪重の積をとった。摩耗量はすべり速度と輪重とに依存するといわれる<sup>7)</sup>。与えた凹凸の波形は破線で示されていて、右めりを使用する。破線と実線を比較すれば分かる通り、摩耗速度には凹凸波形に対応する振動数成分以外の成分が見られる。これは、軌道の振動特性によっては、波状

摩耗の波形が複雑な変調を受ける可能性を示している。

## 5. まとめ

本稿では、軌道と輪軸との垂直方向の相互作用が、輪軸のねじり振動に与える影響を理論的に検討した。その結果、この相互作用は、ネガティブダンピングがそれほど大きくない場合でも輪軸のねじり振動を安定的に継続させ、波状摩耗として成長させるものであることが判明した。さらに、この相互作用は、輪軸のねじり振動に複雑な変調を加えて、ねじりの固有振動数以外の周波数成分を付加する可能性を持つものであると言える。従って、軌道の構造によって波状摩耗を発生させやすい場合とそうでない場合が予想され、曲線区間の軌道構造の動特性も検討する必要があるといえる。

## 参考文献

- 1) 角知憲・松本嘉司・村尾光弘・佐々木英之：急曲線区間における波状摩耗の生成機構について，土木学会論文集，No. 425/IV-14，pp. 99~105，1990.
- 2) 中村林二郎・加藤三郎・田中方孝：レール・タイヤ間の摩擦の模型実験，鉄道技術研究所速報，No. 59~166，1959.
- 3) 丸山弘志・大山忠夫・稲田重男：高速ころがり接触下のすべりと摩擦—高速試験装置の試作と潤滑状態における二三の実験，潤滑，第21巻7号，1976.
- 4) リオン（松本嘉司鑑訳）：交通騒音，pp. 256~259，技報堂，1976.
- 5) 佐藤裕：軌道力学，p. 189，鉄道現業社，1972.
- 6) Snowdon, J.C.: *Vibration and shock in damped mechanical systems*, p.12, John Wiley, 1968.
- 7) 曾田範宗・木村好次・関沢昌美：ころがり—すべり摩擦における摩耗特性の研究，日本機械学会論文集，第3部，37巻303号，1971.
- 8) 木村修：鉄道車両の粘着，潤滑，第16巻11号，pp. 791~799，1971.
- 9) 日本機械学会：機械工学便覧改訂第5版，15，交通，p. 56，1967.

(1991. 2. 20 受付)

## RAIL CORRUGATION AT CURVED TRACKS HAVING SHORT RADIUS AND THE EFFECT OF DYNAMIC INTERACTION BETWEEN WHEEL AND TRACK

Tomonori SUMI, Hideyuki SASAKI, Yoshiji MATSUMOTO and Koji OHSHIMA

Torsional vibration of wheel-shaft system of a vehicle passing a curved track having short radius can be excited by rolling-slipping friction between rail and wheel. This vibration can cause rail corrugation. This paper theoretically considers the effect of the dynamic interaction between rail and wheel on the torsional vibration and shows that the dynamic interaction strengthens the torsional vibration and increases the corrugation even under the condition where the negative damping is relatively small.