

距離測量網の図形調整結果を用いた Free Networkの解法

森 忠次*・町田憲一**

測量網の free network 解は、観測量自身によるその測量網の測点座標の誤差の 2 乗和の最小値を与えるものであって、観測と測量網との両者を総合した誤差を評価するに極めて都合のよい解である。この解を直接求めようとする、正規方程式の係数行列が正則でないため面倒な計算を行わなければならない。ところが、まず最初に測量網の図形調整を行い、その結果を用いて free network 解を求めるといような 2 段階の解法が可能である。この方法の特徴は、論旨がわかり易いことと計算が簡単なことである。

Keywords : free network, control survey, adjustment, error, method of least squares

1. 緒 言

測量網の誤差は測点の座標誤差の推定値によって評価すればよいが、測点座標の誤差は観測量の誤差によるものと網の特性に基づくものとが複合したものである。ある 1 つの測量網を新しく測ったとき、当該測量における観測量の誤差は従来から計算されていたが、当該測量自身に基因する座標誤差を推定する適切な方法がなかった。free network 解法は、これら両者の誤差を同時に推定できるという優れた性質を有するので、盛んに用いられるようになってきたが、工事測量の分野で適用されることが少なかった。その原因はつぎのように推定される。

これまでの free network 解法の説明は、座標調整法（観測方程式法）を前提とした議論であって、そのうえ一般逆行列の概念を導入して論理の展開と計算が行われてきた。もともと、座標調整法の長所は、正規方程式を作る過程が単純であって電子計算機処理に向いていること、多数の基準点に基づいて少数の新しい測点の座標を定めるときには、未知量の個数が少なくてすむことである。ところが、工事測量の分野では、多数の未知測点間の相対的な位置関係を求めることが多く、この状況に適当な方法として、図形調整法（条件式法）をしばしば利用してきた。図形調整法においては、観測量の間に存在する幾何学的な条件を満足させるようにするから、この条件の食い違いの程度、すなわち閉合差を調整のはじめに必ず算出する。したがって、調整計算に先だて、誤った観測値の有無の判断のできることが、大きな長所の 1 つである。もう 1 つの長所は、条件式数が少なければ正規方程式の個数が少なくてすむことである。

そこで、測量網を図形調整法によって調整した後に、

その結果を用いて free network 解を容易に得る方法を示すのが本論文の目的である。ここで提案した方法によれば、free network 解を求めるときに一般逆行列の概念を用いる必要はなく、計算も簡便である。ただし、本論文で取り扱う範囲は、距離測量を行った平面測量網に限定する。

2. Free Network 解

(1) Free Network 解の基本

測点座標の最確値 $\hat{x}^T(\hat{x}_1 \hat{y}_1 \hat{x}_2 \hat{y}_2 \dots)$ を求めるために、それらの点間距離 $L^T = (l_1 l_2 \dots)$ を観測したときの例で説明する。このときには非線形の観測方程式

$$l_i^2 = (x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 \text{ が多数得られる。そこで最確値を、}$$

$$\hat{x} = x + \delta x, \quad \hat{l} = l - v \dots \dots \dots (1)$$

で表す。ここに、 x は指定した近似値、 δx は補正、 v は残差である。そうして観測方程式を線形にして得られた残差方程式がつぎの形になったとする。

$$\left. \begin{aligned} v &= l - Ax = W - A\delta x, \\ W &= l - Ax \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

ここで、すべての座標 δx が未知であれば、 $v^T P v = \min.$ (P は重み行列) という条件のもとで得られる正規方程式

$$A^T P A \delta x = A^T P W \dots \dots \dots (3)$$

において、行列 $A^T P A$ が正則でないので一義的な解が得られない。解を固定するための優れた追加条件として、次のようなものが考えられた。

$$\text{その第一は、測点座標の分散共分散行列を} \\ \Sigma_{xx} = Q_{xx} \sigma_0^2 \dots \dots \dots (4)$$

$$\text{と書くとき、} \\ \text{tr}(Q_{xx}) = \min. \dots \dots \dots (5)$$

を満足させることである¹⁾。ここに、 σ_0 は観測量の標準

* 正会員 工博 岡山大学教授 工学部土木工学科
(〒700 岡山市津島中 3 丁目)

** 正会員 正会員 寒河江工業高等学校教諭 土木科

誤差の大きさの基準値であって、 Q_{xx} は cofactor 行列と呼ばれている。

ここで、cofactor の計算法を示しておく。一般に x が誤差を含んだ量 $z^T = (z_1, z_2, \dots)$ の線形関数

$$x = Fz \dots \dots \dots (6)$$

によって表せるものとする。このときの z の分散共分散行列を $\Sigma = Q\sigma^2$ とするとき、 x の分散共分散行列および cofactor 行列はつぎのように計算できる。

$$\Sigma_{xx} = Q_{xx}\sigma^2, \quad Q_{xx} = FQF^T \dots \dots \dots (7)$$

その第二は、

$$\delta x^T \delta x = \min. \dots \dots \dots (8)$$

という条件が式 (5) と同等であることが示されているので^{2),3)}、この条件を用いることである。なお、式 (8) は、

$$\sum_j \delta x_j = 0 \dots \dots \dots (9)$$

を意味していることになる。

以上の方法で解を得ようとするとき、式 (3) の係数行列 $A^T P A$ が正則でないため、一般逆行列の導入されることが多い⁴⁾。

(2) 特徴

free network 解は以上のとおりであって、ここでは利用上の参考となる特徴を示してみよう。その第一は、当面実施した測量独自の責任による測点座標の誤差を知るための指標が得られることである。座標既知の点が存在しない測量網の調整を行ったとき、測点座標の計算のためには、便宜的に1点と1測線の方向を固定する。このとき固定した点から離れるほど測点の座標誤差が大きくなるため、測点座標誤差の大きさ、ひいては測量網全体としての誤差の程度の統一的理解が困難であった。三角網については、古くから図形の強さ^{5),6)} という誤差評価の指標はあるが、これとても測点の座標誤差そのものを示す指標ではない。

ところが free network 解は、測点座標の標準誤差の2乗和を最小とするものである。何故なら、この量は、

$$\sum_j (\sigma_{xj}^2 + \sigma_{yj}^2) = \sum_j (Q_{xxj} + Q_{yyj}) \sigma_0^2 \dots \dots \dots (10)$$

であって、式 (5) より、 $\text{tr}(Q_{xx}) = \sum_j (Q_{xxj} + Q_{yyj}) = \min.$ となる解であるから、式 (10) は最小となっている。なお、式 (10) の値は座標軸の選び方に無関係な不変量である。

以上のことから、すべての測量網をこの状態において、その座標誤差を比較することには異議がないであろう。

第二の特徴はつぎのとおりである。既設の基準点を再測したときには、式 (1) における x に旧基準点座標値を用いると、新しい測量成果で得られた図形の形を変えることなく、新しい基準点と座標既知の旧基準点との位置ずれ δx が式 (8) を満足するように、新しい測量

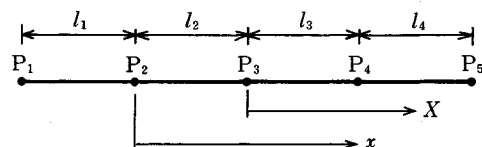


Fig.1 Observation of stations on a straight line

網全体の位置を定め得ることにある。その結果は、式 (9) からわかるように新基準点群の重心を旧基準点群の重心に合わせ、必要に応じて重心のまわりに回転させることになる⁷⁾。わかり易く言えば、あらかじめ任意の座標系に基づいて新しい測量網を調整しておき、その後新測量網全体を移動と回転させることによって、旧基準点の位置に新基準点を近づけることになる。重要なことは、このときに測点座標の cofactor 行列のトレースを最小にしていることである¹⁾⁻³⁾。

新しく実施した測量は、古い時代の測量よりも高精度のことが多いし、新測量が局所的なものであればその区域内では良い精度を持っているはずである。したがって、新測量の成果を、既設基準点座標に無理に一致させることには問題がある。そこで第二の特徴が利用されるようになった。このとき基準点座標の重み P_x に差のあることを考慮に入れて、式 (8) の代わりに $\delta x^T P_x \delta x = \min.$ とすることも行われる⁸⁾。地盤や構造物の経時変動観測のとりまとめにも、このような特徴が利用されるので、数例の文献を示しておく⁹⁾⁻¹¹⁾。

もし座標既知の点が皆無であるとか、点の相対的位置を求めることのみを目的としているときには、式 (1) における x の値を指定する必要がない。このときには x の値を使用しないことになるから、 $x=0$ とすればよく、そのときには式 (1) より $\hat{x} = \delta x$ であるから、式 (8) および (9) より

$$\hat{x}^T \hat{x} = \min, \quad \sum_j \hat{x}_j = 0 \dots \dots \dots (11)$$

となる。すなわち、このとき free network 解は、それ自身の測点群の重心を原点とする座標系に基づいた解であることがわかる。

(3) 簡単な例 (基準点の存在しない場合)

既設の基準点が存在しない場合を考えよう。第二の特徴に記したように、このときの free network 解は、新測点群全体の重心を座標原点に選んだときの測点座標を与えることになる。このような考え方の成立することを説明するために、極めて簡単な問題を解いてみよう。

Fig.1 のように、直線上に等間隔 l_0 で並んだ5点 $P_j (j=1, 2, \dots, 5)$ 間の距離 $l_i (i=1, 2, 3, 4)$ をたがいに独立に測り、それぞれ $l_i = l_0$ (定数) という値を得て、それらの重みはすべて等しくて1であるとする。

点 P_2 を固定してこれを原点とし、右方に x 軸を選ん

Table 1 Cofactor matrix of the coordinates in case of Fig.1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1				
x_2	0	0		symm.	
x_3	0	0	1		
x_4	0	0	1	2	
x_5	0	0	1	2	3

Table 2 Cofactor matrix of the coordinates in case of Fig.1 (free network)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	6/5				
X_2	2/5	3/5		symm.	
X_3	-1/5	0	2/5		
X_4	-3/5	-2/5	0	3/5	
X_5	-4/5	-3/5	-1/5	2/5	6/5

だ場合を考える。各測点座標 x_j は、たとえば、
 $x_4 = l_2 + l_3, x_5 = l_2 + l_3 + l_4$
 というように表されるから、これらの式を用いて式(7)より座標 x の cofactor 行列 Q_{xx} を求めると **Table 1** が得られる。

一方、5点の重心を座標原点とすると、各測点の座標を X_j で表すと、 X_j は、

$$X_j = x_j - \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i \dots \dots \dots (12)$$

で与えられる。したがって、その結果、重心を座標原点としたときの測点座標の cofactor 行列は **Table 2** のようになる。

Table 2 の cofactor が free network 解によるものであって、この行列のトレースは明らかに **Table 1** のものより小さい。なお、**Table 1** のトレースの値は固定する点によって値が変わるが、**Table 2** のトレースの値は1つの測量網について不変かつ最小であることは、4.(1)の例で示される。

3. Free Network 解の誘導

新しく観測した測量網の図形調整法を行って、その結果を利用することを前提としているから、まず図形調整法の概要と本文で使用する仮定ならびに記号を説明する。それに続いて、得られた結果を用いて free network 解の導けることを示す。

(1) 仮定

- i) 楕円体面上の測量ではなく、二次元平面上の測量である。
- ii) 観測量は2点間の水平距離であって、それぞれの分散(少なくとも重み)は既知である。

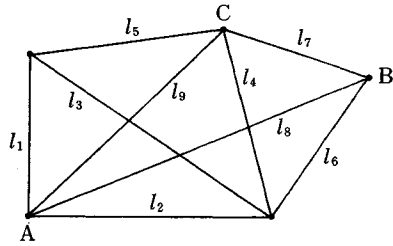


Fig.2 Example of a trilateration network

- iii) 距離の観測はたがいに独立である。
- iv) 外部的な拘束条件はない(たとえ既設の基準点が存在しても、座標値をこれに一致させたり、近づけたりしない)。なお、余剰観測が存在するかどうかは、図形調整の段階の問題であって、本論文に示す方法で free network 解を求める段階では無関係である。このことは例によって説明を加える。

(2) 図形調整

たとえば、**Fig.2** のような9つの辺長 $l^T = (l_1 l_2 \dots l_9)$ を観測した測量網を考えてみよう。 $l_1 \sim l_7$ を用いて定まる図形より算出される距離 AB, AC が、それぞれ l_8, l_9 と等しくならなければならないから、2つの条件式が成立する。これらの式は、周知のように、非線形の式となる¹²⁾。 l_i の図形調整による最確値を \hat{l}_i で表し、これらの式をまとめて

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\hat{l}) &= 0, \\ \hat{l}^T &= (\hat{l}_1 \hat{l}_2 \dots \hat{l}_n) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

と書くことにする。ここで残差を v で表すと、

$$\hat{l} = l - v \dots \dots \dots (14)$$

である。式(13)に式(14)を代入し、式(13)の線形化をはかると、 Φ の l における微係数を A と書くとき、次の形で表すことができる^{13),14)}。

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= Av + W = 0, \\ W &= -Al + A_0 (A_0 \text{ は定数}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

最小二乗法の解は、観測の重みを P 、未定係数を A としたとき、

$$v^T P v - 2A = \min. \dots \dots \dots (16)$$

を満足するものである。これより、つぎの正規方程式を解けばよいことになる。

$$NA + W = 0, \quad N = AP^{-1}A^T \dots \dots \dots (17)$$

測量網の形が不定となるような欠陥のある測量をしないかぎりには、式(17)の行列 N は正則である。そのときには、以下のように必要な値を得ることができる。

$$v = P^{-1}A^T A = -P^{-1}A^T N^{-1}W = P^{-1}A^T N^{-1}(Al - A_0) \dots \dots \dots (18)$$

$$\hat{l} = l - v = (E - P^{-1}A^T N^{-1}A)l + P^{-1}A^T N^{-1}A_0 \dots \dots \dots (19)$$

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{v^T P v}{r}} \dots\dots\dots (20)$$

$$\Sigma \hat{\tau} \hat{\tau} = Q_{\hat{\tau} \hat{\tau}} \sigma_0^2 \dots\dots\dots (21)$$

$$Q_{\hat{\tau} \hat{\tau}} = P^{-1} - P^{-1} A^T N^{-1} A P^{-1} \dots\dots\dots (22)$$

ここに、 E は単位行列、 σ_0 は観測量の重み 1 の標準誤差、 r は条件式数、 $\Sigma \hat{\tau} \hat{\tau}$ は図形調整の結果における観測量の最確値の分散共分散行列である。

ここで得られた諸量は、計算するときに便宜的に選んだ座標系には無関係な値である。また cofactor $Q_{\hat{\tau} \hat{\tau}}$ は、あらかじめ与えた観測量の重み、測量網の形状・寸法および条件式によって定まるものであり、現実の観測量から推定される誤差 σ_0 とは無関係であることにも注意すべきである。

(3) Free Network 解

測点の座標誤差を求めようとするれば、図形調整によってできた推定された図形に対して座標系を導入しなければならない。ところが、座標系の選び方に応じて、測点座標の誤差が大きく変動する。そこで、座標系の選び方に関係なく、しかも当該の測量のみに基因する測点誤差を評価するためには、測点座標の cofactor 行列のトレースが最小値となる状態を設定すればよく、この状態を与えるのが free network 解だと考えればよい。

本節では基準点がない場合を考える。この場合の free network 解は、式 (11) よりつぎの 2 つの条件を満足するものである。

$$v^T P v = \min. \dots\dots\dots (23)$$

$$\hat{x}^T \hat{x} = \min. \dots\dots\dots (24)$$

図形調整で得られた解はすでに式 (23) を満足しているから、free network 解を得る条件は、さらに式 (24) の条件を満足させることと、図形の形を変えないことである。そして図形の形を変えないことは、距離の最確値 \hat{l} を変えないことである。したがって、その解はつぎのようなものである。

図形調整法によって得られた図形に対して適当な座標系を導入したとする。そのときの測点の座標を $x_j, y_j (j = 1, 2, \dots, s)$ 、補正を $\delta x_j, \delta y_j$ とし、free network 解の座標を

$$\hat{x}_j = x_j + \delta x_j, \quad \hat{y}_j = y_j + \delta y_j \dots\dots\dots (25)$$

と書くことにする。そうすると、距離の最確値 \hat{l}_i を変えないという条件は、

$$V_i = (\hat{x}_k - \hat{x}_j)^2 + (\hat{y}_k - \hat{y}_j)^2 - \hat{l}_i^2 = 0 \dots\dots\dots (26)$$

と書けるから、式 (26) の条件のもとで、式 (24) を満足するものが求める解である。式 (25) を式 (26) に代入し、さらにその式を線形にするとつぎのようになる*。

$$\left. \begin{aligned} & -\cos \alpha_i \cdot \delta x_j - \sin \alpha_i \cdot \delta y_j + \cos \alpha_i \cdot \delta x_k \\ & + \sin \alpha_i \cdot \delta y_k + l_i - \hat{l}_i = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_i &= \frac{x_k - x_j}{l_i}, \quad \sin \alpha_i = \frac{y_k - y_j}{l_i}, \\ l_i &= \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2} \end{aligned} \right\}$$

式 (27) は、測量網の図形がただ一つ確定するのに必要かつ十分な辺だけを選び出して作ればよい¹²⁾。その式数は、測点数を s とすれば、 $2s - 3$ 個である。これらの条件式を全部集めたものをつぎの形に書く。

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= B \delta x + B_0 = 0, \\ B_0 &= -\hat{l} + l, \\ \delta x^T &= (\delta x_1 \delta y_1 \delta x_2 \dots \delta y_s) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

式 (25) を式 (24) に代入すると、結局未定係数を $\lambda^T (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r)$ として、

$$(x + \delta x)^T (x + \delta x) - 2 \lambda^T (B \delta x + B_0) = \min. \dots\dots (29)$$

となるような δx を求めればよいことになる。これより

$$\delta x = B^T \lambda - x \dots\dots\dots (30)$$

これを式 (28) に代入して整理すると、

$$\left. \begin{aligned} BB^T \lambda + w &= 0, \\ w &= -\hat{l} + l - Bx \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

図形を一義的に確定させるのに必要かつ十分なだけの辺について条件式 (28) を作れば、式 (31) における行列 BB^T は、正則となる。そうすると以下のように解が求められる。

$$\lambda = -(BB^T)^{-1} w \dots\dots\dots (32)$$

$$\begin{aligned} \delta x &= -B^T (BB^T)^{-1} w - x \\ &= B^T (BB^T)^{-1} (\hat{l} - l) \\ &\quad + B^T (BB^T)^{-1} Bx - x \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x + \delta x \\ &= B^T (BB^T)^{-1} (\hat{l} - l) + B^T (BB^T)^{-1} Bx \dots\dots (34) \end{aligned}$$

式 (34) において、誤差を含んだ量は \hat{l} のみであるから、測点座標の cofactor 行列は、つぎのようになる。

$$Q_{\hat{x} \hat{x}} = Q_{\delta x \delta x} = B^T (BB^T)^{-1} Q_{\hat{\tau} \hat{\tau}} (BB^T)^{-1} B \dots\dots (35)$$

この式注の、 $Q_{\hat{\tau} \hat{\tau}}$ はすでに式 (22) によって求められている。なお、 σ_0 が求められているとすれば、測点座標の分散共分散行列はつぎのようにして算出できる。

$$\Sigma_{\hat{x} \hat{x}} = Q_{\hat{x} \hat{x}} \sigma_0^2 \dots\dots\dots (36)$$

*) 式 (26) は、 $\cos \alpha_i \cdot (\hat{x}_k - \hat{x}_j) + \sin \alpha_i \cdot (\hat{y}_k - \hat{y}_j) - \hat{l}_i = 0$ と書いてもよい。そして図形を平行移動させるだけでこの式を満足させるときには、係数 $\cos \alpha$ および $\sin \alpha$ は定数となる。このときには条件式は x_j, y_j, \dots に関して線形である。なお、式 (27) に数値を入れると $l_i - \hat{l}_i = 0$ となる。

Table 3 Coordinates of the stations in case of Fig.1 (unit : l_0)

Station	1	2	3	4	5
x	-1	0	1	2	3

Table 5 Coordinates of the stations in case of Fig.3 (unit : l_0)

Station	1	2	3	4	5
x	0	1	2	3	4

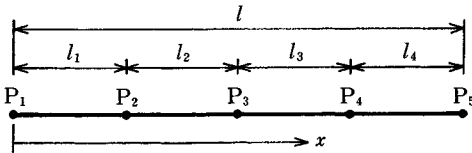


Fig.3 Conditional observation of stations on a straight line

Table 6 Cofactor matrix of the coordinates in case of Fig.3 (free network)

	\hat{x}_1	\hat{x}_2	\hat{x}_3	\hat{x}_4	\hat{x}_5
\hat{x}_1	2/5			symm.	
\hat{x}_2	0	2/5			
\hat{x}_3	-1/5	0	2/5		
\hat{x}_4	-1/5	-1/5	0	2/5	
\hat{x}_5	0	-1/5	-1/5	0	2/5

Table 4 Cofactor matrix of the determined lengths in case of Fig.3

	\hat{l}_1	\hat{l}_2	\hat{l}_3	\hat{l}_4	\hat{l}_5
\hat{l}_1	4/5			symm.	
\hat{l}_2	-1/5	4/5			
\hat{l}_3	-1/5	-1/5	4/5		
\hat{l}_4	-1/5	-1/5	-1/5	4/5	
\hat{l}_5	1/5	1/5	1/5	1/5	4/5

Table 7 Comparison of the standard errors of 4 types of solutions (unit σ_0)

condition	station	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
case (1)	fixed at P_2	1.00	0	1.00	1.41	1.73
	free network	1.10	0.78	0.63	0.78	1.10
case (2)	fixed at P_1	0	0.89	1.10	1.30	1.44
	free network	0.63	0.63	0.63	0.63	0.63

4. 数値計算例

(1) 直線上の点列 (その1, 条件なし)

最も簡単な例として, 2.(3) で示した直線上の点の観測をとりあげる. 前と同様に点 P_2 を座標原点とすると, 各点の座標は **Table 3** のようになる. 観測値の間に条件が存在しないので, 観測量の最確値 l の cofactor 行列は,

$$Q_{\hat{l}\hat{l}} = Q_{ll} = P^{-1} = E \text{ (単位行列)}$$

である.

$$(\hat{x}_{j+1} - \hat{x}_j) - \hat{l}_j = 0, \quad j=1, 2, 3, 4 \dots (37)$$

であるから, 式 (28) はつぎのようになる.

$$\Psi = B\delta x + B_0 = 0, \dots (38)$$

$$\delta x = (\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \delta x_4 \delta x_5) \dots (39)$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} l_1 - \hat{l}_1 \\ l_2 - \hat{l}_2 \\ l_3 - \hat{l}_3 \\ l_4 - \hat{l}_4 \end{pmatrix} \dots (40)$$

これらを用いて 3.(3) に従って計算を進めると, 座標の最確値は,

$$\hat{x}^T = (x + \delta x)^T = (-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2) \times l_0 \dots (41)$$

となり, その cofactor 行列は **Table 2** と同じ値になる. なお, 最初の座標原点の選び方を変えても, free network 解は変わらないことを付言しておく.

(2) 直線上の点列 (その2, 条件付観測)

前例と同じ測点配置のときに, さらに **Fig.3** に示すように全長 l も他の距離と同じ重み 1 で観測したときを考えてみよう. 観測量の間に成立する条件式は,

$$\hat{l}_1 + \hat{l}_2 + \hat{l}_3 + \hat{l}_4 - \hat{l} = 0 \dots (42)$$

であって, 3.(2) に従って図形調整を行った結果, 観測線の cofactor 行列は **Table 4** のように得られる.

今回は, 点 P_1 を座標原点に選んだ図形調整を用いて free network 解を求めてみよう. そうすると, 図形調整の結果, 各点の座標は **Table 5** のようになる. 式 (37) と同じ条件式を採用して計算を進めると, B は式 (40) と全く同じになる. その結果, 最確値 x は前例と等しくなり, $Q_{\hat{l}\hat{l}}$ が異なるのに応じて (**Table 4** における $\hat{l}_1 \sim \hat{l}_4$ に関するもののみを使用すればよい), $Q_{\hat{x}\hat{x}}$ は **Table 6** に示すように, 前例より小さくなる.

このように, 観測量の間に条件が存在していても簡単に解くことができるし, 先に述べたように, 暫定的に選んだ座標系に無関係に, 重心座標系に準拠した測点座標が求められる.

参考のために, これまでに求めた辺長および座標の cofactor を用いて, 測点座標の標準誤差の倍率を表す数, すなわち $\sqrt{Q_{\hat{x}\hat{x}}}$ の大きさ比較したものを **Table 7** に示して置く. 座標を固定すれば, 固定点から遠ざかるにつれて誤差が飛躍的に増加することに留意されたい.

(3) 四辺形 (その1)

Fig.4 のように, 測点数 $s=4$, 観測辺長数 $n=6$ の測量網をとりあげる. 簡単のために, 4 測点は正方形の頂点であって, 観測値は $l_1 = \dots = l_4 = l_0, l_5 = l_6 = \sqrt{2}l_0$ であ

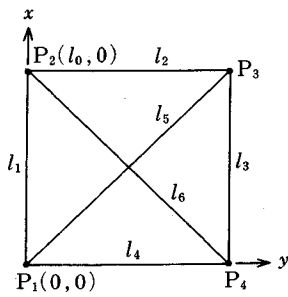


Fig.4 Square with two diagonals (case 1)

Table 8 Coordinates of the stations in case of Fig.4 (unit : l0)

Station	1	2	3	4
x	0	1	1	0
y	0	0	1	1

Table 9 Cofactor matrix of the determined lengths

	\hat{l}_1	\hat{l}_2	\hat{l}_3	\hat{l}_4	\hat{l}_5	\hat{l}_6	unit
\hat{l}_1	7						$\times \frac{1}{8}$
\hat{l}_2	-1	7				symm.	
\hat{l}_3	-1	-1	7				
\hat{l}_4	-1	-1	-1	7			
\hat{l}_5	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	6		
\hat{l}_6	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-2	6	

るとし、いずれの観測値も重みは1であるとする。これは文献15)に示されているものと同じ測量網である。P1を原点とし、P1P2の方向をx軸に選んだ場合について、以下に計算を示そう。

図形調整を行うに当たっての条件式は、つぎの1つだけである。

$$\Phi = \hat{l}_1^2 - 2\hat{l}_1\hat{l}_4 \cos(\hat{\alpha} + \hat{\alpha}') + \hat{l}_4^2 - \hat{l}_6^2 = 0$$

ここに、

$$\cos \hat{\alpha} = \frac{\hat{l}_1^2 + \hat{l}_5^2 - \hat{l}_2^2}{2\hat{l}_1\hat{l}_5}, \quad \cos \hat{\alpha}' = \frac{\hat{l}_4^2 + \hat{l}_5^2 - \hat{l}_3^2}{2\hat{l}_4\hat{l}_5} \quad (43)$$

これを線形化したものは、つぎのようである。

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{W} = 0, \\ \mathbf{v}^T &= (v_1 v_2 \dots v_6), \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \dots (44)$$

以下には、3.(2)に従って解いた結果を示す。

$$N=4, \quad N^{-1}=1/4$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \text{symm.} \\ 1 & 1 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 & & \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 & 2 & \end{pmatrix}$$

Table 10 Coordinates of the stations in case of Fig.4 (free network unit : l0)

Station	1	2	3	4
\hat{x}	-0.5	0.5	0.5	-0.5
\hat{y}	-0.5	-0.5	0.5	0.5

Table 11 Cofactor matrix of the coordinates in case of Fig.4 (free network)

	\hat{x}_1	\hat{y}_1	\hat{x}_2	\hat{y}_2	\hat{x}_3	\hat{y}_3	\hat{x}_4	\hat{y}_4	unit
\hat{x}_1	18								$\times \frac{1}{64}$
\hat{y}_1	2	18						symm.	
\hat{x}_2	-10	6	18						
\hat{y}_2	-6	-6	-2	18					
\hat{x}_3	-2	-2	-6	6	18				
\hat{y}_3	-2	-2	-6	-10	2	18			
\hat{x}_4	-6	-6	-2	2	-10	6	18		
\hat{y}_4	6	-10	2	-2	-6	-6	-2	18	

$$\mathbf{l}^T = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \sqrt{2} \ \sqrt{2}) \times l_0$$

測点の座標および辺長の最確値の cofactor 行列は、それぞれ Table 8 および 9 のように定まるから、これらを用いて free network 解を導いてみよう。

条件式 (26) を構成する辺は5つでよいから、それらを $l_1 \sim l_5$ とすると、式 (28) はつぎのようになる。

$$\Psi = \mathbf{B}\delta\mathbf{x} + \mathbf{B}_0, \dots (45)$$

$$\delta\mathbf{x} = (\delta x_1 \ \delta y_1 \ \delta x_2 \ \dots \ \delta y_4) \dots (46)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} -\hat{l}_1 + l_1 \\ -\hat{l}_2 + l_2 \\ -\hat{l}_3 + l_3 \\ -\hat{l}_4 + l_4 \\ -\hat{l}_5 + l_5 \end{pmatrix} \dots (47)$$

計算の途中で表れる行列の一部を示すとつぎのとおりである。

$$(\mathbf{B}\mathbf{B}^T) = \begin{pmatrix} 2 & & & & & & \\ 0 & 2 & & & & & \text{symm.} \\ 0 & 0 & 2 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2 & & & \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 2 & & \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & & & & & & \\ 1 & 5 & & & & & \text{symm.} \\ 1 & 1 & 5 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 5 & & & \\ -2/\sqrt{2} & -2/\sqrt{2} & -2/\sqrt{2} & -2/\sqrt{2} & 8 & & \end{pmatrix}$$

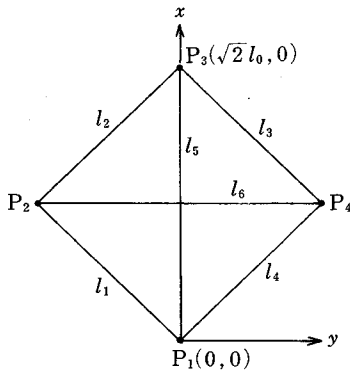


Fig.5 Square with two diagonals (case 2)

Table 12 Coordinates of the stations in case of Fig.5 (free network, unit : l0)

Station	1	2	3	4
\hat{x}	$-1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{2}$	0
\hat{y}	0	$-1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{2}$

Table 13 Cofactor matrix of the coordinates in case of Fig.5 (free network)

	\hat{x}_1	\hat{y}_1	\hat{x}_2	\hat{y}_2	\hat{x}_3	\hat{y}_3	\hat{x}_4	\hat{y}_4	unit
\hat{x}_1	20								$\times \frac{1}{64}$
\hat{y}_1	0	16							
\hat{x}_2	-8	8	16						
\hat{y}_2	-4	-8	0	20					
\hat{x}_3	-4	0	-8	4	20				
\hat{y}_3	0	0	-8	-8	0	16			
\hat{x}_4	-8	-8	0	0	-8	8	16		
\hat{y}_4	4	-8	0	-4	-4	-8	0	20	

計算の結果を Table 10 および 11 に示す。Table 10 の座標原点は測点群の重心となっていることは明らかであり、Table 11 の cofactor 行列は文献 15) の値に一致している。

もし式 (45) において、第 6 番目の測線 l_6 に関する条件を追加したときを考えてみよう。この条件を線形化した式は、

$$\Psi_6 = (1/\sqrt{2})(\delta x_2 - \delta y_2 - \delta x_4 + \delta y_4) - \hat{l}_6 + l_6 = 0$$

であって、この式の未知量の係数をみれば、式 (47) の他の 5 式と線形従属であることがわかる。

(4) 四辺形 (その 2)

前例と同じ測量網に対して、図形調整の結果を Fig.5 のように対角線 P_1P_3 を x 軸に選んで整理したときについて、free network 解を求めた結果を示そう。前例と同様に $l_1 \sim l_5$ の辺を選んで条件式を作ると、

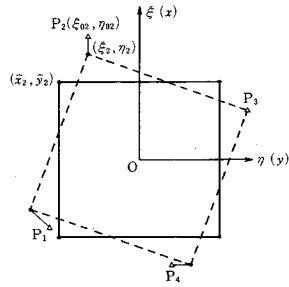


Fig.6 Fitting in control stations

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (48)$$

となる。正規方程式の係数 (BB^T) は前例と同じになり、座標およびその cofactor 行列は Table 12 および Table 13 のようになる。Table 13 と Table 11 とを比べると、行列のトレースが同じ値であるのみならず、各点における $Q_{xx} + Q_{yy}$ が不変量となっていることもわかる。

5. 基準点への当てはめ

(1) 方針

座標既知の旧基準点が存在するとき、新しい測量で free network として得られた測点を、対応する基準点になるべく一致させようとするを考えてみよう。このことは 2. (2) の第二の特徴で示したように、条件式 (8) を成立させればよい。すなわち、対応点間の距離の 2 乗和を最小にすればよい。このことを実現するために図形を動かすときの自由度としては、距離が測られていて寸法が定まっているので、図形の平行移動と回転のみである。ここで両測点群の座標をそれぞれの測定群の重心を座標原点とする座標系で表現しておくことにする。そうすると、図形の回転のみで合わせればよいことになる。

基準点の重心座標系による座標を ξ_{0j}, η_{0j} とし、これに対応する点の free network 解の重心座標系による座標を \hat{x}_j, \hat{y}_j とする (Fig.6 参照)。そうすると、図形に回転 θ を与えて測点の座標を

$$\begin{aligned} \xi_j &= \hat{x}_j \cos \theta - \hat{y}_j \sin \theta \\ \eta_j &= \hat{x}_j \sin \theta + \hat{y}_j \cos \theta \end{aligned} \quad (49)$$

$$F = \sum_j \{ (\xi_{0j} - \xi_j)^2 + (\eta_{0j} - \eta_j)^2 \} = \sum_j \{ (\xi_{0j} - \hat{x}_j \cos \theta + \hat{y}_j \sin \theta)^2 + (\eta_{0j} - \hat{x}_j \sin \theta - \hat{y}_j \cos \theta)^2 \} = \min. \quad (50)$$

を満足する θ を求めればよいことになる。

Table 14 Coordinates of control stations, before and after the fitting

点	1	2	3	4
ξ_0	-0.495	0.525	0.485	-0.515
η_0	-0.505	-0.485	0.515	0.475
\tilde{x}	-0.5	0.5	0.5	-0.5
\tilde{y}	-0.5	-0.5	0.5	0.5
ξ	-0.485	0.515	0.485	-0.515
η	-0.515	-0.485	0.515	0.485

これは簡単な最小二乗法であって、 $\theta = \tilde{\theta} + \delta\theta$ とおくとき、つぎの結果となる。

$$\delta\theta = \frac{\sum_j (A_{ej}\xi_{0j} + A_{nj}\eta_{0j})}{\sum_j (\tilde{x}_j^2 + \tilde{y}_j^2)} \dots\dots\dots (51)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{ej} &= -\tilde{x}_j \sin \tilde{\theta} - \tilde{y}_j \cos \tilde{\theta}, & A_{nj} &= \tilde{x}_j \cos \tilde{\theta} - \tilde{y}_j \sin \tilde{\theta}, \\ L_{ej} &= \tilde{x}_j \cos \tilde{\theta} - \tilde{y}_j \sin \tilde{\theta}, & L_{nj} &= \tilde{x}_j \sin \tilde{\theta} + \tilde{y}_j \cos \tilde{\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

(2) 四辺形の例

例としては Fig.4 をとりあげ、その free network 解である Table 10 の 4 測点の座標を、Table 14 に与えた基準点座標 ξ_0, η_0 になるべく一致させることを考えてみよう。与えた基準点は Fig.6 に示すように点 2, 3, 4 が重心の回りに約 0.04 rad. 回転しているものである。近似値 $\tilde{\theta} = 0$ として計算を進めると $\delta\theta = 0.03$ rad. という答を得る。4 点の平均回転量が得られたわけである。この回転量を用いて計算した測点の座標 ξ, η も Table 14 に記した。

調整状況の概要は Fig.6 のとおりであり、新しい測量の成果(実線で表示)は、旧基準点に関して平均的な位置(破線で表示)に落ち着くことになる。なお、新しい位置での座標の cofactor は式 (49) によって計算すればよい。このとき $\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2$ は不変である。

6. 結 言

測量網の測点座標の誤差は、観測値の誤差、観測値間に存在する条件による影響および網の特性の 3 者が総合して表れるものである。図形調整の結果として得られる観測量の誤差の推定値 $\sqrt{Q_{ii}} \sigma_0$ の内容は、 σ_0 が上記の第一誤差を、 $\sqrt{Q_{ii}}$ が第二の影響を表しているものである。これらの値は当該測量における観測作業に基因する誤差を表す量であるから、Leick¹⁶⁾ も述べているように、まず最初に考慮の対象とすべき値であり、しかも座標系の選択には無関係なものである。第三は式 (35) でわかるように行列 **B** によるものである。 σ_0 と $\sqrt{Q_{ii}}$ が原因となって、式 (35) および (36) に示したように測量網の形に応じて測点の座標誤差が発生する。このときの座標誤差は、選定した座標系によって値が異なるので、当該測量自身の原因による座標誤差を正當に表現できる

条件を実現させたものが free network 解であると考えればよい。

以上のことから、図形調整法というものが、観測作業ならびに測量計画において、依然として重要な役割を有していることがわかる。その特徴の第一は、本文に記したように、閉合差を調べることにより、調整の前段階において誤った観測値の除去・再測のできることである。その第二は、 σ_0 と Q_{ii} とを最初に算出することにより、もとの観測量の誤差および調整後の観測量の誤差の推定量(あるいは条件の付与による推定誤差の減少量)が個別にわかることである。換言すれば、野外観測の責任に基因する誤差の大きさと特徴が初期に明瞭になることである。第三は、本論文で明らかにしたように、free network 解を簡単に算出できることである。この解の座標誤差によって、測量網の総合的な誤差の評価あるいは測量網の特性の把握を行えばよい。なお、場合によっては従来のように、図形調整の結果を用いて、任意の測点と測線方向を座標系に固定して、測点座標およびその誤差を表現することもできる¹²⁾。

本論文では、角測量のみの場合や角と距離とを測った場合などは取り扱っていないが、そのような場合についても類似の方法によって、図形調整の結果から free network 解を得ることができる。これらのことについては、あらためて報告する予定である。

参 考 文 献

- 1) Meissl, P. : Die innere Genauigkeit eines Punkthafens, Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, 50 Jg., S.159~165/186~194, 1962.
- 2) Mittermayer, E. : Eine Verallgemeinerung der Methode der kleinsten Quadrate zur Ausgleichung freier Netze, Zeitschrift für Vermessungswesen, 96 Jg., S.401 ~ 410, 1971.
- 3) Mittermayer, E. : A Generalisation of the Least-Squares Method for the Adjustment of Free Networks, Bull. Géodésique, No.104, pp.139~157, 1972.
- 4) 日本測量協会：現代測量学，第1巻（田島稔），pp.283~285, 1981.
- 5) Gossett, F.R. : Manual of Geodetic Triangulation, U.S. Coast and Geodetic Survey, Special Publ., No.247, pp.267~271, 1959.
- 6) 森 忠次：測量学，第2巻，pp.33~34, 丸善，1981.
- 7) Mittermayer, E. : Zur Ausgleichung freier Netz, Zeitschrift für Vermessungswesen, 97 Jg., S.481~489, 1972.
- 8) Papo, H.B. and Perlmutter, A. : Datum Definition by Free Net Adjustment, Bull. Géodésique, Vol.55, pp.218~226, 1981.
- 9) 原田健久・井沢信雄：地殻水平変動解析の一方法，測地学会誌，14巻，pp.1~6, 1969.
- 10) Ananga, N. : Least-Squares Adjustments of Seasonal Leveling, Proc., ASCE, Vol.117, No.SU 2, pp.67~76, 1991.

-
- 11) Wittenburg, R. : Geodätischer Nachweis rezenter horizontaler Krustenbewegungen auf dem Gebiet der ehemaligen DDR, Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, 98 Jg., S.157-173, 1991.
- 12) たとえば, 町田憲一・森 忠次: 三辺測量網の図形調整と三辺測量鎖の誤差特性, 土木学会論文集, 第 401 号, pp. 51-60, 1989.
- 13) Gotthardt, E. : Einführung in die Ausgleichsrechnung, S.147-148, H. Wichmann Verlag, 1978.
- 14) 森 忠次: 測量学, 第 1 巻, pp. 63-64, 丸善, 1979.
- 15) 文献 4), pp. 285-293.
- 16) Leick, A. : Minimal Constraints in Two-Dimensional Networks, Proc., ASCE, Vol.108, No.SU 2, pp.53-68, 1982.
- (1991. 3. 9 受付)
-

FREE NETWORK SOLUTION BASED ON DISTANCE MEASUREMENTS FROM RESULTS OF ADJUSTMENT BY CONDITION EQUATIONS

Chuji MORI and Ken-ichi MACHIDA

Free network adjustment for a survey network gives us the unique solution with the smallest error of coordinates of stations in the network, and the errors obtained are regarded as a measure for the precision of the survey network. Therefore, many geodetists have been investigating the excellent methods to get a free network solution. All methods developed are based on the method of adjustment by observation equations. The authors, in this paper, attempt to present a simple method for obtaining the solution of a free network by use of the adjusted results of a network by the method of condition equations. The proposed method is easy to understand and simple to compute. Most of surveyors and engineers are familiar with the method of adjustment by condition equations, and this method has an outstanding advantage, that is suitable for finding blunders at early stages. We can obtain the solution of free networks without missing this advantage by use of the proposed method.
