マトリックスの Affin 標示及びその理論

（構造力学に応用せる行列の性質について）

准員　島　田　静　雄*

要旨　高次の不静定構造物の解を得るには，多くの未知数を含む連立一次方程式を解く事に帰する。本文は，行列の演算をベクトル解析により展開し，構造力学における諸問題に1つの見方を与えるものである。

1．定義並びに記号

n 箇の数値 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$ を1組の数の集合と考え，これを n 次元のベクトルと呼び $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$ の数値をベクトルの成分とする。

$$\boldsymbol{A} \equiv \{a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n\} \equiv \{a_k\} \quad \cdots\cdots(1)$$

幾つかのベクトルを区別するには，次の記法に従う。

$$\boldsymbol{A}_1 \equiv \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots\cdots a_{1n}\} \equiv \{a_{1k}\}, \quad \boldsymbol{A}_2 \equiv \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \cdots\cdots a_{2n}\} \equiv \{a_{2k}\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots, \quad \boldsymbol{A}_i \equiv \{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \cdots\cdots a_{in}\} \equiv \{a_{ik}\}$$
$$\boldsymbol{B} \equiv \{b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots b_n\} \equiv \{b_k\}, \quad \boldsymbol{C} \equiv \{c_1, c_2, c_3, \cdots\cdots c_n\} \equiv \{c_k\}$$

特に断らない限りベクトルの次元は常に n（n＝正の整数）とする。n が2ないし3であれば，平面幾何学及び立体幾何学のベクトルの定義はそのまゝ適用できて，ベクトルは空間に規定された方向と大きさを持つ線分と考えることができる。n が4以上の大きさになれば，常識的な理解は通用しなくなる。ベクトルの定義は4次元以上の空間を想像して，その空間に規定された方向と大きさを持つた線分と考えて良い。広義に解釈された n 次元の空間を Affin 空間と呼ぶ。構造力学の問題に，2次又は3次の不静定構造物を取扱うことがあるが，この場合の不静定次数は必ずしも常識的な幾何空間と対応するものではない。この論において定義するベクトルは，数学的な演算こそ2次元のユークリッド線形空間に対応するものとは云え，線分と云う意味よりも1組の数の集合を与える量として理解する必要がある。

2つのベクトル $\boldsymbol{A}$，及び $\boldsymbol{B}$ の和，差，積は次に規定する演算以外のものを含めない。

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} \equiv \{a_1 \pm b_1,\ a_2 \pm b_2,\ a_3 \pm b_3, \cdots\cdots a_n \pm b_n\} \\ (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 + \cdots\cdots a_n \cdot b_n \\ \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{A} \equiv \{\varphi a_1, \varphi a_2, \varphi a_3, \cdots\cdots \varphi a_n\} \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(2)$$

ただし，φ はスカラー

3次のベクトルの積の定義にはスカラー積とベクトル積の2種があるが，n 次のベクトルにベクトル積に対応するものはない。従つて n の任意の正の整数に対して定義できるスカラー積のみを二つのベクトルの積と考える。

2つのベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の積が0であれば，このベクトルは互いに直交すると云う。n 次元の Affin 空間には，互いに直交する n 箇のベクトル $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \cdots\cdots \boldsymbol{A}_n$ が存在し得る。

総べては0でない n 箇のスカラー $k_1, k_2, k_3, \cdots\cdots k_n$ があつて，n 箇のベクトル $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \cdots\cdots \boldsymbol{A}_n$ に関して下式の成立する時，n 箇のベクトルは互いに1次独立であると云い，しからざる時を互いに1次従属であると云う。

$$k_1 \cdot \boldsymbol{A}_1 + k_2 \cdot \boldsymbol{A}_2 + k_3 \cdot \boldsymbol{A}_3 + \cdots\cdots\cdots k_n \cdot \boldsymbol{A}_n \neq 0$$

1次従属であれば n 箇のベクトルの何れにも直交するベクトルが必ず存在する。

n 次の Affin 空間で n 箇の単位ベクトルを次のように定義する。

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{E}_1 \equiv \{1, 0, 0, \cdots\cdots 0\}, \quad \boldsymbol{E}_2 \equiv \{0, 1, 0, \cdots\cdots 0\}, \quad \boldsymbol{E}_3 = \{0, 0, 1, \cdots\cdots 0\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \quad \boldsymbol{E}_n \equiv \{0, 0, 0, \cdots\cdots\cdots 1\} \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(3)$$

2つのベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$，の成分 $a_1, \cdots\cdots a_n$，$b_1, \cdots\cdots b_n$ の積で得られる n^2 箇の数値の集合を次の行列で表わしこれを（Affinor）アフィノールと定義する。

$$\{\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}\} \equiv \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \cdots\cdots\cdots a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \cdots\cdots\cdots a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \cdots\cdots\cdots a_3b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 \cdots\cdots\cdots a_nb_n \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(4)$$

＊　東京大学大学院学生，工学部土木教室

アフィノールの定義を2つのベクトルの積の1種として与えた例を見るが[1]，この論で定義するアフィノールと本質的には異なるものではない。著者はマトリックスの演算に数値を与える具体的に計算する必要上２つのベクトルの積を上式のように定義することの簡便さと実用性を見出だし，これをアフィノールと名づけたものなのである。

アフィノールは，それ自身では意味を持ち得ない数量である。行列として見れば，そのデターミナントは常に0である。アフィノールの重要な働きは，行列の変換に際して媒介的な作用を持ち，種々の興味ある演算を誘導できることにある。具体的な応用例は，そのつど詳しくのべることとし，演算の法則を簡単に示す。

アフィノールの定義から明かなように，$\{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\}$ と $\{\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}\}$ とは一般に等しくない。両者が等しくなるのは，$\boldsymbol{B}\equiv k\boldsymbol{A}$ を満たすようなスカラー k の存在する時に限る。

$$\{\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2)\}\equiv\{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}_1\}+\{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}_2\},\quad \{k\cdot\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\}\equiv\{\boldsymbol{A}\times k\cdot\boldsymbol{B}\}\equiv k\{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\}\cdots\cdots(5)$$

アフィノールとベクトルとの積はベクトルである。

$$\{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\}\times\boldsymbol{C}\equiv(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}\times\{\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}\}\equiv(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}\cdots\cdots(6)$$

アフィノールとアフィノールとの積はアフィノールである。

$$\{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\}\times\{\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}\}\equiv(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\cdot\{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{D}\},\quad \{\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}\}\times\{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\}\equiv(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{A})\cdot\{\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B}\}\cdots\cdots(7)$$

アフィノールの積の演算は総べて行列の演算の法則に従う[2]。

アフィノールとベクトルの積で得られるベクトルと，他のベクトルとの積で得られるスカラーを２つのアフィノールのスカラー積と定義する。

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\}:\{\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}\}&=\{\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}\}:\{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\}=[\{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\}\times\boldsymbol{C}]\cdot\boldsymbol{D}\\&=[\{\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}\}\times\boldsymbol{A}]\cdot\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\cdots\cdots(8)\end{aligned}$$

単位ベクトル $\boldsymbol{E}_i(i=1,2,3,\cdots\cdots n)$ で作られるアフィノールを特に単位アフィノール $\{\boldsymbol{E}_i\times\boldsymbol{E}_j\}$ と呼ぶ。i 並びに j の指数は各々 $1\cdots\cdots n$ までであるから，結局単位アフィノールの種類は n^2 箇存在する。

2つ以上のアフィノールの和並びに差は行列の演算の法則に従う。そしてこれはもはやマトリックスである。

n 箇のベクトル $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\cdots\cdots\boldsymbol{A}_n$ の集合を表わす数学量を，マトリックス $\{\boldsymbol{A}\}$ と呼び下式で示す。

$$\{\{\boldsymbol{A}\}\}\equiv\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots\cdots a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\cdots\cdots a_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\cdots\cdots a_{nn}\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{A}_3\\ \cdots\cdots\\ \boldsymbol{A}_n\end{pmatrix}\equiv\{\{a_{ik}\}\}\cdots\cdots(9)$$

マトリックスの或る１つの行を成分とするベクトルを行ベクトル $\boldsymbol{A}_i\equiv\{a_{i1},a_{i2},a_{i3},\cdots\cdots a_{in}\}$ とし，或る１つの列を成分とするベクトルを列ベクトル $\boldsymbol{A}_k^*\equiv\{a_{1k},a_{2k},a_{3k},\cdots\cdots a_{nk}\}$ と定義する。同じ上のマトリックスを列ベクトル $\boldsymbol{A}_k^*$ で表わせば，

$$\{\{\boldsymbol{A}\}\}\equiv\{\boldsymbol{A}_1^*,\boldsymbol{A}_2^*,\boldsymbol{A}_3^*,\cdots\cdots\boldsymbol{A}_n^*\}\cdots\cdots(10)$$

マトリックス $\{\{\boldsymbol{A}\}\}$ の成分 a_{ik} の行と列とを入れ替えた行列を転置行列 $\{\{\boldsymbol{A}^*\}\}$ と記す。すちはち，

$$\{\{\boldsymbol{A}^*\}\}\equiv\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{A}_3\\ \cdots\\ \boldsymbol{A}_n\end{pmatrix}\equiv\{\boldsymbol{A}_1^*,\boldsymbol{A}_2,{}^*\boldsymbol{A}_3^*,\cdots\cdots\boldsymbol{A}_n^*\},\quad \{\{\boldsymbol{A}^*\}\}\equiv\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^*\\ \boldsymbol{A}_2^*\\ \boldsymbol{A}_3^*\\ \cdots\cdots\\ \boldsymbol{A}_n^*\end{pmatrix}\equiv\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\cdots\cdots\boldsymbol{A}_n\}\cdots\cdots(11)$$

$\boldsymbol{A}_i\equiv\boldsymbol{A}_i^*$ なるマトリックスを対称行列 (Symmetric matrix)，$\boldsymbol{A}_i\equiv-\boldsymbol{A}_i^*$ なる時，交代行列 (Skew symmetric matrix) と呼ぶこともある[3]。マトリックスの記号の書き方は種々あるが，演算の法則を尊重し，記法を簡略にするために，成分 a_{ik} で表わすよりもベクトルの成分で示すのを簡便とする。

２つのマトリックス $\{\{\boldsymbol{A}\}\}$ と $\{\{\boldsymbol{B}\}\}$ との和と差は，

$$\begin{aligned}\{\{\boldsymbol{A}\}\}\pm\{\{\boldsymbol{B}\}\}&\equiv\{\{\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}\}\}\equiv\{\boldsymbol{A}_1^*\pm\boldsymbol{B}_1^*,\boldsymbol{A}_2\pm\boldsymbol{B}_2^*,\boldsymbol{A}_3^*\pm\boldsymbol{B}^*_3\cdots\cdots\boldsymbol{A}_n^*\pm\boldsymbol{B}_n^*\}\\&\equiv\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\pm\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{A}_2\pm\boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{A}_3\pm\boldsymbol{B}_3\\ \cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{A}_n\pm\boldsymbol{B}_n\end{pmatrix}\cdots\cdots(12)\end{aligned}$$

ベクトルとマトリックスとの積はベクトルである。

$$\left.\begin{array}{l}\{\{A\}\}\times B\equiv\{(A_1\cdot B),\ (A_2\cdot B),\ (A_3\cdot B),\cdots\cdots(A_n\cdot B)\}\\ B\times\{\{A\}\}\equiv\{(A_1{}^*\cdot B),\ (A_2{}^*\cdot B),\ (A_3{}^*\cdot B),\cdots\cdots(A_n{}^*\cdot B)\}\end{array}\right\}\cdots\cdots(13)$$

今，上式の積で得られるベクトルを，$V_1\equiv\{\{A\}\}\times B$ 及び $V_2\equiv B\times\{\{A\}\}$ とおけば，マトリックスとアフィノールとの積の演算を次のように表わすことにになる。

$$\{\{A\}\}\times\{B\times C\}\equiv\{V_1\times C\},\quad \{C\times B\}\times\{\{A\}\}\equiv\{C\times V_2\}\cdots\cdots(14)$$

マトリックスとマトリックスとの積はマトリックスを作る。

$$\{\{A\}\}\times\{\{B\}\}\equiv\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\\\cdots\\A_n\end{pmatrix}\times\{B_1{}^*,B_2{}^*,B_3{}^*,\cdots B_n{}^*\}$$

$$\equiv\begin{pmatrix}(A_1\cdot B_1{}^*) & (A_1\cdot B_2{}^*) & (A_1\cdot B_3{}^*)\cdots\cdots(A_1\cdot B_n{}^*)\\ (A_2\cdot B_1{}^*) & (A_2\cdot B_2{}^*) & (A_2\cdot B_3{}^*)\cdots\cdots(A_2\cdot B_n{}^*)\\ (A_3\cdot B_1{}^*) & (A_3\cdot B_2{}^*) & (A_3\cdot B_3{}^*)\cdots\cdots(A_3\cdot B_n{}^*)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ (A_n\cdot B_1{}^*) & (A_n\cdot B_2{}^*) & (A_n\cdot B_3{}^*)\cdots\cdots(A_n\cdot B_n{}^*)\end{pmatrix}\cdots\cdots(15)$$

対角線の成分が総べて1で，他の成分が0であるものを単位マトリックスと呼び，次式で示す。

$$\{\{E\}\}\equiv\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\cdots\cdots 0\\ 0 & 1 & 0\cdots\cdots 0\\ 0 & 0 & 1\cdots\cdots 0\\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots 0\\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots 1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}E_1\\E_2\\E_3\\\cdots\\E_n\end{pmatrix}\equiv\{E_1,E_2,E_3\cdots\cdots E_n\}\cdots\cdots(16)$$

或る2つのマトリックスの積が単位マトリックスになる時，これらは互いに他の逆マトリックスであると云う。(15) 式のマトリックスの積が単位マトリックスになるには成分ベクトルに

$$A_i\cdot B_j{}^*=\delta_{ij}\begin{cases}=0 & i\neq j\\ =1 & i=j\end{cases}\cdots\cdots(17)$$

の関係がある。特に $A_i\cdot B_j{}^*=\delta_{ij}$ である時，$B_j{}^*$ のベクトルを A_i に対する逆ベクトル $A_i{}^{-1}$ の記法を使う。

マトリックス $\{\{A\}\}$ に対する逆マトリックスは

$$\{\{A^{-1}\}\}\equiv\{A_1{}^{-1},A_2{}^{-1},A_3{}^{-1},\cdots\cdots A_n{}^{-1}\},\quad A_i\cdot A_j{}^{-1}=\delta_{ij}\cdots\cdots(18)$$

最後にマトリックスとアフィノールとのスカラー積を定義しておく。(14) 式のマトリックスとアフィノールとの積の記法を使用して

$$\{\{A\}\}:\{B\times C\}=(V_1\cdot C),\quad \{C\times B\}:\{\{A\}\}=(V_2\cdot C)\cdots\cdots(19)$$

以上で，ベクトル，アフィノール，マトリックス相互の関係を簡潔に述べ，演算の法則を定義した。紙数の都合上，詳細を期し難いが，応用を工学問題に限定させるために用語並びに記号を著者自身の独断で定義したものが多い。その点種々の論議が純数学問題として提出されるであろうし，数々の批判も寄せられるであろう。

2. マトリツクスのアフイノールに依る標示

任意の1次独立な n 箇のベクトルを $A_1,A_2,A_3,\cdots\cdots A_n$ とする。或るマトリックス $\{\{M\}\}\equiv\{\{m_{ik}\}\}$ が，$\{A_i\times A_j\}$ のアフィノールに依つて下式のように表わされたものとする。

$$\{\{M\}\}\equiv\begin{pmatrix}b_{11}\{A_1\times A_1\}+b_{12}\{A_1\times A_2\}+b_{13}\{A_1\times A_3\}+\cdots\cdots b_{1n}\{A_1\times A_n\}\\ +b_{21}\{A_2\times A_1\}+b_{22}\{A_2\times A_2\}+b_{23}\{A_2\times A_3\}+\cdots\cdots b_{2n}\{A_2\times A_n\}\\ +b_{31}\{A_3\times A_1\}+b_{32}\{A_3\times A_2\}+b_{33}\{A_3\times A_3\}+\cdots\cdots b_{3n}\{A_3\times A_n\}\\ \cdots\cdots\\ +b_{n1}\{A_n\times A_1\}+b_{n2}\{A_n\times A_2\}+b_{n3}\{A_n\times A_3\}+\cdots b_{nn}\{A_n\times A_n\}\end{pmatrix}\cdots\cdots(20)$$

マトリックスが，上式のように有限個のアフィノールの1次形式で与えられる時，これをマトリックスのアフィノールに依る展開と名づける。展開の方法は，ベクトルの選択の如何によつて各様に表わし得るものであり，例えば (9) 式のマトリックスは，

$$\{\{A\}\}\equiv\left(\begin{array}{l} a_{11}\{E_1\times E_1\}+a_{12}\{E_1\times E_2\}+a_{13}\{E_1\times E_3\}+\cdots\cdots a_{1n}\{E_1\times E_n\} \\ +a_{21}\{E_2\times E_1\}+a_{22}\{E_2\times E_2\}+a_{23}\{E_2\times E_3\}+\cdots\cdots a_{2n}\{E_2\times E_n\} \\ +a_{31}\{E_3\times E_1\}+a_{32}\{E_3\times E_2\}+a_{33}\{E_3\times E_3\}+\cdots\cdots a_{3n}\{E_3\times E_n\} \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +a_{n1}\{E_n\times E_1\}+a_{n2}\{E_n\times E_2\}+a_{n2}\{E_n\times E_3\}+\cdots a_{nn}\{E_n\times E_n\} \end{array}\right)$$

$$\equiv\{E_1\times A_1\}+\{E_2\times A_2\}+\{E_3\times A_3\}+\cdots\cdots+\{E_n\times A_n\}$$

$$\equiv\{A_1{}^*\times E_1\}+\{A_2{}^*\times E_2\}+\{A_3\times E_3\}+\cdots\cdots+\{A_n{}^*\times E_n\} \quad\cdots\cdots(21)$$

特に (20) 式のように1次独立な n 箇のベクトルで作られるアフィノールでマトリックス $\{\{M\}\}$ を展開し，スカラー b_{ik} を得る時，b_{ik} で得られるマトリックスをアフィン変換されたマトリックスと呼び，(20) 式の演算を得る操作をマトリックスのアフィン変換と定義する。

(20) 式は，$\{\{M\}\}\to\{\{B\}\}$ の変換を意味するが，始めの形を全く変化させるものではない。変換と展開とは意義を異にする。$\{\{M\}\}$ を $\{\{B\}\}$ で表わしたものが変換であり，(20) 式のようにアフィノールの代数和として示したのが展開である。

(20) 式を得る操作そのものは簡単である。$A_i{}^{-1}$ を A_j に対する逆ベクトルとすれば，スカラー b_{ik} は

$$b_{ik}=\{\{M\}\}:\{A_k{}^{-1}\times A_i{}^{-1}\} \quad\cdots\cdots(22)$$

(20) 式で得られるアフィン展開で，スカラー b_{ik} によつて作られるマトリックスを $\{\{B\}\}$ とする。$\{\{B\}\}$ はベクトル A_i によつてアフィン変換されたものである。変換そのもの及び得られるマトリックスに関して重要な性質を箇条書きにしてみる。(証明省略)

a) ベクトル $A_i(i=1,2,3,\cdots\cdots n)$ が1次独立であれば，(20) 式のアフィン展開は完全である。1次従属であれば，b_{ik} は不定である。

b) $\{\{M\}\}$ のデターミナント，($\|M\|$ と記す) が0であれば $\|B\|$ も又0である。特に断らない限り，$\{\{M\}\}$ のデターミナントは0でないものとする。

c) $\|M\|\neq0,\ \|B\|=0$ の時は，ベクトル A_i が1次従属である。特に断らなければ A_i は常に1次独立であるとする。

d) $\{\{M\}\}$ が対称マトリックスであれば，$\{\{B\}\}$ も又対称である。逆対称並びに非対称でも $\{\{B\}\}$ は同じく逆対称並びに非対称となる。

e) $\{\{M\}\}$ が対称マトリックスであれば，$\{\{M\}\}$ を対角線マトリックス ($b_{ii}\neq0,\ b_{ij}=0\ i\neq j$) に変換するベクトルが必らず存在し，且つその種類は無限に沢山ある。

$$\{\{M\}\}\equiv b_{11}\{A_1\times A_1\}+b_{22}\{A_2\times A_2\}+b_{33}\{A_3\times A_3\}+\cdots\cdots+b_{nn}\{A_n\times A_n\} \quad\cdots\cdots(23)$$

特にその中でも A_i が互いに独立で且つ直交するものは1種類しかない。特に F_i なるベクトルを定義し，

$$\{\{M\}\}\equiv b_{11}\{F_1\times F_1\}+b_{22}\{F_2\times F_2\}+b_{33}\{F_3\times F_3\}+\cdots\cdots+b_{nn}\{F_n\times F_n\} \quad\cdots\cdots(24)$$

$$F_i\cdot F_j=\delta_{ij}$$

の関係がある時，F_i をマトクックス $\{\{M\}\}$ の主軸ベクトルと定義する。

f) $\{\{M\}\}$ が対称であれば，逆マトリックス $\{\{M^{-1}\}\}$ も対称マトリックスである。A_i に対して $A_i{}^{-1}$ を逆ベクトルとすれば，逆マトリックスのアフィン展開は

$$\{\{M^{-1}\}\}\equiv\frac{1}{b_{11}}\{A_1{}^{-1}\times A_1{}^{-1}\}+\frac{1}{b_{22}}\{A_2{}^{-1}\times A_2{}^{-1}\}+\frac{1}{b_{33}}\{A_3{}^{-1}\times A_3{}^{-1}\} +\cdots\cdots\frac{1}{b_{nn}}\{A_n{}^{-1}\times A_n{}^{-1}\} \quad\cdots\cdots(35)$$

F_i で展開される時は，$F_i\cdot F_j=\delta_{ij}$ を考慮して

$$\{\{M^{-1}\}\}\equiv\frac{1}{b_{11}}\{F_1\times F_1\}+\frac{1}{b_{22}}\{F_2\times F_2\}+\frac{1}{b_{33}}\{F_3\times F_3\}+\cdots\cdots\frac{1}{b_{nn}}\{F_n\times F_n\} \cdots(26)$$

簡単な数値例

今までの説明は総べて記号に依つてマトリックスの性質を云々した。式の具体的な応用は，数値を与えた計算例を見るのが理解に便である。下に示す次の対称マトリックスを扱つてみる。

$$\{\{M\}\}\equiv\begin{bmatrix}4, & 1\\ 1, & 5\end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} M_1\equiv\{4,\ 1\} \\ M_2\equiv\{1,\ 5\}\end{array}$$

任意の1次独立なベクトルと，それに対する逆ベクトルを次のように取るとしよう。

$$A_1 \equiv \{1,2\},\quad A_1^{-1} \equiv \left\{-2, \frac{3}{2}\right\},\quad A_2 \equiv \{3,4\},\quad A_2^{-1} \equiv \{1, -1/2\}$$

A_1^{-1}, A_2^{-1} で得られる4通りのアフィノールは

$$\{A_1^{-1} \times A_1^{-1}\} \equiv \begin{bmatrix} (-2)\times(-2), & (-2)\times(3/2) \\ (3/2)\times(-2), & (3/2)\times(3/2) \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 16, & -12 \\ -12, & 9 \end{bmatrix}$$

$$\{A_1^{-1} \times A_2^{-1}\} \equiv \begin{bmatrix} (-1)\times 1, & (-2)\times(-1/2) \\ (3/2)\times 1, & (3/2)\times(-1/2) \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -8, & 4 \\ 6, & -3 \end{bmatrix}$$

$$\{A_2^{-1} \times A_1^{-1}\} \equiv \begin{bmatrix} 1\times(-2), & 1\times(3/2) \\ (-1/2)\times(-2), & (-1/2)\times(3/2) \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -8 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\{A_2^{-1} \times A_2^{-1}\} \equiv \begin{bmatrix} 1\times 1, & (-1/2)\times 1 \\ 1\times(-1/2), & (-1/2)\times(-1/2) \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4, & -2 \\ -2, & 1 \end{bmatrix}$$

(20) 式に依つて展開するための b_{ik} の数値は (22) 式で示される。

$$\{\{M\}\} : \{A_1^{-1} \times A_1^{-1}\} = \begin{pmatrix} 16\times 4 & -12\times 1 \\ -12\times 1 & +5\times 9 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4} = \frac{85}{4} = b_{11}$$

$$\{\{M\}\} : \{A_1^{-1} \times A_2^{-1}\} = \begin{pmatrix} -8\times 4 & +4\times 1 \\ +6\times 1 & -3\times 5 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4} = -\frac{37}{4} = b_{21}$$

$$\{\{M\}\} : \{A_2^{-1} \times A_1^{-1}\} = \begin{pmatrix} -8\times 4 & +6\times 1 \\ +4\times 1 & -3\times 5 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4} = -\frac{37}{4} = b_{12}$$

$$\{\{M\}\} : \{A_2^{-1} \times A_2^{-1}\} = \begin{pmatrix} 4\times 4 & -2\times 1 \\ -2\times 1 & +1\times 5 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4} = \frac{17}{4} = b_{22}$$

従つて $\{\{M\}\}$ を (20) 式の形で示せば

$$\{\{M\}\} \equiv \frac{85}{4}\{A_1 \times A_1\} - \frac{37}{4}\{A_1 \times A_2\} - \frac{37}{4}\{A_2 \times A_1\} + \frac{17}{4}\{A_2 \times A_1\}$$

$$\equiv \frac{85}{4}\begin{bmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 4 \end{bmatrix} - \frac{37}{4}\begin{bmatrix} 3, & 4 \\ 6, & 8 \end{bmatrix} - \frac{37}{4}\begin{bmatrix} 3, & 6 \\ 4, & 8 \end{bmatrix} + \frac{17}{4}\begin{bmatrix} 9, & 12 \\ 12, & 16 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 4, & 1 \\ 1, & 5 \end{bmatrix}$$

次に示す計算例は，アフィン変換によつて $b_{12}=b_{21}=0$ となるように求めたものである。

$$A_1 \equiv \{1, -1\},\quad A_1^{-1} \equiv \{6/11,\ -5/11\},\quad A_2 \equiv \{5, 6\}$$

$$A_2^{-1} \equiv \{1/11,\ 1/11\}\ b_{11} = 209/121,\qquad b_{22} = 11/121$$

$$\{\{M\}\} \equiv \frac{209}{121}\begin{bmatrix} 1, & -1 \\ -1, & 1 \end{bmatrix} + \frac{11}{121}\begin{bmatrix} 25, & 30 \\ 30, & 36 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 4, & 1 \\ 1, & 5 \end{bmatrix}$$

逆マトリックスは (25) 式によつて

$$\{\{M\}\} \equiv \frac{121}{209}\begin{bmatrix} 36, & -30 \\ -30, & +25 \end{bmatrix} \times \frac{1}{121} + \frac{121}{11}\begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{121} \equiv \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 5, & -1 \\ -1, & 4 \end{bmatrix}$$

2次のマトリックスは非常に簡単で，上記のようにアフィノールの形を与えるまでもなく逆マトリックスの数値を計算するのも容易である。演算の過程は次数が増加してもそれ程複雑とはならず，高次のマトリックスの逆を求める算出においては，慣用されている消去法に比べて演算の精度を少ない労力で上げることができる。

工学問題として提出されるマトリックスは，大抵の場合対称マトリックスである，非対称マトリックスも多くは対称マトリックスの形に帰結して計算することができる。次の機会に対称マトリックスの種々の重要なる性質を述べ，合せて対称マトリックスの逆マトリックスの計算法を詳かにしたい。

参考文献その他

1) 伊藤徳之助：応用ベクトル解析

2) 例えば 藤原松三郎：行列及び行列式　藤原松三郎：代数学　森本清吾：数論　遠山啓：行列論
数学辞典（岩波）　応用数学便覧（丸善）

3) 転置行列を A^t と記すこともある。A^* は複素ベクトルにおける共役転置行列を意味する。ここで取扱ふのは実数ベクトルであるので A^* の記号を使用した。

(昭.31.7.4)