

鋸より加えられる荷重によつて引張りをうける薄板の応力分布

正 員 岡 林 稔*

要旨 鋸より加えられる荷重によつて引張りをうける薄板の引張り応力度分布が鋸孔から離れるに従つて、どのように変化するかを弾性論的に解いたものである。

1) 緒言 繰返し荷重をうける有孔材の引張り強度を知るためには、色々な円孔の配置に対して、応力集中の弾性解を求めておく事が有用であると考え、これに関する研究結果を先に発表した。この有孔材に加えられる引張りが、孔がない場合には断面に一樣に分布すると考えられるときは先に発表した計算を用いれば良いが、比較的近い所にある他の円孔に挿入された鋸によつて引張られているときは、引張り応力が断面に一樣に分布しているとは考え難い。その場合の分布状態がどのように変化していくかを調べておく必要がある。

2) 孔のある二次元単性体の一般解

最初に、孔に加えられる外力がそれ自体では釣合条件を満たしていない場合を、どう取扱うかを考えておかねばならない。先ず2重連結区域(孔が1個の場合)を考える。この解が得られるならば、3重以上の連結区域も同様の方法で解く事ができる。応力関数 ϕ を次のようにおく。

$$\phi = U + yV \dots \dots \dots (1)$$

(但し U 及び V は調和関数である。境界曲線が円の場合には

$$\phi = U + (x^2 + y^2)V, \text{ の形を採用した方が便利である}$$

今 図-1 に示す領域の外側の境界を、その上の任意の点例えば A を起点として矢印の方向に測つた長さを s で表し、境界に立てた内向き法線の方向を n で表し、外側境界に分布する外力の x 方向成分及び y 方向成分(それぞれ x 及び y の正の方向に向いているものを正とする)を p_x 及び p_y で表せば、外側の境界条件式は次の如くなる。

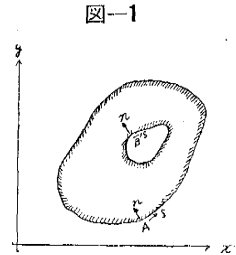


図-1

$$\int_0^s p_x ds = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_S - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_A \dots \dots \dots (2)$$

$$\int_0^s p_y ds = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_S + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_A \dots \dots \dots (3)$$

(但し添字 s は境界上の値なる事を示し、添字 A は A 点における値である事を示す)

これ等に (1) 式を代人すれば次式を得る。

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y} + y \frac{\partial V}{\partial y} + V \right)_S = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_A + \int_0^s p_x ds \dots \dots \dots (4)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial x} \right)_S = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_A - \int_0^s p_y ds \dots \dots \dots (5)$$

同様に内側の境界の長さを、その上の任意の点例えば B を起点として矢印の方向に測り、内側境界に分布する外力の x 方向成分及び y 方向成分を q_x 及び q_y (正の向きは前に同じ) で表せば、内側の境界条件として次式を得る。

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y} + y \frac{\partial V}{\partial y} + V \right)_S = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_B + \int_0^s q_x ds \dots \dots \dots (6)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial x} \right)_B = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_B - \int_0^s q_y ds \dots \dots \dots (7)$$

今外側境界を1周する長さを L , 内側境界のそれを l とすれば、釣合の条件から

$$\int_0^L p_x ds = - \int_0^l q_x ds \quad \int_0^L p_y ds = - \int_0^l q_y ds$$

が成立する。問題を各境界に作用する外力の合力が境界毎に零となる場合としからざる場合とに別けて考える。

1) 境界毎に外力の合力が零となる場合

この場合は

* 名古屋工業大学短期大学教授

$$\int_0^L p_x ds = \int_0^L q_x ds = \int_0^L p_y ds = \int_0^L q_y ds = 0$$

が成立するから、(4)~(7)式の各右辺の値はそれぞれ境界上で不連続を生じない。従つて両境界線に囲まれた内部の何処にも異状点を持たない1価の調和関数の組 $\partial U/\partial y$ 及び V を求め、それ等が(4)~(7)式を満足すればそれが解になる訳であるが、そのような調和関数は上記領域内で正則な複素関数の実数部あるいは虚数部として表される。複素関数論における Laurent の定理によれば、そのような正則関数は外側境界線を境界としてその内部のすべての点で正則な関数と、内側境界線を境界としてその外側のすべての点で正則な関数との和で表される。 $\partial U_1/\partial y$ (あるいは V_1) を前者から得られる調和関数、 $\partial U_2/\partial y$ (あるいは V_2) を後者から得られる調和関数とすれば

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial U_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad V = V_1 + V_2$$

を(4)~(7)式に代入して、4個の未知調和関数を定めるべき連立方程式を得るのは、領域が単連区域の場合¹⁾と殆んど同様である。従つて跋密には、その連立積分方程式を解く事によつて問題は解決する。 $(\partial\phi/\partial y)_A$ 等のうち添字 A 又は B を有するもの一方の組についてはその際、未定常数任意の値を与える事ができる。

ロ) 境界毎には外力の合力が零にならない場合

この場合は

$$\int_0^L p_x ds = \alpha, \quad \int_0^L p_y ds = \beta$$

とすれば、釣合の条件により

$$\int_0^L q_x ds = -\alpha, \quad \int_0^L q_y ds = -\beta$$

となる。従つて(4)~(7)式の各右辺の値は境界を1周した時 α (あるいは β) だけの不連続を生ずる事となる。もし、これを解消する事ができれば問題は 1) の場合に還元する。1つの閉曲線に沿つて1周し、元へ戻つた時、値がある大きさだけ増加するような複素関数は 図-2 において内側境界の更に内部にある任意の点 0 と外側境界の更に外部にある任意の点 $0'$ とに岐点を有するような関数である。そのような関数の1つ例えば $\log z$ (但し 図-2 に示す如く座標軸をとつて、 $z = x + iy = rei^{\theta}$ とする) を考える。都合の良い事にこの関数は1度微分するとその多価性が失われる。この関数の実数部及び虚数部を作ると

$$\text{実数部} = \log r = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2), \quad \text{虚数部} = \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

を得る。今これ等を $\partial U/\partial y$ あるいは V の一部として用いて、 α 及び β に対応させ、しかも変位が不連続にならないようにする事ができれば上記の目的を達する事ができる。

応力関数 $\phi = U + yV$ に対して変位は次式で表される²⁾。 x 方向の変位成分を u , y 方向の変位成分を v で表せば

$$u = -\frac{1}{E} \left\{ (1+\nu) \left(\frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial x} \right) + 2 \bar{V} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

$$v = -\frac{1}{E} \left\{ (1+\nu) \left(\frac{\partial U}{\partial y} + y \frac{\partial V}{\partial y} + V \right) - 2 V \right\} \dots\dots\dots (9)$$

(但し E は弾性係数, ν はポアソン比, \bar{V} は V に対する共軛調和関数)

今
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U'}{\partial y} + \frac{\partial U''}{\partial y}, \quad V = V' + V''$$

とおき

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U''}{\partial x} &= a_1 \log r + a_2 \theta = \frac{a_1}{2} \log(x^2 + y^2) + a_2 \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ V'' &= b_1 \log r + b_2 \theta = \frac{b_1}{2} \log(x^2 + y^2) + b_2 \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

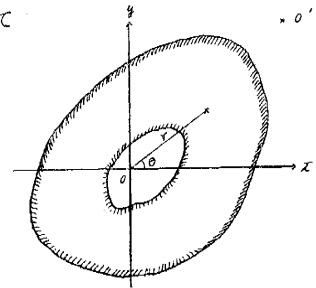
とすれば

$$\frac{\partial U''}{\partial y} = -a_1 \tan^{-1} \frac{y}{x} + \frac{a_2}{2} \log(x^2 + y^2), \quad \bar{V}'' = b_1 \tan^{-1} \frac{y}{x} - \frac{b_2}{2} \log(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial V''}{\partial x} = \frac{b_1 x}{x^2 + y^2} - \frac{b_2 y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial V''}{\partial y} = \frac{b_1 y}{x^2 + y^2} + \frac{b_2 x}{x^2 + y^2}$$

となるが、上記の諸式中、原点を1周した後、値の変るのは $\tan^{-1} y/x$ のみであり、その変化量は 2π である。

図-2



よつて、不連続量 α 及び β に対応させるためには (4)~(7) 式を参照して

$$2\pi(-a_1+b_2)=\alpha, \quad 2\pi a_2=-\beta$$

を満足すればよく、変位を連続ならしめるためには、(8) 及び (9) 式を参照して

$$(1+\nu)a_2+2b_1=0, \quad (1+\nu)a_1+(1-\nu)b_2=0$$

を満足すればよい。よつて上記4個の式を満足するように a_1, b_1 等を定めれば $\partial U''/\partial y$ 及び V'' が定まり、 $\partial U'/\partial y$ 及び V' はこの2重連結区域内に異状点を持たない調和関数となつてイ)の場合に還元する。

3) 鉄孔に挿入された鉄より加えられる外力によつて、引張りをうける薄板

鉄より円孔周縁(その半径を単位にとる。すなわち半径=1)に加わる外力分布の方向はすべて半径方向であり大きさは

$$\frac{3P}{2\sqrt{2}} \cos 2\theta \dots \dots \dots \frac{\pi}{4} > \theta > -\frac{\pi}{4}$$

(但し P は鉄1本が伝える x 方向の力を実際の円孔半径で割つた値である。 θ の上記範囲以外には外力の分布はない)

であると仮定する(図-3 参照)。

なお板の幅及び長さは無限大で、 P に釣合う外力は $x=-\infty$ 上に分布する(強さは無限小だがその合力は P) 引張りであるとする。

今 A を起点として図の如く s を測れば、 $s=\pi-\theta$ となる。よつて外力 q の x 方向成分を q_x 、 y 方向成分を q_y とすれば

$$\left. \begin{aligned} \int_0^s q_x ds &= \int_0^s \frac{3P}{2\sqrt{2}} \cos 2\theta \cos \theta ds = 0 \dots \dots \pi > \theta > \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{P}{4\sqrt{2}} (2\sqrt{2} - 3 \sin \theta - \sin 3\theta) \dots \frac{\pi}{4} > \theta > -\frac{\pi}{4} \\ &= P \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \frac{\pi}{4} > \theta > -\pi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^s q_y ds &= \int_0^s \frac{3P}{2\sqrt{2}} \cos 2\theta \sin \theta ds = 0 \dots \dots \pi > \theta > \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{P}{4\sqrt{2}} (2\sqrt{2} - 3 \cos \theta + \cos 3\theta) \dots \frac{\pi}{4} > \theta > -\frac{\pi}{4} \\ &= 0 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \frac{\pi}{4} > \theta > -\pi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

得る。従つて、これは前節ロ)の場合に該当し

$$\alpha = -P \quad \beta = 0$$

となつている。よつて

$$a_1 = \frac{1-\nu}{4\pi} P, \quad b_2 = -\frac{1+\nu}{4\pi} P$$

を得るから、 $\nu=0.3$ (鋼の場合) とすれば

$$\frac{\partial U''}{\partial y} = -\frac{0.7P}{4\pi} \theta, \quad V'' = -\frac{1.3P}{4\pi} \theta, \quad \frac{\partial U''}{\partial x} = \frac{0.7P}{4\pi} \log r, \quad \bar{V}'' = \frac{1.3P}{4\pi} \log r \dots \dots \dots (13)$$

をそれぞれ、 $\partial U/\partial y$ 及び V の部として考慮しておけば良い事になる。(13) 式のみによる応力関数を ϕ_1 とすれば

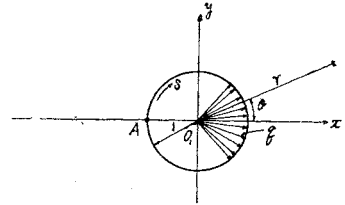
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} &= \frac{P}{2\pi} (\pi - \theta) - \frac{1.3P}{8\pi} \sin 2\theta \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x} &= \frac{1.3P}{8\pi} (1 - \cos 2\theta) + \frac{0.7P}{4\pi} \log r \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

となる。(任意常数を加えても差支えないから $P/2$ を加えて $\theta=\pi$ で $\partial \phi_1/\partial y = \partial \phi_1/\partial x = 0$ になるようにした)。今与えられた外力分布(図-3)から(14)式で与えられる状態を減じた外力分布が円孔周縁に存在すると想定する(そうすれば円孔周縁の外力分布は

$$\int_0^1 Q_x ds = \int_0^1 Q_y ds = 0$$

を満足する)。その x 方向成分を Q_x 、 y 方向成分を Q_y とすれば、円孔の周上で

図-3



$$\left. \begin{aligned} \int_0^s Q_x ds &= -\frac{P}{2\pi}(\pi-\theta) + \frac{1.3P}{8\pi}\sin 2\theta \dots\dots\dots \pi > \theta > \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{P}{2\pi}\left(\theta - \frac{3\pi\sin\theta}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi\sin 3\theta}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{1.3P}{8\pi}\sin 2\theta \dots\dots\dots \frac{\pi}{4} > \theta > \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{P}{2\pi}(\pi+\theta) + \frac{1.3P}{8\pi}\sin 2\theta \dots\dots\dots \frac{\pi}{4} > \theta > -\pi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^s Q_y ds &= \frac{1.3P}{8\pi}(1-\cos 2\theta) \dots\dots\dots \pi > \theta > \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{P}{2\pi}\left(\pi - \frac{3\pi\cos\theta}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi\cos 3\theta}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{1.3P}{8\pi}(1-\cos 2\theta) \dots\dots\dots \frac{\pi}{4} > \theta > \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1.3P}{8\pi}(1-\cos 2\theta) \dots\dots\dots \frac{\pi}{4} > \theta > -\pi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

を得る。この条件を満足する応力関数を ϕ_0 とすれば、 $\phi = \phi_0 + \phi_1$ が求むる応力関数である。

ϕ_0 を次の如くおく。

$$\phi_0 = U_0 + (r^2 - 1)V_0 \text{ (但し } U_0 \text{ 及び } V_0 \text{ は調和関数)} \dots\dots\dots (17)$$

又境界条件は (15) 及び (16) 式より更に次の形にする事ができる¹⁾。円周上では

$$\frac{dx}{ds} = \sin \theta \quad \frac{dy}{ds} = -\cos \theta$$

なる事を考慮して

$$\left. \begin{aligned} (\phi_0)_s &= \int_0^s \left[-\frac{dx}{ds} \int_0^s Q_y ds + \frac{dy}{ds} \int_0^s Q_x ds \right] ds = \frac{P}{2\pi} \{0.35(1+\cos\theta) \\ &\quad - (\pi-\theta)\sin\theta\} \dots\dots\dots \pi > \theta > \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{P}{2\pi} \left\{ 0.35(1+\cos\theta) - \pi\cos\theta + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\cos 2\theta + \theta\sin\theta \right\} \dots\dots\dots \frac{\pi}{4} > \theta > \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{P}{2\pi} \{0.35(1+\cos\theta) + (\pi+\theta)\sin\theta\} \dots\dots\dots \frac{\pi}{4} > \theta > -\pi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial\phi_0}{\partial r}\right)_s &= \frac{dy}{ds} \int_0^s Q_y ds + \frac{dx}{ds} \int_0^s Q_x ds = -\frac{P}{2\pi}(\pi-\theta)\sin\theta \dots\dots\dots \pi > \theta > \frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{P}{2\pi}\left(\pi\cos\theta - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\cos 2\theta - \theta\sin\theta\right) \dots\dots\dots \frac{\pi}{4} > \theta > \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{P}{2\pi}(\pi+\theta)\sin\theta \dots\dots\dots \frac{\pi}{4} > \theta > -\pi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

次に (17) 式より

$$(\phi_0)_{r=1} = (U_0)_{r=1} \dots\dots\dots (20)$$

$$\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial r}\right)_s = \left(\frac{\partial U_0}{\partial r}\right)_{r=1} + 2(V_0)_{r=1} \dots\dots\dots (21)$$

を得る。従つて (18) 式が直ちに U_0 の境界値なる事が判る。よつて、これを Fourier 級数に展開すれば次式を得る

$$\begin{aligned} (U_0)_{r=1} &= \frac{P}{2\pi} \left\{ \left(0.35 - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{31}{60} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\theta + \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\cos 2\theta \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{6\sqrt{2}\cos\frac{n\pi}{4}}{(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)} \cos n\theta \right\} \end{aligned}$$

従つて

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{P}{2\pi} \left\{ \left(0.35 - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{31}{60} - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\cos\theta}{r^2} + \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\frac{\cos 2\theta}{r^2} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{6\sqrt{2}\cos\frac{n\pi}{4}}{(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)} \frac{\cos n\theta}{r^n} \right\} \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

を得る。これより $\partial U_0/\partial r$ が求まるから、それと (21) 式とより V_0 の境界値が定まる。これを前同様 Fourier 級数に展開すれば次式を得る。

$$(V_0)_{r=1} = \frac{P}{2\pi} \left\{ -\frac{3}{4\sqrt{2}} + \left(\frac{41}{120} - \frac{4}{\pi} \right) \cos \theta + \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} \cos 2\theta - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3\sqrt{2} \cos \frac{n\pi}{4}}{(n-2)(n-1)(n+2)} \cos n\theta \right\}$$

従つて

$$V_0 = \frac{P}{2\pi} \left\{ -\frac{3}{4\sqrt{2}} + \left(\frac{41}{120} - \frac{4}{\pi} \right) \frac{\cos \theta}{r} + \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} \frac{\cos 2\theta}{r^2} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3\sqrt{2} \cos \frac{n\pi}{4}}{(n-2)(n-1)(n+2)} \frac{\cos n\theta}{r^n} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

を得る。(22) 式と (23) 式とを (17) 式の形に組合せれば解が得られる訳であるが、これは無限遠で $3P/4\sqrt{2}\pi$ なる強さの様な圧縮をうけている解になつてゐる。それを打消す項を入れて次の正しい結果を得る。

$$\phi_0 = \frac{P}{2\pi} \left\{ -\frac{3}{2\sqrt{2}} \log r + \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} \cos 2\theta + \frac{7}{40} \frac{\cos \theta}{r} - \frac{\pi}{8\sqrt{2}} \frac{\cos 2\theta}{r^2} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3\sqrt{2} \cos \frac{n\pi}{4}}{(n-2)(n-1)(n+2)} \frac{\cos n\theta}{r^{n-2}} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3\sqrt{2} \cos \frac{n\pi}{4}}{(n-2)(n+1)(n+2)} \frac{\cos n\theta}{r^n} \right\}$$

これに (14) 式を考慮して常数項及び x, y の 1 次 の項を省略し

$$\phi = \frac{P}{2\pi} \left\{ -r\theta \sin \theta + 0.35r \cos \theta \log r - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log r + \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} \cos 2\theta + \frac{7}{40} \frac{\cos \theta}{r} - \frac{\pi}{8\sqrt{2}} \frac{\cos 2\theta}{r^2} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3\sqrt{2} \cos \frac{n\pi}{4}}{(n-2)(n-1)(n+2)} \frac{\cos n\theta}{r^{n-2}} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3\sqrt{2} \cos \frac{n\pi}{4}}{(n-2)(n+1)(n+2)} \frac{\cos n\theta}{r^n} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

が所要の解である。(24) 式は r が大きい場合は収斂が良いが $r=1$ の近傍では収斂が悪い。しかし最初の外力分布の仮定が、よく実状を表わしているか否かが疑問であるから $r=1$ の近傍の状態を計算上正しく求めてみても余り意味はない。これに反して、 r が少し大きい点では円孔周縁の外力分布の仮定は余り問題でなく、その x 方向成分の合計が P でありさえすれば、ほぼ同じ結果を与える。よつて r が余り 1 に近くない範囲で議論するものとして (24) 式中の高次の微小量を省略した次式を今後用いる事とする。

$$\phi = \frac{P}{2\pi} \left\{ -r\theta \sin \theta + 0.35r \cos \theta \log r - 1.061 \log r + 0.833 \cos 2\theta + \frac{0.3 \cos 3\theta}{r} + \frac{0.118 \cos 4\theta}{r^2} + \frac{0.175 \cos \theta}{r} - \frac{0.278 \cos 2\theta}{r^2} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

(25) 式の結果は $x = \pm \infty$ における状態が最初の仮定のようにはなつていない。それを正すために、 L を十分大きな正数にとつて、点 $(x = -L, y = 0)$ に中心を有する半径 1 の円孔に 図-3 と全く同様な外力分布の向きだけを反対にしたものを考え、(25)式に相似な応力関数 ψ を求める。これを ϕ に加算すればよい。しかしその影響は直線境界のない場合には、ほとんど問題にならない。

4) 直線境界の影響

前節の状態に $y=h$ で表わされる x 軸に平行な直線境界がある場合を考える。(25) 式及びこれを y 微分したものの $y=h$ における境界値は次のごとくなる。

$$\begin{aligned} (\phi)_{y=h} &= \frac{P}{2\pi} \left\{ -h \tan^{-1} \frac{h}{x} + 0.35x \log \sqrt{x^2+y^2} - 1.061 \log \sqrt{x^2+y^2} + \frac{0.833(x^2-h^2)}{x^2+h^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{0.3(x^3-3h^2x)}{(x^2+h^2)^2} + \frac{0.118(x^4-6h^2x^2+h^4)}{(x^2+h^2)^3} + \frac{0.175x}{x^2+h^2} - \frac{0.278(x^2-h^2)}{(x^2+h^2)^2} \right\} \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{y=h} &= \frac{P}{2\pi} \left\{ -\tan^{-1} \frac{h}{x} - \frac{hx}{x^2+h^2} + \frac{0.35hx}{x^2+h^2} - \frac{1.061h}{x^2+h^2} - \frac{0.833 \times 4hx^2}{(x^2+h^2)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{0.3(10hx^3-6h^3x)}{(x^2+h^2)^3} - \frac{0.118(18hx^4-28h^3x^2+2h^5)}{(x^2+h^2)^4} - \frac{0.35hx}{(x^2+h^2)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{0.278(6hx^2-2h^3)}{(x^2+h^2)^3} \right\} \end{aligned}$$

これを打消す応力関数 ϕ_2 を次の如くおく。

$$\phi_2 = U_2 + (h-y)V_2 \dots\dots\dots (26)$$

(但し U_2 及び V_2 は調和関数)

しかるときは ϕ_2 及び $\partial\phi_2/\partial y$ の境界値は ϕ 及び $\partial\phi/\partial y$ の境界値の符号を変えたものであり、(26) 式より

$$(U_2)_{y=h} = (\phi_2)_{y=h}$$

を得るから応力に無関係な項を省略して次式を得る。

$$U_2 = \frac{P}{2\pi} \left[0.65 h \tan^{-1} \frac{2h-y}{x} - 0.35 x \log \sqrt{x^2 + (2h-y)^2} + 0.35(2h-y) \tan^{-1} \frac{2h-y}{x} \right. \\ \left. + 1.061 \log \sqrt{x^2 + (2h-y)^2} + \frac{1.666 h(2h-y)}{x^2 + (2h-y)^2} - \frac{0.475 x}{x^2 + (2h-y)^2} + \frac{1.2 hx(2h-y)}{\{x^2 + (2h-y)^2\}^2} \right. \\ \left. + \frac{0.16\{x^2 - (2h-y)^2\}}{\{x^2 + (2h-y)^2\}^2} + \frac{0.236 h\{3x^2(2h-y) - (2h-y)^3\}}{\{x^2 + (2h-y)^2\}^3} \right] \dots\dots\dots (29)$$

又 (26) 式より

$$\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial y} \right)_{y=h} = \left(\frac{\partial U_2}{\partial y} \right)_{y=h} - (V_2)_{y=h}$$

となるから V_2 の境界値が得られ、従つて V_2 が次の如く求められる。

$$V_2 = \frac{P}{2\pi} \left[-1.35 \tan^{-1} \frac{2h-y}{x} - \frac{1.3 hx}{x^2 + (2h-y)^2} - \frac{3.788(2h-y)}{x^2 + (2h-y)^2} - \frac{3.332 h\{x^2 - (2h-y)^2\}}{\{x^2 + (2h-y)^2\}^2} \right. \\ \left. - \frac{3.1 x(2h-y)}{\{x^2 + (2h-y)^2\}^2} - \frac{2.4 h\{x^3 - 3x(2h-y)^2\}}{\{x^2 + (2h-y)^2\}^3} + \frac{0.404\{3x^2(2h-y) - (2h-y)^3\}}{\{x^2 + (2h-y)^2\}^3} \right. \\ \left. - \frac{1.416 h\{x^4 - 6x^2(2h-y)^2 + (2h-y)^4\}}{\{x^2 + (2h-y)^2\}^4} \right] \dots\dots\dots (30)$$

(29) 式及び (30) 式を (26) 式の形に組合せて、点 $(x=0, y=2h)$ を原点とする極座標 (ρ_1, φ_1) に直せば次式を得る。

$$\phi_2 = \frac{P}{2\pi} \left[-0.65 h \varphi_1 - 0.35 \rho_1 \cos \varphi_1 \log \rho_1 + 0.35 \rho_1 \varphi_1 \sin \varphi_1 + 1.061 \log \rho_1 - \frac{1.666 h \sin \varphi_1}{\rho_1} \right. \\ \left. - \frac{0.475 \cos \varphi_1}{\rho_1} - \frac{0.6 h \sin 2\varphi_1}{\rho_1^2} + \frac{0.16 \cos 2\varphi_1}{\rho_1^2} - \frac{0.236 h \sin 3\varphi_1}{\rho_1^3} \right] \\ - \frac{P}{2\pi} (h + \rho_1 \sin \varphi_1) \left[1.35 \varphi_1 - \frac{1.3 h \cos \varphi_1}{\rho_1} + \frac{3.788 \sin \varphi_1}{\rho_1} - \frac{3.332 h \cos 2\varphi_1}{\rho_1^2} \right. \\ \left. + \frac{1.55 \sin 2\varphi_1}{\rho_1^2} - \frac{2.4 h \cos 3\varphi_1}{\rho_1^3} - \frac{0.404 \sin 3\varphi_1}{\rho_1^3} - \frac{1.416 h \cos 4\varphi_1}{\rho_1^4} \right] \dots\dots\dots (31)$$

よつて ϕ に ϕ_2 を加算すれば、直線境界 $y=h$ に外力の分布がよい解が得られるが、 ϕ_2 を加算したため最初の円孔周縁に多少の影響を与える事になるから、更にこれを打消さねばならない。(31) 式を極座標 (r, θ) で展開し高次の微小量を省略し、且つ応力に無関係な項を省略すれば、次式を得る。

$$\phi_2 = \frac{P}{2\pi} \left\{ \left(-\frac{1.3 r^2 \sin 2\theta}{8h} - \frac{2.271 r^2 \cos 2\theta}{8h^2} + \frac{1.95 r^3 \cos 3\theta}{48h^2} \right) \right. \\ \left. + (r^2 - 1) \left(\frac{0.456}{8h^2} - \frac{0.05 r \cos \theta}{16h^2} \right) \right\}$$

故に

$$(\phi_2)_{r=1} = \frac{P}{2\pi} \left(-\frac{1.3 \sin 2\theta}{8h} - \frac{2.271 \cos 2\theta}{8h^2} + \frac{1.95 \cos 3\theta}{48h^2} \right) \\ \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial r} \right)_{r=1} = \frac{P}{2\pi} \left(\frac{0.456}{4h^2} - \frac{0.05 \cos \theta}{8h^2} - \frac{1.3 \sin 2\theta}{4h} - \frac{2.271 \cos 2\theta}{4h^2} + \frac{1.95 \cos 3\theta}{16h^2} \right)$$

となる。 $r=1$ において、この影響を打消す応力関数 ϕ_3 を次の如くおく。

$$\phi_3 = U_3 + (r^2 - 1)V_3 \dots\dots\dots (32)$$

(但し U_3 及び V_3 は調和関数)

しかるときは

$$(\phi_3)_{r=1} = -(\phi_2)_{r=1}, \quad \left(\frac{\partial\phi_3}{\partial r} \right)_{r=1} = -\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial r} \right)_{r=1}, \quad (\phi_3)_{r=1} = (U_3)_{r=1}$$

であるから、 U_3 が定まる。すなわち

$$U_3 = \frac{P}{2\pi} \left(\frac{1.3 \sin 2\theta}{8hr^2} + \frac{2.271 \cos 2\theta}{8h^2 r^2} - \frac{1.95 \cos 3\theta}{48h^2 r^3} \right) \dots\dots\dots (33)$$

となる。これより $\partial U_3/\partial r$ を求めれば V_3 の境界値が定まり、従つて V_3 が定まる。すなわち

$$V_3 = \frac{P}{2\pi} \left(-\frac{0.228}{4h^2} + \frac{0.025 \cos \theta}{8h^2 r} + \frac{1.3 \sin 2\theta}{4hr^2} + \frac{2.271 \cos 2\theta}{4h^2 r^2} - \frac{1.95 \cos 3\theta}{16h^2 r^3} \right) \dots\dots\dots (34)$$

となる。(33) 式と (34) 式とを (32) 式の形に組合せれば ϕ_3 を得る訳であるが、それは無限遠で強さ $0.228 P/4\pi h^2$ なる一様な圧縮をうけたものになっている。よつて、それを打消す項を入れて次の結果を得る。

$$\phi_3 = \frac{P}{2\pi} \left\{ \left(-\frac{0.114}{h^2} \log r - \frac{1.3 \sin 2\theta}{8hr^2} + \frac{2.271 \cos 2\theta}{8h^2r^2} - \frac{1.95 \cos 3\theta}{48h^2r^3} \right) + (r^2 - 1) \left(\frac{0.025 \cos \theta}{8h^2r} + \frac{1.3 \sin 2\theta}{4hr^2} + \frac{2.271 \cos 2\theta}{4h^2r^2} - \frac{1.95 \cos 3\theta}{16h^2r^3} \right) \right\} \dots (35)$$

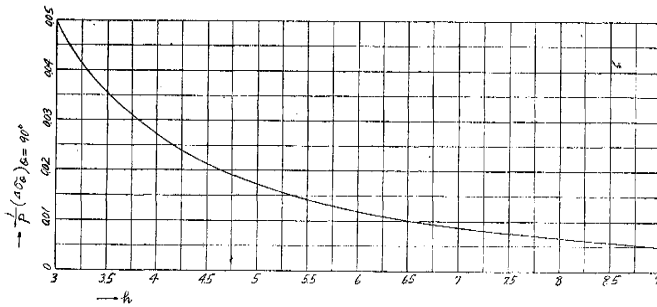
$\phi + \phi_2$ に ϕ_3 を加算したものは大体初期の目的を達している。 ϕ_3 を加算したため新たに直線境界に影響を与える事になるが、それは h が余り 1 に近くさえないければ (普通は $h \geq 3$) 無視し得る程度に小さい。なおもし直線境界が下側に ($y = -k, k > 0$) あれば、(31) 式及び (35) 式において h の代りに $-k$ を代入したものをを用いばよい。

以上によつて $r=1, \theta = \pm 90^\circ$ における増加応力度 $\Delta\sigma_\theta$ を求めると次の如くなる。

$$\begin{aligned} (\Delta\sigma_\theta)_{\substack{r=1 \\ \theta=90^\circ}} &= \left(\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \rho_1^2} \right)_{\rho_1=2h-1} + \left(\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial r^2} \right)_{r=1, \theta=90^\circ} = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{2.727}{(2h-1)^2} + \frac{7.269}{4h^2} \right\} \\ &= \left\{ \frac{0.434}{(2h-1)^2} + \frac{1.157}{4h^2} \right\} P \dots (36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Delta\sigma_\theta)_{\substack{r=1 \\ \theta=-90^\circ}} &= \left(\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \rho_1^2} \right)_{\rho_1=2h+1} + \left(\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial r^2} \right)_{r=1, \theta=-90^\circ} = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{2.727}{(2h+1)^2} + \frac{7.269}{4h^2} \right\} \\ &= \left\{ \frac{0.434}{(2h+1)^2} + \frac{1.157}{4h^2} \right\} P \dots (37) \end{aligned}$$

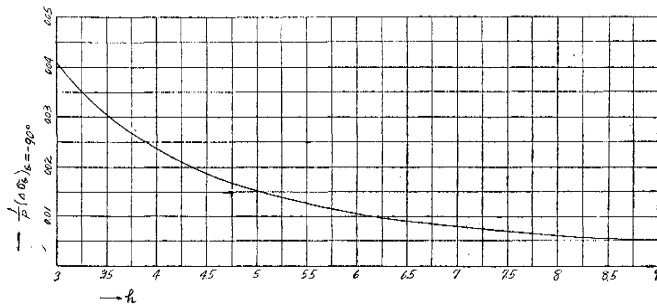
図表-1



(36) 式及び (37) 式の関係を图示すれば 図表-1 及び 図表-2 の如くなる。

次に原点から充分遠い任意の点 σ_x を求めると次の如くなる。

図表-2



$$\begin{aligned} \sigma_x = & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y^2} = P \left(-\frac{0.211 \cos \theta}{r} - \frac{0.434 \cos 2\theta}{r^2} - \frac{0.052 \cos 3\theta}{r} - \frac{0.265 \cos 4\theta}{r^2} \right) \\ & + P \left\{ \left(-\frac{0.2665 \cos \varphi_1}{\rho_1} - \frac{0.434 \cos 2\varphi_1}{\rho_1^2} - \frac{0.1075 \cos 3\varphi_1}{\rho_1} - \frac{0.603 \cos 4\varphi_1}{\rho_1^2} \right) \right. \\ & + h \left(\frac{0.1115 \sin 2\varphi_1}{\rho_1^2} + \frac{1.206 \sin 3\varphi_1}{\rho_1^3} - \frac{0.207 \sin 4\varphi_1}{\rho_1^2} - \frac{1.591 \sin 5\varphi_1}{\rho_1^3} \right) \\ & \left. + h^2 \left(\frac{-0.414 \cos 3\varphi_1}{\rho_1^3} - \frac{3.182 \cos 4\varphi_1}{\rho_1^4} \right) \right\} \dots (38) \end{aligned}$$

なお ψ についても全く同様に直線境界の影響による式を作り、これを加算せねばならぬ。特に上下に直線境界がある場合は、点 ($x = -L, y = 0$) より右側でこれより十分大なる距離においては、 ψ およびその直線境界による全影響を加算したものは $P/2(h+k)$ なる強さの一様な引張りであるということがいえる。従つて、(36), (37) 式の結果には、この他に $P/2(h+k)$ なる強さの引張りを受ける有孔材としての増加応力を加えねばならぬし、

(38)式には $P/2(h+k)$ を加えねばならない。

下側にも直線境界 ($y=-k$) があるとき、 ϕ_2 の $y=-k$ 上の影響を消す項が必要であり、更にそのはねかえりを $y=h$ で消す項が必要となり、順次これが繰返される。又最初 $y=-k$ に関して求めた ϕ_2 においても同様である。しかしこれ等の項が考慮されねばならない程の影響を与えるのは、我々が問題とする点よるかぎり離れた場合であるので省略する。(38)式に下側にも直線境界がある場合の項を加算して、 $x \rightarrow -\infty$ を考えても $(\sigma_x)_{x=-\infty} = 0$ となり $(\sigma_x)_{x=-\infty} = P/2(h+k)$ とはならないのは、このためである。(38)式において

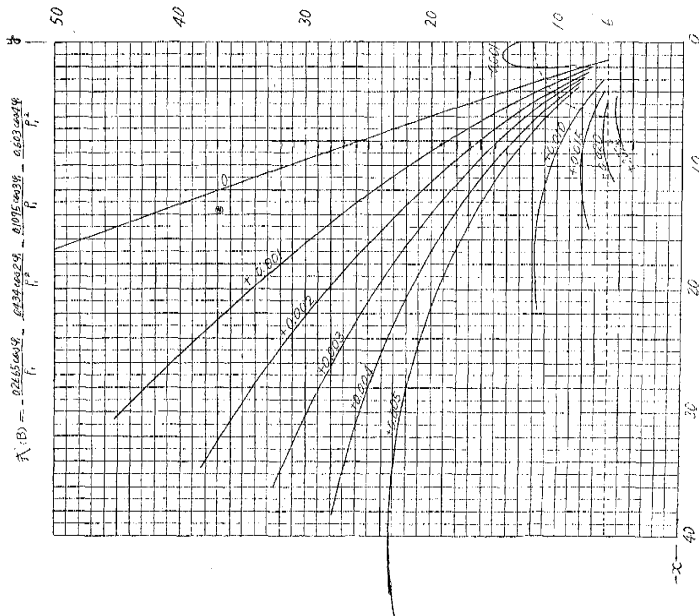
$$\frac{0.211 \cos \theta}{r} - \frac{0.434 \cos 2\theta}{r^2} + \frac{0.052 \cos 3\theta}{r} - \frac{0.265 \cos 3\theta}{r^2} = (A)$$

$$\frac{0.2665 \cos \varphi_1}{\rho_1} - \frac{0.434 \cos 2\varphi_1}{\rho_1^2} + \frac{0.1075 \cos 3\varphi_1}{\rho_1} - \frac{0.603 \cos 4\varphi_1}{\rho_1^2} = (B)$$

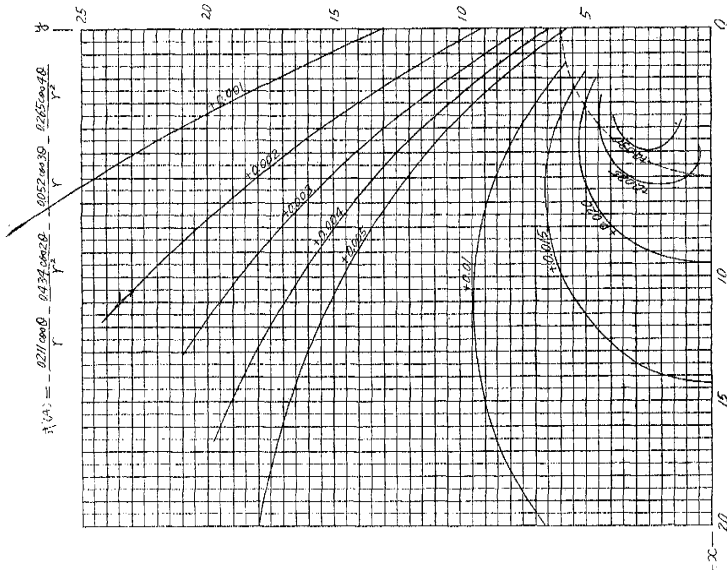
$$\frac{0.1115 \sin 2\varphi_1}{\rho_1^2} - \frac{1.206 \sin 3\varphi_1}{\rho_1^3} - \frac{0.207 \sin 4\varphi_1}{\rho_1^2} - \frac{1.591 \sin 5\varphi_1}{\rho_1^3} = (C)$$

$$\frac{0.414 \cos 3\varphi_1}{\rho_1^3} - \frac{3.182 \cos 4\varphi_1}{\rho_1^4} = (D)$$

図表-3

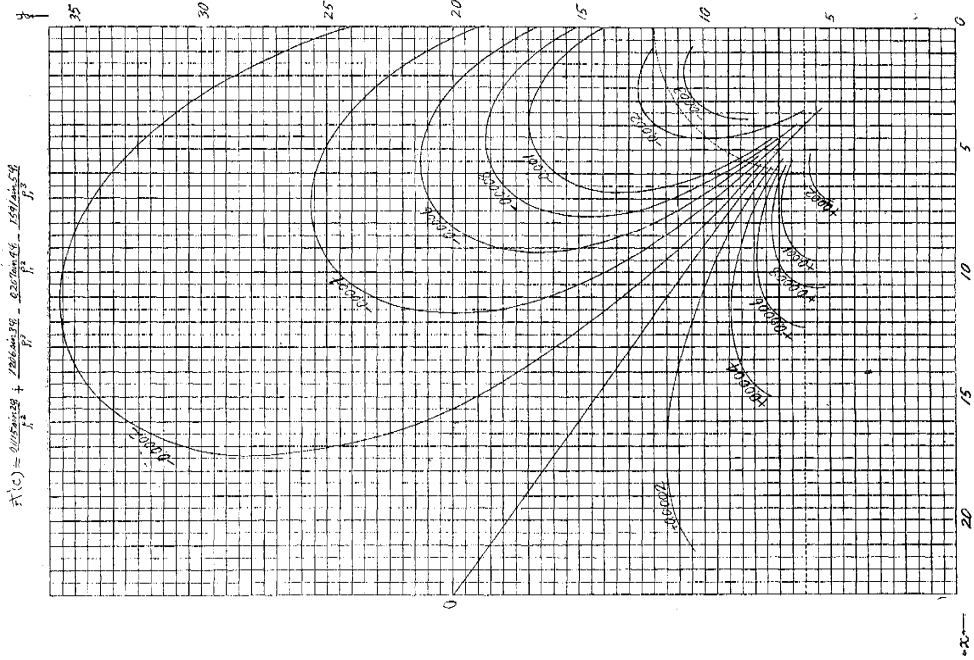


図表-4

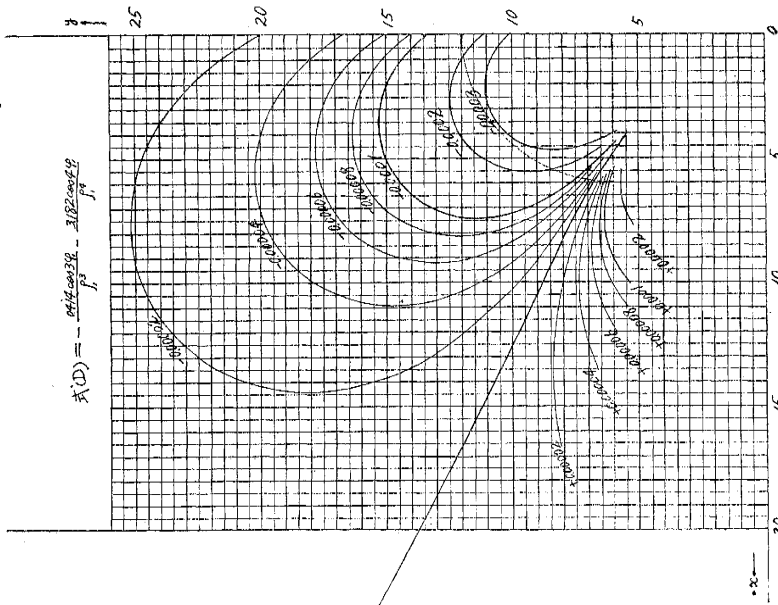


とおき、これ等を図示すれば 図表-3~図表-6 となる。
 これ等の図表を用いれば容易に σ_x を知る事ができる。

図表-5



図表-6



参考文献

- 1) 著者：任意の境界を有する2次元弾性体とその境界条件として境界上の応力分布が与えられる場合の一般解法に就て，土木学会論文集 第4号
- 2) 著者：任意の境界を有する2次元弾性体とその境界条件として境界の変位が与えられる場合の一般解法に就て，土木学会論文集 第5号 (昭.31.7.20)