

二辺支持矩形板の近似解法について

正 員 大 村 裕*

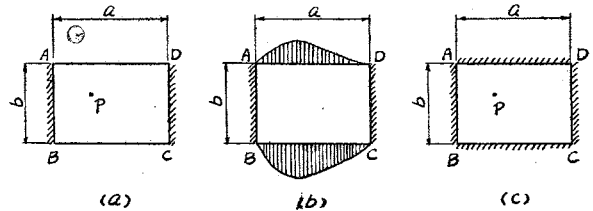
1. 概 説

相対する2辺が単純支持され、他の2辺が自由なる矩形平板の解法は、従来等分布荷重に対しては無限板のタワミをもととした解から、また集中荷重に対しては荷重の作用線上に座標軸をとり、2つのタワミ曲面から結局8つの未知係数を用いて解かれている。また相対する2辺が単純支持される矩形平板がさらに弾性ゲタによつて支持される場合については、従来弾性ゲタが1方向(x方向)に並列する場合についてののみ、モーメント分配法あるいはタワミ角法を応用して解かれている。

著者はまず弾性ゲタを有しない場合について、4辺単純支持矩形板のタワミ曲面を基本系と考えることによつて、任意の荷重に対して容易に解きうることを示し、つぎに2辺支持板がさらに直交する弾性ゲタに支持される場合にも、同様のタワミ曲面の式を用いて解きうることを示した。

2辺単純支持矩形板の問題はまずスラブ橋の解析に應用することができる。米国においては縁石及び高らんの影響を考慮したスラブ橋の研究がおこなわれているが、縁石及び高らんに弾性ゲタと考えれば、このような問題の解析もおこなうことができる。また1方向、あるいは直角2方向に弾性支持される橋梁床板の解析、及び橋梁床板の支持ゲタに対する荷重分配作用の解明に役立つものである。さらに格子橋梁における荷重分配用横ゲタと橋床コンクリートとの相関的な関係を調べるのに本研究は直接役立つものと思う。

図-1



2. 相対する2辺単純支持、他の2辺自由なる場合

図-1 (a) に示すような、相対する2辺が単純支持され、他の2辺が自由なる矩形平板が、荷重 P を受けた場合の弾性条件を考えると、この矩形板の自由辺 AD, BC が単純支持された場合、すなわち同図 (c) の AD, BC における反力を荷重と考えて自由辺に作用させた (b) 図を (a) 図に重合したものは、4辺単純支持板 (c) が荷重 P を受けた場合の弾性条件と一致するはずである。すなわち (a), (b), (c) のタワミをそれぞれ $w; w_1; w_0$ とすると

$$w + w_1 = w_0 \text{ または、 } w = w_0 - w_1 \dots\dots\dots (1)$$

となる。(b) 図における反力は上向きに作用するが、これを下向きに作用するものとして計算することにすれば式 (1) は

$$w = w_0 + w_1 \dots\dots\dots (1')$$

となる。従つて w を求めるには、 w_0 及び w_1 を求めて重合すればよい。このうち w_0 は4辺単純支持矩形板として、任意の荷重に対して、きわめてかんたんな形であらわされる。すなわち図-2の座標軸を用いて、

$$w_0 = \sum_m \sum_n a_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \text{ ただし、 } \alpha = m\pi/a, \beta = n\pi/b \dots\dots\dots (2)$$

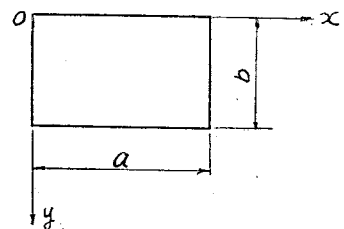
つぎに w_1 については、同じく図-2の座標軸を用いてつぎのように仮定する。

$$w_1 = \sum_m \sum_n (A_{mn} \cosh \alpha y + B_{mn} \alpha y \sinh \alpha y + C_{mn} \sinh \alpha y + D_{mn} \alpha y \cosh \alpha y) \dots\dots\dots (3)$$

$x=0, a$ において単純支持され、 $y=0, b$ で自由なるものとする、境界条件はつぎのように示される。

$$\left. \begin{aligned} x=0, x=a \text{ に対し } w_1 &= 0, \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0 & (a) \\ y=0, y=b \text{ に対し } \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} &= 0 & (b) \\ N \left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2 \partial y} \right] &= R_y & (4) \end{aligned} \right\}$$

図-2



* 神戸大学助教授、工学部土木教室

R_y は式 (2) よりつぎのように示される。

$$R_y = -N[\partial^2 w_0 / \partial y^2 + (2-\nu)\partial^3 w_0 / \partial x^2 \partial y] = N \sum_m \sum_n [\beta^3 + (2-\nu)\alpha^2 \beta] a_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \dots (5)$$

式 (4), (5) において N は版剛度である。境界条件 (4) のうち (a) は、式 (3) を仮定するとただちに満足される。(b) の条件より係数 $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}$ を決定する。

$$[\partial^2 w_1 / \partial y^2 + \nu \partial^2 w_1 / \partial x^2]_{y=0} = 0 \text{ より} \\ (1-\nu)A_{mn} + 2B_{mn} = 0 \dots \dots \dots (i)$$

$$[\partial^2 w_1 / \partial y^2 + \nu \partial^2 w_1 / \partial x^2]_{y=b} = 0 \text{ より} \\ (1-\nu)\cosh \alpha b A_{mn} + [2 \cosh \alpha b + \alpha b(1-\nu)\sinh \alpha b]B_{mn} + (1-\nu)\sinh \alpha b C_{mn} \\ + [2 \sinh \alpha b + \alpha b(1-\nu)\cosh \alpha b]D_{mn} = 0 \dots \dots \dots (ii)$$

$$N[\partial^3 w_1 / \partial y^3 + (2-\nu)\partial^3 w_1 / \partial x^2 \partial y]_{y=0} = [R_y]_{y=0} \text{ より} \\ -(1-\nu)C_{mn} + (1+\nu)D_{mn} = [\beta^3 / \alpha^3 + (2-\nu)\beta / \alpha] a_{mn} \dots \dots \dots (iii)$$

$$N[\partial^3 w_1 / \partial y^3 + (2-\nu)\partial^3 w_1 / \partial x^2 \partial y]_{y=b} = [R_y]_{y=b} \text{ より} \\ -(1-\nu)\sinh \alpha b A_{mn} + [(1+\nu)\sinh \alpha b - \alpha b(1-\nu)\cosh \alpha b]B_{mn} \\ - (1-\nu)\cosh \alpha b C_{mn} + [(1+\nu)\cosh \alpha b - \alpha b(1-\nu)\sinh \alpha b]D_{mn} \\ = [\beta^3 / \alpha^3 + (2-\nu)\beta / \alpha] a_{mn} \cos n \pi \dots \dots \dots (iv)$$

条件式 (i), (ii), (iii), (iv) より $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}$ を定めると、つぎのようになる。

$$A_{mn} = -2/1-\nu \cdot B_{mn} \\ B_{mn} = \frac{\cos n \pi \{ (3+\nu)\sinh \alpha b + \alpha b(1-\nu)\cosh \alpha b \} - \alpha b(1-\nu) - (3+\nu)\sinh \alpha b \cosh \alpha b}{(3+\nu)^2 \sinh^2 \alpha b - (\alpha b)^2 (1-\nu)^2} \cdot [\beta^3 / \alpha^3 + (2-\nu)\beta / \alpha] a_{mn}$$

$$C_{mn} = 1/1-\nu \cdot \{ (1+\nu)D_{mn} - [\beta^3 / \alpha^3 + (2-\nu)\beta / \alpha] a_{mn} \} \\ D_{mn} = \frac{\{ (3+\nu)\sinh \alpha b - \alpha b(1-\nu)\cos n \pi \} \sinh \alpha b}{(3+\nu)^2 \sinh^2 \alpha b - (\alpha b)^2 (1-\nu)^2} \cdot [\beta^3 / \alpha^3 + (2-\nu)\beta / \alpha] a_{mn}$$

従つて $a_{mn}[\beta^3 / \alpha^3 + (2-\nu)\beta / \alpha]$ をくくりだせば、結局求めるタワミ w はつぎのようになる。

$$w = w_0 + w_1 \\ w_0 = \sum_m \sum_n a_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \\ w_1 = \sum_m \sum_n a_{mn} [\beta^3 / \alpha^3 + (2-\nu)\beta / \alpha] (A_{mn} \cosh \alpha y + B_{mn} \alpha y \sinh \alpha y + C_{mn} \sinh \alpha y \\ + D_{mn} \alpha y \cosh \alpha y) \cdot \sin \alpha x$$

ここに $\alpha = m \pi / a, \beta = n \pi / b$

$$A_{mn} = -2/1-\nu \cdot B_{mn} \\ B_{mn} = \frac{\cos n \pi \{ (3+\nu)\sinh \alpha b + \alpha b(1-\nu)\cosh \alpha b \} - \alpha b(1-\nu) - (3+\nu)\sinh \alpha b \cosh \alpha b}{(3+\nu)^2 \sinh^2 \alpha b - (\alpha b)^2 (1-\nu)^2} \\ C_{mn} = 1/1-\nu \cdot [(1+\nu)D_{mn} - 1] \\ D_{mn} = \frac{[(3+\nu)\sinh \alpha b - \alpha b(1-\nu)\cos n \pi] \sinh \alpha b}{(3+\nu)^2 \sinh^2 \alpha b - (\alpha b)^2 (1-\nu)^2} \dots \dots \dots (6)$$

a_{mn} は4辺単純支持矩形板のタワミ式の係数であつて、任意の荷重に対して容易に求められる。すなわち集中荷重に対し $4 P \sin \alpha \xi \sin \beta \eta / ab N (\alpha^2 + \beta^2)^2$

ただし ξ, η は荷重の作用位置の座標
等分布荷重に対し $16 q / \pi^2 N_{mn} (\alpha^2 + \beta^2)^2 \dots \dots \dots (7)$

であり、その他の任意の荷重に対しても、集中荷重の場合から容易に積分して求めることができる。 a_{mn} が求まると所要のタワミ w は (6) 式から得られ、その他の断面力も求めることができる。

3. 自由辺に弾性ケタを有する場合

相対する2辺が単純支持され、他の2辺が弾性ケタに支持される場合のタワミ式を、式 (6) と同様につぎのように仮定する。

$$w = w_0 + w_1 \\ w_0 = \sum_m \sum_n a_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \\ w_1 = \sum_m \sum_n a_{mn} [\beta^3 / \alpha^3 + (2-\nu)\beta / \alpha] (A_{mn} \cosh \alpha y + B_{mn} \alpha y \sinh \alpha y + C_{mn} \sinh \alpha y \\ + D_{mn} \alpha y \cosh \alpha y) \cdot \sin \alpha x$$

$$\alpha = m\pi/a, \beta = n\pi/b \dots\dots\dots (8)$$

弾性ケタの剛度は任意にとり得るが、実際の構造物では両辺の剛度が等しい場合が多いので、このような場合について解くものとする。弾性ケタの剛度を EI_0 とすると、境界条件はつぎのようにあらわされる。

$$\begin{aligned} x=0, x=a \text{ に対し } w=0, \partial^2 w/\partial x^2=0, \dots\dots\dots (a) \\ y=0 \text{ に対し } [\partial^2 w/\partial y^2 + \nu \partial^2 w/\partial x^2]=0 \dots\dots\dots (b) \\ N[\partial^2 w/\partial y^2 + (2-\nu)\partial^3 w/\partial x^2 \partial y] = -EI_0 \partial^4 w/\partial x^4 \dots\dots\dots (c) \\ y=b \text{ に対し, } [\partial^2 w/\partial y^2 + \nu \partial^2 w/\partial x^2]=0 \dots\dots\dots (d) \\ N[\partial^2 w/\partial y^2 + (2-\nu)\partial^3 w/\partial x^2 \partial y] = EI_0 \partial^4 w/\partial x^4 \dots\dots\dots (e) \end{aligned} \dots\dots\dots (9)$$

境界条件 (9)(a) は常数に無関係に満足される。境界条件 (b),(c),(d),(e) からつぎの4つの条件式を得る。

$$\begin{aligned} A_{mn}(1-\nu) + 2B_{mn} = 0 \dots\dots\dots (i) \\ A_{mn}(1-\nu) \cosh \alpha b + B_{mn}[2 \cosh \alpha b + \alpha b(1-\nu) \sinh \alpha b] + C_{mn}(1-\nu) \sinh \alpha b \\ + D_{mn}[2 \sinh \alpha b + \alpha b(1-\nu) \cosh \alpha b] = 0 \dots\dots\dots (ii) \\ (1-\nu)C_{mn} - (1+\nu)D_{mn} + 1 = \lambda_0 \alpha A_{mn} \dots\dots\dots (iii) \\ -A_{mn}[(1-\nu) \sinh \alpha b + \lambda_0 \alpha \cosh \alpha b] + B_{mn}[(1+\nu) \sinh \alpha b - \alpha b(1-\nu) \cosh \alpha b \\ - \lambda_0 \alpha^2 b \sinh \alpha b] - C_{mn}[(1-\nu) \cosh \alpha b + \lambda_0 \alpha \sinh \alpha b] + D_{mn}[(1+\nu) \cosh \alpha b \\ - \alpha b(1-\nu) \sinh \alpha b - \lambda_0 \alpha^2 b \cosh \alpha b] = \cos n\pi \dots\dots\dots (iv) \end{aligned}$$

ただし、 $\lambda_0 = EI_0/N$

条件式 (i),(ii),(iii),(iv) より係数 $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}$ を定めると、つぎのようになる。

$$\begin{aligned} A_{mn} = \{-\alpha b(1-\nu) - (3+\nu) \sinh \alpha b \cosh \alpha b - 2\lambda_0 \alpha / (1-\nu) \cdot \sinh^2 \alpha b + [(3+\nu) \sinh \alpha b \\ + \alpha b(1-\nu) \cosh \alpha b] \cos n\pi\} / \chi_m \\ B_{mn} = -1-\nu/2 \cdot A_{mn} \\ C_{mn} = 1/1-\nu \cdot [(1+\nu) D_{mn} + \lambda_0 \alpha A_{mn} - 1] \\ D_{mn} = \left\{ -\frac{1}{2}(1-\nu)(3+\nu) \sinh^2 \alpha b - \lambda_0 \alpha \sinh \alpha b \cosh \alpha b \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{2} \alpha b(1-\nu)^2 - \lambda_0 \alpha \right] \sinh \alpha b \cos n\pi \right\} / \chi_m \\ \chi_m = 1/2(\alpha b)^2(1-\nu)^2 - \left[\frac{1}{2}(1-\nu)(3+\nu)^2 + 2/1-\nu \cdot (\lambda_0 \alpha)^2 \right] \sinh^2 \alpha b - 2(1-\nu)\lambda_0 \alpha^2 b \\ - 2\lambda_0 \alpha(3+\nu) \sinh \alpha b \cosh \alpha b \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

(8) 及び (10) 式から所要のタワミが得られる。本式で $\lambda_0=0$ とおくと式 (6) と一致する。 a_{mn} は式 (6) の場合と同じく4辺単純支持の場合の係数であつて、任意の荷重に対して容易に求めることができる。

4. 直交する弾性ケタによつて支持される場合

平板のタワミ曲面の式は一般に次式で表わされる。

$$\partial^4 w/\partial x^4 + 2\partial^4 w/\partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 w/\partial y^4 = p/N \dots\dots\dots (11)$$

座標軸を図-3のごとくにとり、辺長 a, b なる矩形板が直交する弾性ケタによつて支持されるものとする、この矩形板が荷重 p を受けた場合の弾性条件は、ケタのネジリ抵抗を無視するものとする、弾性ケタを有しない平板が、与えられた荷重 p と、各弾性ケタからの反力を荷重として受けた場合に等しいと考えることができる。すなわち式 (11) は 図-3 の記号を用いてつぎのように書ける。

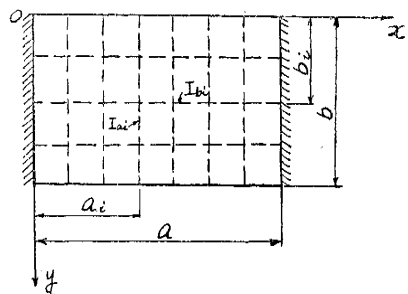
$$\partial^4 w/\partial x^4 + 2\partial^4 w/\partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 w/\partial y^4 = 1/N [p - \sum_i \partial^4 w_{y=bi}/\partial x^4 \cdot EI_{bi} - \sum_j \partial^4 w_{x=ai}/\partial y^4 \cdot EI_{aj}] \dots\dots\dots (12)$$

従つて w 及び p を適当な (x, y) の函数で表わすことができれば式 (12) は解くことができる。

相対する2辺 $x=0, x=a$ で単純支持され、他の2辺は自由かまたは弾性ケタに支持されて、なお中間に多くの直交する弾性ケタを有する矩形平板のタワミを、座標軸を 図-3 のようにとつてつぎのように仮定する。

$$w = w_1 + w_2$$

図-3



$$\begin{aligned}
 w_1 &= \sum_m \sum_n a_{mn} \sin \alpha x \sin \alpha x \sin \beta y \\
 w_2 &= \sum_m \sum_n a_{mn} [\beta^2/\alpha^3 + (2-\nu)\beta/\alpha] (A_{mn} \cosh \alpha y + B_{mn} \alpha y \sinh \alpha y + C_{mn} \sinh \alpha y \\
 &\quad + D_{mn} \alpha y \cosh \alpha y) \cdot \sin \alpha x \\
 \alpha &= m\pi/a, \beta = n\pi/b \dots \dots \dots (13)
 \end{aligned}$$

係数 $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}$ は自由辺に弾性ケタを有しない場合は式(6), 自由辺に等しい弾性ケタを有する場合には式(10)のようにとれば, 式(13)は境界条件を満足する。

さて直交弾性ケタを有しない平板(以下主系と呼ぶ)のタワミは式(6)のように表わされるから荷重 p は

$$p = -N[\partial^4 w / \partial x^4 + 2\partial^2 w / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 w / \partial y^4] = N \sum_m \sum_n (\alpha^2 + \beta^2)^2 a_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \dots \dots \dots (14)$$

として表わすことができる。 a_{mn} の値は4辺単純支持矩形板の係数として既知であるから, 式(12)右辺の p は (x, y) の函数として容易に表わしうるわけである。

つぎに, 主系に集中荷重 Q が (ξ, η) に作用する場合には

$$a_{mn} = 4Q \sin \alpha \xi \sin \beta \eta / ab N (\alpha^2 + \beta^2)^2$$

であるから集中荷重 Q はつぎのように表わされる。

$$q = 4Q/ab \sum_m \sum_n \sin \alpha \xi \sin \beta \eta \sin \alpha x \sin \beta y \dots \dots \dots (15)$$

一方直交弾性ケタを有する場合のタワミは式(13)で与えられるから

$$\begin{aligned}
 EI_{bi} \cdot \partial^4 w_{y=bi} / \partial x^4 &= EI_{bi} \sum_m \sum_n \alpha^4 a_{mn} \sin \alpha x \sin \beta b_i \\
 &\quad + EI_{bi} \sum_m \sum_n \alpha^4 a_{mn} [\beta^2/\alpha^3 + (2-\nu)\beta/\alpha] (A_{mn} \cosh \alpha b_i + B_{mn} \alpha b_i \sinh \alpha b_i \\
 &\quad + C_{mn} \sinh \alpha b_i + D_{mn} \alpha b_i \cosh \alpha b_i) \cdot \sin \alpha x \dots \dots \dots (16)
 \end{aligned}$$

式(16)の x, y を ξ, η に置きかえて $Q \cdot EI_{bi} \cdot \partial^4 w_{y=bi} / \partial x^4$ として式(15)に代入し, ξ について0から a まで積分する。この場合, 混同をさけるため Q に代入すべき級数を, m, n の代りに u, v を用いるものとする

$\int_0^a \sin \alpha \xi \sin \alpha \xi d\xi$ の値は $m=u$ の場合 $a/2$, しからざる場合は0となるから, 結局 x 方向の弾性ケタの反力による荷重 q_{bi} はつぎのように表わされることになる。

$$\begin{aligned}
 q_{bi} &= 2EI_{bi}/b \alpha^4 \sin \beta b_i \sum_v a_{mv} [\sin \beta v b_i + \{\beta v^3/\alpha^3 + (2-\nu)\beta v/\alpha\} (A_{mv} \cosh \alpha b_i + B_{mv} \alpha b_i \sinh \alpha b_i \\
 &\quad + C_{mv} \sinh \alpha b_i + D_{mv} \alpha b_i \cosh \alpha b_i)] \sin \alpha x \cos \beta y
 \end{aligned}$$

ただし, $\alpha_u = u\pi/a$, $\beta_v = v\pi/b$ (17)

また $EI_{ai} \partial^4 w_{x=ai} / \partial y^4 = EI_{ai} \sum_m \sum_n \beta^4 a_{mn} \sin \alpha a_i \sin \beta y$

$$\begin{aligned}
 &+ EI_{ai} \sum_m \sum_n \beta^4 A_{mn} [\beta^3/\alpha^3 + (2-\nu)\beta/\alpha] \sin \alpha a_i (A_{mn} \cosh \alpha y + 4B_{mn} \cosh \alpha y \\
 &+ B_{mn} \alpha y \sinh \alpha y + C_{mn} \sinh \alpha y + 4D_{mn} \sinh \alpha y + D_{mn} \alpha y \cosh \alpha y) \dots \dots \dots (18)
 \end{aligned}$$

式(18)の x, y を ξ, η と置き, また級数 m, n の代りに u, v を用いて式(15)に代入し, 0から b まで積分する。

$\int_0^b \sin \beta \eta \sin \beta \eta d\eta$ の値は $n=v$ のとき $b/2$ となり, しからざる場合は0となる。また,

$$\begin{aligned}
 \int_0^b \sin \beta \eta \sinh \alpha_u \eta d\eta &= -\frac{\beta}{\alpha_u^2 + \beta^2} \cos n\pi \sinh \alpha_u b \\
 \int_0^b \sin \beta \eta \cosh \alpha_u \eta d\eta &= \frac{\beta}{\alpha_u^2 + \beta^2} [1 - \cos n\pi \cosh \alpha_u b] \\
 \int_0^b \eta \sin \beta \eta \sinh \alpha_u \eta d\eta &= -\frac{b\beta}{\alpha_u^2 + \beta^2} \cos n\pi \sinh \alpha_u b + \frac{2\alpha_u \beta}{(\alpha_u^2 + \beta^2)^2} [\cos n\pi \cosh \alpha_u b - 1] \\
 \int_0^b \eta \cdot \sin \beta \eta \cdot \cosh \alpha_u \eta \cdot d\eta &= -\frac{b\beta}{\alpha_u^2 + \beta^2} \cos n\pi \cosh \alpha_u b + \frac{2\alpha_u \beta}{(\alpha_u^2 + \beta^2)^2} \cos n\pi \sinh \alpha_u b
 \end{aligned}$$

であるから, 結局 y 方向の弾性ケタの反力による荷重 q_{ai} は, つぎのように表わされる。

$$\begin{aligned}
 q_{ai} &= 2EI_{ai}/a \cdot \sin \alpha a_i \sum_u a_{un} \sin \alpha_u a_i [\beta^4 + 2\alpha_u^4/b\{\beta^3/\alpha_u^3 + (2-\nu)\beta/\alpha_u\}] [(A_{un} \\
 &\quad + 4B_{un})(1 - \cos n\pi \cosh \alpha_u b) \beta / (\alpha_u^2 + \beta^2) + B_{un} \alpha_u \left\{ -\frac{b\beta}{\alpha_u^2 + \beta^2} \cos n\pi \sinh \alpha_u b \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2\alpha_u \beta}{(\alpha_u^2 + \beta^2)^2} (\cos n\pi \cosh \alpha_u b - 1) \right\} - (C_{un} + 4D_{un}) \frac{\beta}{\alpha_u^2 + \beta^2} \cos n\pi \sinh \alpha_u b.
 \end{aligned}$$

$$+ D_{un}\alpha_u \left\{ -\frac{b\beta}{\alpha_u^2 + \beta^2} \cos n\pi \cosh \alpha_u b + \frac{2\alpha_u\beta}{(\alpha_u^2 + \beta^2)^2} \cos n\pi \sinh \alpha_u b \right\} \Big] \sin \alpha x \sin \beta y \quad (19)$$

さて式 (12) の左辺は

$$\partial^4 w / \partial x^4 + 2 \partial^4 w / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 w / \partial y^4 = \sum_{m,n} \sum (\alpha^2 + \beta^2)^2 a_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y$$

であり、一方右辺は式 (14), (17), (19) のように表わされるから、左右両辺の級数を比較して、所要の a_{mn} を求めるべき条件式として次式を得る。

$$\begin{aligned} a_{mn} = & a_{0mn} \\ & - \sum_i 2 K_{bi} \frac{\alpha^4}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \sin \beta b_i \sum_y a_{mv} \left[\sin \beta_v b_i + \left\{ \frac{\beta_v^3}{\alpha^3} + (2-\nu) \frac{\beta_v}{\alpha} \right\} (A_{mv} \cosh \alpha b_i \right. \\ & \left. + B_{mv} \alpha b_i \sinh \alpha b_i + C_{mv} \sinh \alpha b_i + D_{mv} \alpha b_i \cosh \alpha b_i) \right] \\ & - \sum_i 2 K_{ai} \sin \alpha a_i \sum_u a_{un} \sin \alpha_u a_i \left[\frac{\beta^4}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} + \frac{\alpha_u^4}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \left\{ \frac{\beta^3}{\alpha_u^3} + (2-\nu) \frac{\beta}{\alpha_u} \right\} \right] \left[(A_{un} + 4 B_{un}) \right. \\ & \times (1 - \cos n\pi \cosh \alpha_u b) \frac{2\beta}{b(\alpha_u^2 + \beta^2)} + B_{un} \left\{ -\frac{2\alpha_u\beta}{\alpha_u^2 + \beta^2} \cos n\pi \sinh \alpha_u b \right. \\ & \left. + \frac{4\alpha_u^2\beta}{b(\alpha_u^2 + \beta^2)^2} (\cos n\pi \cosh \alpha_u b - 1) \right\} - (C_{un} + 4 D_{un}) \frac{2\beta}{b(\alpha_u^2 + \beta^2)} \cos n\pi \sinh \alpha_u b \\ & \left. + D_{un} \left\{ -\frac{2\alpha_u\beta}{\alpha_u^2 + \beta^2} \cos n\pi \cosh \alpha_u b + \frac{4\alpha_u^2\beta}{b(\alpha_u^2 + \beta^2)^2} \cos n\pi \sinh \alpha_u b \right\} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

ここに $K_{bi} = EI_{bi}/N_b$; $K_{ai} = EI_{ai}/N_a$ (20)

式 (18) において、 a_{0mn} の値は 4 辺単純支持板のタワミ式における係数であつて、任意の荷重に対してただちに得られるわけであるから、式 (20) を連立に於いて a_{mn} の各値を求めることができる。 a_{mn} の値を得ると、式 (13) からタワミ w を得、これを微分して断面力を求めることができる。この級数は m についてはきわめて収束がよいが、 n については緩慢である。

式 (20) において、右辺第 3 項と 0 すると、 x 方向にのみ弾性ケタが並列する場合の係数 a_{mn} を与え、第 2 項及び第 3 項を 0 とすると中間に弾性ケタを全く有しない場合となり、 a_{mn} は a_{0mn} に等しくなる。

$A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}$ の値

	$m=1$	$m=3$	$m=5$
A_{mn}	0.24156	0.09453	0.05930
B_{mn}	-0.08455	-0.03309	-0.02076
C_{mn}	-0.20046	-0.09440	-0.05933
D_{mn}	0.07754	0.03308	0.02076

5. 計算例 1

計算例として等分布荷重 q を受ける 1 辺 a なる正方形板が、相対する 2 辺で単純支持され、他の 2 辺が剛度 $EI_0 = Na$ なる弾性ケタに支持される場合の最大タワミを $\nu=0.3$ として求めてみる。

$$\lambda_0 = EI_0/N = a, \quad b = a, \quad \nu = 0.3$$

であるから、これらの条件を用いて、式 (10) から係数

$A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}$ を求めると、表のようになる。

α_{mn} の値

	$n=1$	$n=3$	$n=5$	$n=7$	$n=9$
$m=1$	4.5435×10^{-2}	6.0580×10^{-4}	5.3769×10^{-5}	1.0385×10^{-5}	3.0032×10^{-6}
$m=3$	6.0580×10^{-4}	6.2325×10^{-5}			
$m=5$	5.3769×10^{-5}				

$[B^4/\alpha^3 + (2-\nu)\beta/\alpha]$ の値

	$n=1$	$n=3$	$n=5$	$n=7$	$n=9$
$m=1$	2.7	32.1	133.5	354.9	744.3
$m=3$	0.60371	2.7			
$m=5$	0.348				

$(A_{mn} \cosh \alpha_y + B_{mn} \alpha_y \sinh \alpha_y + C_{mn} \sinh \alpha_y + D_{mn} \alpha_y \cosh \alpha_y) \sin \alpha x$ の値

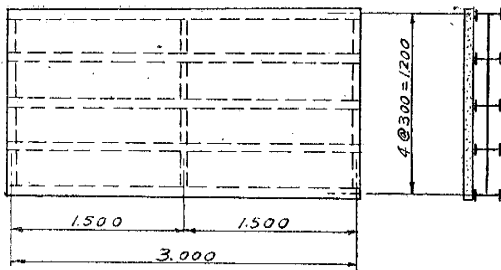
$m=1$	$m=3$	$m=5$
0.14478	-0.00687	-0.03864

表-1 w の値

		n=1	n=3	n=5	n=7	n=9
m=1	w ₀	0.0454	-0.0006	0.0001	0.0000	0.0000
	w ₁	0.0178	0.0028	0.0010	0.0005	0.0003
	w	0.0632	0.0022	0.0011	0.0005	0.0003
m=3	w ₀	-0.0005	0.0001			
	w ₁	0.0000	0.0000			
	w	-0.0006	0.0000			
m=5	w ₀	0.0001				
	w ₁	0.0000				
	w	0.0001				

$$\sum w = 0.0669 qa^4 / E_p h^3$$

図-4



A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn} の値

	A _{mn}	B _{mn}	C _{mn}	D _{mn}
m=1	0.099646	-0.049823	-0.033896	0.027746
m=3	0.033784	-0.016892	-0.029575	0.016131

これらの条件から λ₀=2.9975 a, K_{bi}=7.49375, K_{ai}=1.128125

$$b_1 = 0.1 a, b_2 = 0.2 a, b_3 = 0.3 a, b = 0.4 a$$

$$N = 1.12 \times 10^6 \text{ (kg-cm)}$$

を得る。そこで、まず式(10)から係数 a_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn} の値を求めると表のようになる。

つぎに集中荷重 P に対して、a_{0mn} は

$$a_{0mn} = \frac{4 Q \sin \alpha \xi \sin \beta \eta}{abN(\alpha^2 + \beta^2)^2} = \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{0.1(m^2 + 6.25n^2)^2 \pi^4} \cdot Pa^2 / N$$

a_{0mn} の値

	n=1	n=3	n=5	n=7	n=9
m=1	1.9531 × 10 ⁻³	-3.1322 × 10 ⁻⁵	4.15165 × 10 ⁻⁶	-1.08747 × 10 ⁻⁶	4.96957 × 10 ⁻⁷
m=3	-4.4143 × 10 ⁻⁴				

表-2 a_{mn} 方程式

係数 方程式番号	a ₁₁	a ₁₃	a ₁₅	a ₁₇	a ₁₉	a ₂₁	右辺常数
1	4.54991	29.36558	132.96433	362.02533	769.24274	-1.62024	0.0019531
2	0.0038908	2.25740	0.364017	1.01762	2.15727		-0.000031322
3	0.00051572	0.012136	-3.17488	1.13488	0.28594		-0.0000041517
4	0.0010894	0.016350	0.074032	-3.03783	0.42830		0.0000010875
5	0.00049785	0.0074718	0.033831	0.092114	3.44135		0.00000049696
6	0.36012					-12.41095	0.00044143

この場合等分布荷重に対し m, n は奇数をとるから、cos nπ = -1 となりこれらの係数は n に無関係な値をとる。

つぎに、等分布荷重に対して係数 a_{mn} は

$$a_{mn} = 16 q / \pi^2 N m n (\alpha^2 + \beta^2)^2 = 0.18174 / m n (m^2 + n^2)^2 \cdot qa^4 / E_p h^3$$

で与えられるから、これを m, n の各値について求めると表のようになる。ただし E_p は板の弾性係数であり、h は板の厚さである。

最大タワミは板中央に生じるから、x = a/2, y = b/2 とし、以上の値を用いて、式

(8) から w を求めると表-1 を得る。

6. 計算例 2

つぎに図-4に示すような主ケタ5本、横ケタ1本よりなる格子ケタが、厚さ4cmのモルタルのスラブを有し、中央に集中荷重を受けたときの載荷横断面のタワミを計算して、これを実測値と比較してみよう。主ケタの慣性モーメントはすべて等しく I₀ = I_{bi} = 479.6 cm⁴ であり、横ケタの慣性モーメントは I_{ai} = 180.5 cm⁴ である。また鋼材及びモルタルのヤング係数は、それぞれ E_s = 2.1 × 10⁶, E_c = 2.1 × 10⁵ とし、ポアソン比は無視して ν = 0 とする。また載荷重の大きさは 4.735 t である。こ

として与えられ、これを mn の各値について求めると表のようになる。

a_{0mn} の値及び必要な諸値を計算して、式 (20) から決定すべき条件式を求めると、表-2 のようになる。

表-3 タワミ比較表 (単位 mm)

種別	位置		
	$y=0$	$y=b/4$	$y=b/2$
測定値	2.67	3.27	3.65
本計算値	2.27	3.53	4.18
格子計算値	4.31	5.68	6.39
連続板計算値	3.61	5.76	7.13

この連立方程式を解いて a_{mn} の値を得る。

$$a_{11}=4.7951 \times 10^{-4}, a_{13}=-1.4913 \times 10^{-5},$$

$$a_{15}=1.3283 \times 10^{-6}, a_{17}=-2.1980 \times 10^{-7},$$

$$a_{19}=1.0024 \times 10^{-7}, a_{21}=-2.1655 \times 10^{-5}$$

a_{mn} の値が求まると、式 (13) より所要のタワミを求めることができる。 $x=a/2; y=0, b/4, b/2$, について、 P, a, N の数値を代入して中央断面のタワミを求め、測定値及びスラブを

省いた場合の格子としての計算値、また横ケタを省いた連続板としての計算値と比較すると、表-3 のようである。

従来格子ケタの計算には、床版の影響は考慮されず、荷重分布用の横ケタがない場合には床版の影響を考慮して連続板として荷重分布の計算をおこなっているのであるが、床版を有する格子ケタについては両者を同時に考慮するのが合理的であつて、これらの差は上表より明らかである。本計算による計算値は、測定値に比べて幾分荷重の分配率が小さいが、これは、実際の構造ではケタとスラブがスラブ止めによつて結合され、若下のネジリ抵抗を持つているのに対して、本計算では無視しているためであると考えられる。

7. 結 語

本文は、相対する 2 辺が単純支持され、他の 2 辺が自由であるかまたわ弾性ケタに支持される矩形平板について、4 辺単純支持板を基本系と考えることにより任意の荷重に対して容易に解きうることを示し、なお同様の考慮によつて、2 辺支持板が中間において直交弾性ケタに支持される場合にも適用しうることを述べた。本計算法は 2 重級数で表わされ、従来の単級数による解法に比べて不利のようではあるが、集中荷重を受ける場合にもタワミ曲面を 2 つに分けて考える必要もなく、かんたんな 4 辺単純支持板の場合の係数をそのまま用いることができ、任意の荷重に対して 1 つの式で容易に解くことができる。また 2 辺支持板が直交弾性ケタに支持される場合については、従来とり扱われていなかったが、直交異方性板として扱い難いような場合、たとえばケタ間隔の大きい格子ケタ、または橋梁床組における支持ケタ及び床版の解析に対して本計算法は役立つものと思う。この級数は m についてはきわめて収束がよく、一方 n については構造寸法及び荷重状態によつて若下収束が悪い場合もあるが、近似計算としては適当な項数により、大差なき結果を得ることができる。

参 考 文 献

- 1) Timoshenko, S. : Theory of Plates and Shells, 1940
- 2) Nadai, A. : Elastische Platten, Berlin 1925
- 3) Olsen, H.u. Reinitzhuber, F. : Die zwei seitig gelagerte Platte, Berlin 1950
- 4) 藤井忠二 : 矩形平板と梁, 昭.19
- 5) 成岡, 伊藤, 大村 : 格子桁の実験的研究, 昭.30

(昭.31.7.1)