

連続体の大変形解析のための流動要素法 (FLEM)の提案

木山英郎*・藤村 尚**・西村 強***

DEMの基本である運動方程式の陽形式時間差分による逐次解法を活かして、各要素の自由な大変形を許しながら要素間の連続性を保持し、全体としての大変形から流動までを解析できる手法‘流動要素法’を提案する。その特徴は、要素分割や節点力の誘導はFEMに習い、これにより生じる節点力の不平衡を解消する方向に、質量を有する節点が運動方程式に従って運動する過程をDEMと同様の手法により解析するところにある。

Keywords : large deformational problem. equation of motion, explicit time-marching scheme. distinct element method. finite element method

1. ま え が き

本研究は、軟岩や粘性地盤において問題となるいわゆる塑性流動のような、連続体としての大変形や流動挙動を対象とした数値解析法の開発を目的としている。

これまで、微小変形に対しては有限要素法(FEM)が、広範囲に用いられてきたが、有限変形の解析を行うためには煩雑なラグランジュ座標の導入などの工夫が必要となり、ここでいう大変形にいたっては未だその一般的解法を見ない。一方、個別要素法(DEM)は、基礎式である運動方程式を陽形式時間差分にして要素ごとに用いるため、大容量のマトリックスを要しないこと、時々刻々の要素座標系を用いるため大変形に対してもラグランジュ座標を改めて考慮する必要がない等の利点がある。しかしながら、DEMは要素の接触・離散によって集合全体の大変形を表現するため、隣接要素が連続したままで、要素の変形によって全体の大変形を表現するような場合には適用できない。

そこで、DEMの基本となっている運動方程式の陽形式時間差分による逐次解法を活かし、各要素の自由な変形を許しながら要素間の連続性を保持し、全体としての大変形から流動までを解析できる手法を提案する。これを便宜的に流動要素法(FLow Element Method)と名付け、FLEMと略記する。同種の解法は、既にCundall¹⁾によって1988年にFLACの名称で公表されており、本法の開発に当たっても基本原理の多くを参考にした。その上で、運動方程式の中核をなす変位抗力の算定にFEMの手法を取り入れることによって、定式化の明瞭さ、解法の汎用性等においてFLAC以上のものになり

得たと確信してこれを報告する次第である。

2. FLEMの基本概念

(1) 要素分割

与えられた物体を図—1(a)に示すように有限個の領域に分割し、各領域を質量を付した質点で代表させる。与えられた境界条件のもとに、各質点*i*(質量 m_i)は周辺領域の変位抗力(剛性 K_i)や速度抗力(粘性 η_i)のもとに、式(1)で示される運動方程式に従って移動すると考える。

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{u}_i + \eta_i \dot{u}_i + K_i u_i &= m_i g_x + f_{xi} \\ m_i \ddot{v}_i + \eta_i \dot{v}_i + K_i v_i &= m_i g_y + f_{yi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 g_x, g_y は重力加速度、 f_{xi}, f_{yi} は質点に直接作用する外力である。なお、領域を質点化することによって消失する回転運動に関しては、各領域において連続体として $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ によってモーメントの釣り合いを満たすように配慮すれば良い。

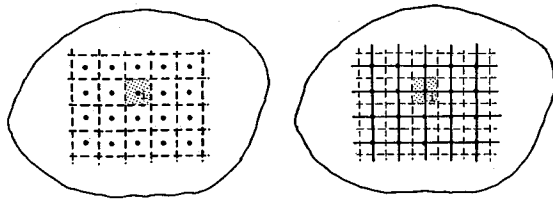
連続体の変位抗力や速度抗力を具体化するに際し、新たに図—1(b)に示すように質点を要素節点とする要素分割を導入し、(a)の質量領域*i*のイメージはすべて節点*i*に集約し、以下において節点*i*の運動とそれに対する周辺要素の抗力として式(1)を用いる。

図—2に示すように、任意の節点*i*とそれを囲む4つの要素($j=1, 2, 3, 4$)が微小時間 Δt の間に破線の位置から実線の位置まで移動したとする。節点*i*を中心とした周辺要素の各節点の変位に伴って、節点*i*に生じる変位抗力を節点力と呼び、 F_{xi}, F_{yi} と書けば、式(1)は次式のようなになる。

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{u}_i + \eta_i \dot{u}_i + F_{xi} &= m_i g_x + f_{xi} \\ m_i \ddot{v}_i + \eta_i \dot{v}_i + F_{yi} &= m_i g_y + f_{yi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

連続体の粘性抵抗を取り扱う場合には、左辺第2項も同様な定式化が必要であるが、本報では同項を単に減衰項として利用するのでそのままにしてある。また、質量

* 正会員 工博 鳥取大学教授 工学部土木工学科 (〒680 鳥取市湖山町南4-101)
 ** 正会員 工博 鳥取大学助教授 工学部土木工学科
 *** 正会員 工修 鳥取大学助手 工学部土木工学科



(a) 分割領域の代表点としての質点 (b) 質点を節点とする要素分割 (破線は (a) に対応)

図-1 要素分割の概念図

m_i については、図-1(b) あるいは図-2の要素分割をもとに、改めて周辺4要素の質量和の1/4と定義する。

(2) DEM 操作²⁾

さて、DEM を利用して式 (2) を解くには以下のようにする。まず、式 (2) を時間増分 Δt で差分表示し、加速度 \ddot{u}, \ddot{v} を未知数とする陽形式の連立方程式で近似する。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{u}_i &= \left(g_x + \frac{f_{xi}}{m_i} - \frac{F_{xi}}{m_i} \right) - \frac{1}{m_i} \Delta F_{xi} - \frac{\eta_i \Delta u_i}{m_i \Delta t} \\ \ddot{v}_i &= \left(g_y + \frac{f_{yi}}{m_i} - \frac{F_{yi}}{m_i} \right) - \frac{1}{m_i} \Delta F_{yi} - \frac{\eta_i \Delta v_i}{m_i \Delta t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $(\Delta u_i, \Delta v_i)$ は Δt 間の節点 i の変位であり、 $(\Delta F_{xi}, \Delta F_{yi})$ はそれに対応する節点力の増分である。同式において、右辺第一項の () 内の計算は、初期値を $g_x + f_{xi}/m_i, g_y + f_{yi}/m_i$ とおき、毎回得られる $-\Delta F_{xi}/m_i, -\Delta F_{yi}/m_i$ をこれに加算していけば自動的になされる。

式 (3) から、各質点の加速度が求まれば、それを用いて順次次の Δt 増分に対する新しい速度、新しい変位増分、新しい節点座標が以下のように計算される。

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_i &= \dot{u}_i + \ddot{u}_i \Delta t \\ \dot{v}_i &= \dot{v}_i + \ddot{v}_i \Delta t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_i &= \dot{u}_i \Delta t \\ \Delta v_i &= \dot{v}_i \Delta t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i + \Delta u_i \\ y_i &= y_i + \Delta v_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

結局、式 (3) における節点力の増分 $\Delta F_{xi}, \Delta F_{yi}$ の算定法を考えれば良いことになる。

(3) FEM 操作

節点の変位増分 $(\Delta u_i, \Delta v_i)$ に対応する節点力増分 $(\Delta F_{xi}, \Delta F_{yi})$ の計算には、微小変形に収まるように Δt を選定すれば、通常の FEM の手法を利用できる。図-2を参照して、節点 i に関係する周辺4要素の中の任意の要素 j について、節点 i の節点力増分は次式で与えられる。

$$\left[\begin{array}{c} \Delta F_{xi} \\ \Delta F_{yi} \end{array} \right] = [K^j] [\Delta u_i^j, \Delta v_i^j, \dots, \Delta u_i^j, \Delta v_i^j]^T \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $[K^j]$ は要素 j の変形とともに、 Δt ごとに変化する要素剛性マトリックス $[K^j]$ の節点 i に関与する部分

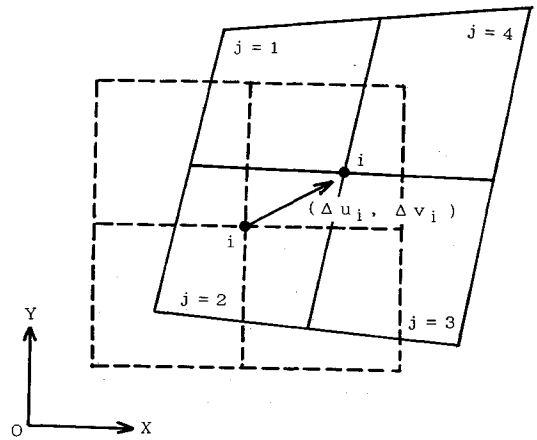


図-2 節点の運動と要素の変形の概念図

マトリックスであって、 $[K^j]$ 自身は FEM で周知のよう形式的に次式で表される。

$$[K^j] = \iint [B^j]^T [D] [B^j] dx dy \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $[B^j]$ は節点変位・ひずみ変換マトリックス、 $[D]$ は弾性マトリックスである。なお、本法では四辺形要素を用いるが、これは FEM で知られる解の対称性の良さに加えて、FLEM 特有の節点変位にほぼ同等に反応する要素形状が望ましいからである。四辺形要素に対し、式 (8) の積分は Gauss の 2×2 点あるいは 3×3 点積分公式を用いれば良い。

節点 i の節点力増分は、節点 i に関与するすべての要素 j について式 (7) の和として次式で求まる。

$$\Delta F_{xi} = \sum_{j=1}^4 \Delta F_{xi}^j, \Delta F_{yi} = \sum_{j=1}^4 \Delta F_{yi}^j \dots\dots\dots (9)$$

式 (7), (8), (9) からわかるように、毎回節点変位を既知として節点力を計算するために、通常の FEM の場合のように全体剛性マトリックスを必要とせず、小容量の要素剛性マトリックスで足りる点が小型計算機を使用する場合には極めて有利となる。

さて、物体の大変形は与えられた荷重に比して要素剛性 $[K^j]$ が小さい時に生じる。載荷当初から要素剛性が小さい場合のほか、応力集中等によって順次降伏して要素剛性が低下する場合もあろう。後者をモデル化するには、次式で毎回計算される要素応力に対し、

$$\left[\begin{array}{c} \Delta \varepsilon_x \\ \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \gamma_{xy} \end{array} \right] = [B^j] [\Delta u_i^j, \Delta v_i^j, \dots, \Delta u_i^j, \Delta v_i^j]^T \dots\dots\dots (10)$$

$$\left[\begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right] + [D] \left[\begin{array}{c} \Delta \varepsilon_x \\ \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \gamma_{xy} \end{array} \right] \dots\dots\dots (11)$$

適当な降伏条件式 (12) を設定し、

$$F(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 0 \dots\dots\dots (12)$$

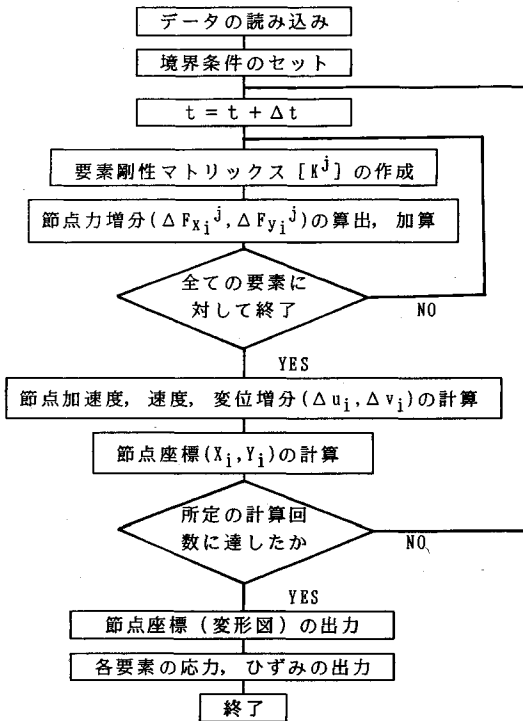


図-3 FLEM フローチャート

これに達した要素について、弾性マトリックス $[D]$ に含まれるヤング率 E を $1/n$ に減じて次回の Δt 増分に入るのが実用的であろう。

3. FLEM プログラムと要素定数の検討

前章に示した解析手順をフローチャートで示したのが図-3である。試験用に開発した解析プログラムは、四辺形平面ひずみ要素を用い、 2×2 点積分公式を標準としている。DEM手法に関する粘性定数 η_i は、静的もしくは準静的な問題を対象として減衰項として使用する場合は、できるだけ臨界減衰時の値 $2\sqrt{(m/K_i)}$ に近く設定することが望まれる。ここに、 K_i は式(1)で定義される剛性係数であって、運動方程式ならびに変位抗力を式(3)と式(7)の形で定式化するとき、節点 i の節点力に参与する周辺4要素の剛性マトリックス $[K]$ の各項絶対値の和が節点 i の剛性 K_i の目安と考えられるので、節点ごと、各 Δt ごとに式(8)で計算するものとする。

一方、時間増分 Δt については、従来のDEMにおけると同様に、差分収束条件 $\Delta t < 2\sqrt{(m/K_i)}$ を用いて²⁾、上述の K_i の存在範囲を考慮して決定すればよい。

FEM手法に関する要素の降伏条件と剛性低下の一例は、地盤工学を対象とする場合について以下のようなである。

前節のFEM解析は引張力を正にしているの、こ

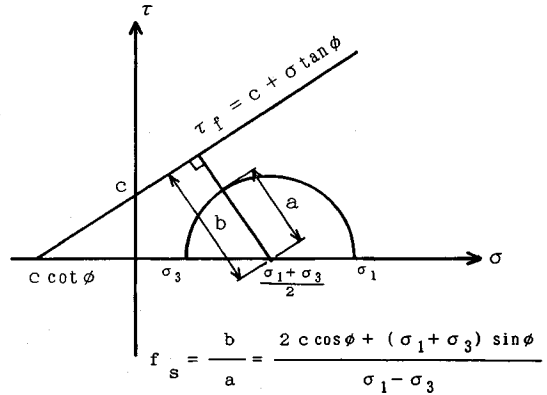


図-4 降伏条件と安定度 f_s (圧縮応力を正とする)

このにおいて、式(11)で与えられる応力成分から圧縮を正とした最大・最小主応力 (σ_1, σ_3) に変換するものとする。その上で、図-4に示すクーロン規準: $\tau_f = c + \sigma \tan \phi$ を降伏条件式(12)に用い、主応力 (σ_1, σ_3) なる点の安定度 (Fairhurst³⁾ の破壊接近度の逆数) f_s を次式で定義する⁴⁾。

$$f_s = \{2c \cdot \cos \phi + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi\} / (\sigma_1 - \sigma_3) \dots \dots (13)$$

各要素について、4個の積分点のいずれか1点でも安定度が1.0以下になればその時点 (t) で要素の降伏とみなし、次回 ($t + \Delta t$) の計算からそのヤング率を E/n に低下させる。 n は解析対象に応じて10から 10^4 (完全塑性体に近い) の範囲で選定される。解析の一例が後出4.の(3)で示される。通常のFEM解析と違ってDEM手法を用いた節点の刻々の運動が中心の大変形解析であるので要素に複雑な構成式を持ち込むよりも、DEMによる要素試験の数値実験⁵⁾と同様な考えに立って、各要素の構成式はできるだけ単純化し、その分要素数を増やすことによってその集合体としての挙動が目標とする構成式に近づくことを期待するのがよいと考えている。この点は今後の検討課題の一つである。

4. 二、三の解析例

FLEMによって以下に述べるような数例の解析を実施した。今回の解析では、FLEMで所期の大変形を表現できるか、さらに、解析条件を従来のFEM、DEMの経験を基に決定したが適切かつ十分か否かなどの基本的な検討に力点をおいて進めた。なお、重力は(1)、(2)の例では考慮しておらず、(3)においてのみ考慮した。

(1) 一軸圧縮試験

両端面の側方向変位を完全拘束した供試体の一軸圧縮試験(定変位速度載荷)を採り上げた。図-5に示すように供試体の1/4にあたる $8 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ を解析領域とし、節点数(質点数)18、FEM要素数10とした。要素は1辺が4 cmの正方形で、積分点数4の平面ひずみ

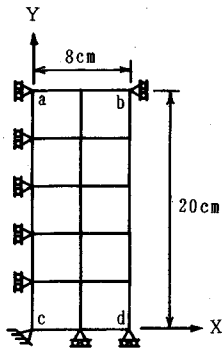


図-5 解析モデル
(一軸圧縮試験)

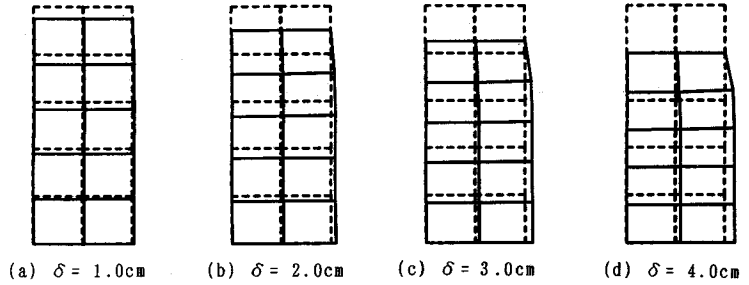


図-6 変形図 (降伏条件無)

表-1 解析定数

ヤング率	$E=100\text{kgf/cm}^2$ (9.8MPa)
密度	$\rho=2.65\text{g/cm}^3$
ポアソン比	$\nu=0.3$
DEM定数	
剛性定数	$K_i : [K_i^j]$ より毎回決定
粘性定数	$\eta_i = 2\sqrt{m_i K_i}$
時間増分	例(1) $\Delta t=1.0 \times 10^{-4}\text{sec}$
	例(2),(3) $\Delta t=1.0 \times 10^{-3}\text{sec}$

要素である。載荷は図の上端 ab に $-y$ 方向に一定速度の強制変位を与えることにし、下端 cd は供試体中央面であるから、水平方向に摩擦 0 で可動とした。供試体の弾性定数、DEM 定数等解析に用いた諸定数を表-1 に示す。

図-6 は降伏条件を課さず、ヤング率一定とした場合の解析結果を示す。解析は、変位速度を $1(\text{cm/s})$ として上端の変位量 δ が図中の値となるまで変形させ、その後、上端を固定して静的な安定状態に至るまで演算を続けたものである。延性材の圧縮試験における樽状変形が表現できたと思う。なお、微小変形の弾性体を考えると、平面ひずみ状態における端面拘束の影響のない供試体中央部の横ひずみ ϵ_x と軸ひずみ ϵ_y の比が $-\epsilon_x/\epsilon_y = \nu(1+\nu)/(1-\nu^2) = 0.429$ ($\nu=0.3$ の場合) で与えられる (本解析でも δ の小さい微小変形の範囲ではこれと一致する) が、本解析結果の図-6 ではいずれもそれより大きく、 $-\epsilon_x/\epsilon_y = 0.460$ (a), 0.479 (b), 0.499 (c), 0.522 (d) となり、変形の進行とともに中央部の膨らみの割合が増大する傾向を示している。これは、本解析において時々刻々の要素形状をもとにひずみ (通常の公称ひずみではなく、実ひずみにあたる) を計算するため、図-6 に示したような大変形の領域では、ひずみ増分に

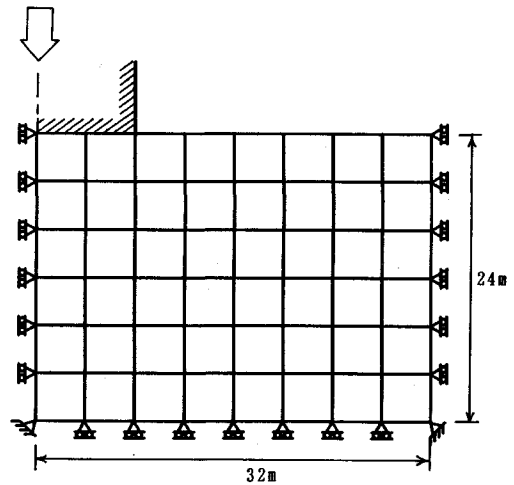


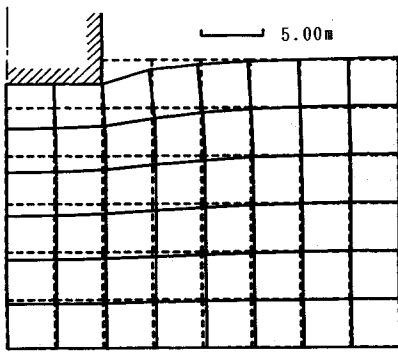
図-7 解析モデル (剛性直接基礎)

対する係数としてのヤング率、ポアソン比を一定とすれば、対数ひずみの特徴に似た実ひずみの性格が強調されるためである。

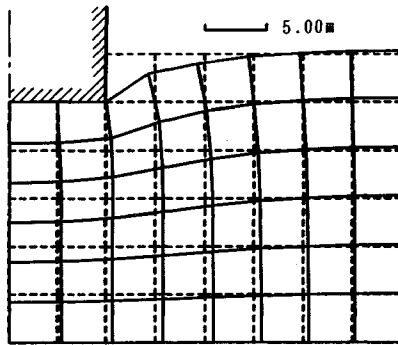
(2) 直接基礎

図-7 は剛性直接基礎の解析モデルを示している。左右対称性を考慮して右半分を解析領域として、節点数 63、FEM 要素数 48 よりなる。要素は 1 辺 4 m の正方形であるが、積分点数 4 は前例 (1) と同じである。用いたヤング率等は表-1 の通りであるが、時間増分は $\Delta t = 10^{-3}(\text{s})$ とした。これは、すでに述べた通り、時間増分量が質点の質量の大きさに依存して決められることによる。

(1) と同様の手順で上辺の 3 節点に $-y$ 方向に強制的な変位 (1m/s) を与えていった。図-8 (a) は押し込み量 δ が 2 m, (b) は 4 m となったときの静的な安定状態を表している。このときの応力状態を図-9 に示す。上辺部には引張応力が生じている部分もみられる。要素数が少ないためややぎこちない変形となっているが、境界条件を満たす安定な解を得ている。

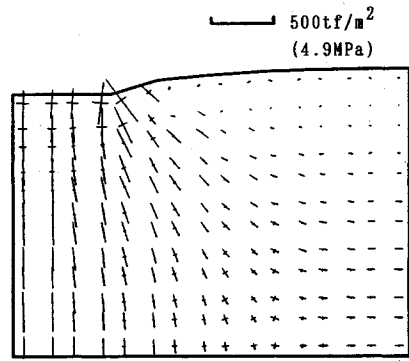


(a) $\delta = 2.0\text{m}$

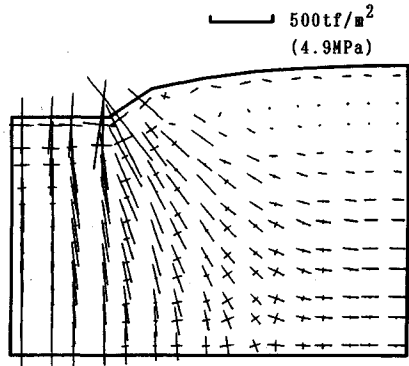


(b) $\delta = 4.0\text{m}$

図-8 変形図 (降伏条件無)



(a) $\delta = 2.0\text{m}$



(b) $\delta = 4.0\text{m}$

図-9 主応力図 (降伏条件無)

(3) 盛土

図-10は、解析モデルを示している。高さ16m、斜面部勾配1:0.5であり、節点数142、FEM要素数116よりなる。前例と同様左右対称性を考慮して、左半分を解析領域とした。

図-11(a)は、自重のみの作用下で求められた静的安定状態であり、上辺での最大沈下量は0.81mを示す結果となっている。同図(b)は、前述の降伏条件： $c=100\text{gf/cm}^2(9.8\text{KPa})$ 、 $\phi=30^\circ$ を適用して、降伏した要素についてはヤング率を当初の1/10に低下させて求めた結果である。最大沈下量は約2.45mであり、(a)と比較して約3倍と大きくなっている。このときの応力分布を図-12に示す。DEM解析定数の設定、降伏条件がうまく機能していることが認められる。

最後に、使用した計算機についてふれておくと、例(1)の解析については、16bitパーソナルコンピュータ(NEC, PC-9801 VX)を使用した。演算1000step(表-1の時間増分 $\Delta t=1.0 \times 10^{-4}\text{sec}$ で実時間0.1秒)に約30分要している。また、例(2)、(3)の解析については鳥取大学情報処理センター(HITAC M-280 D)を使用した。演算1000step($\Delta t=1.0 \times 10^{-3}\text{sec}$ で実時間1秒)にそれぞれ約9分、23分を要している。

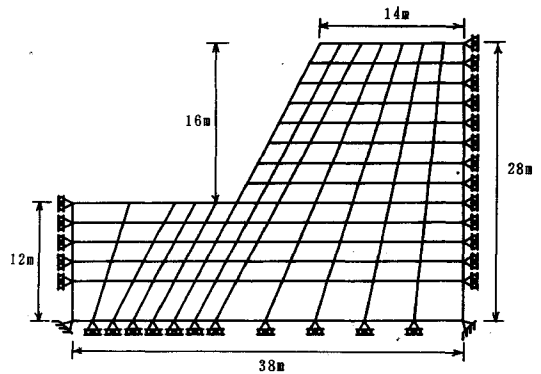
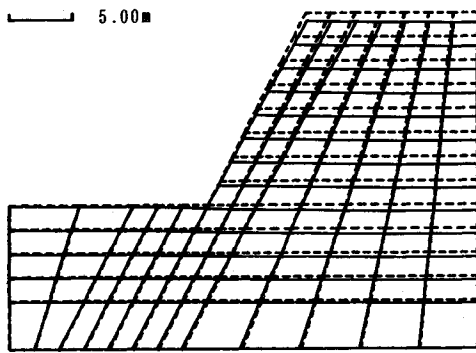


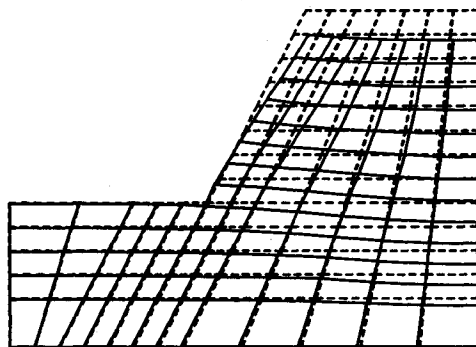
図-10 解析モデル (盛土)

5. まとめ

本研究では、DEMの基本となっている運動方程式の陽形式時間差分による逐次解法を活かし、各要素の自由な変形を許しながら要素間の連続性を保持し、全体としての大変形から流動までを解析できる手法、流動要素法(FLOW Element Method, FLEM)を提案した。その特徴は、要素分割や要素の構成則に従った節点力の誘導はFEMの手法に習い、これによって生じる節点力の不平衡を解消する方向に質量を有する節点が運動方程式



(a) $t=30.0\text{sec}$ (降伏条件無)



(b) $t=50.0\text{sec}$ (降伏条件有)

図-11 変形図

にしたがって運動する過程をDEMと同様の時間差分によって解析するところにある。

この形式上の特徴のゆえに、特にFEMの高度に普及したわが国においては、本法をFEMの一種として位置づけられるかも知れない。それはそれで、生まれたばかりで馴じみの少ない本法にとって、技術的な改良と適用範囲の拡大を図る上に極めて有効な選択と思われる。しかしながら、2章に述べたとおり原理的にはDEMが主体であり、その変位抗力が連続体の弾性反力であるゆえに、その算定にFEM手法を援用したとみる

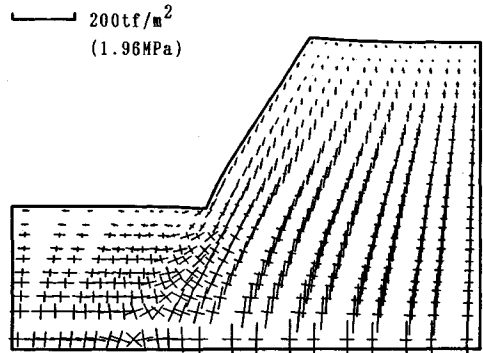


図-12 主応力図 ($t=50.0\text{sec}$, 降伏条件有)

のが本筋であろう。

いずれにしろ、連続体の大変形から流動挙動までを扱える実用解析法の開発が本研究の目的であり、細部にはまだまだ課題を残しながら解析法の基礎は築けたと考えている。

参考文献

- 1) Cundall, P. A. and Board M. : A microcomputer program for modeling large-strain plasticity problems, Prepared for the 6th International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, 1988.
- 2) Cundall, P. A. : Rational Design of Tunnel Supports - A Computer Model for Rock Mass Behavior Using Interactive Graphics for the Input and Output of Geometrical Data, Technical Report MRD-2-74, Missouri River Division, U.S. Army Corps of Engineers, 1974.
- 3) Fairhurst, C. : On the validity of the 'Brazilian' test for brittle materials, Int. J. of Rock Mech. Mining Sci., Vol.1, pp.535~546, 1964.
- 4) 林正夫・日比野敏：地下の掘削に伴う地盤内の緩み領域の逐次的発達過程の解析法，第2回岩の力学国内シンポジウム，1967。
- 5) 木山英郎・藤村尚・西村強：せん断モデルを用いた離散剛要素法の材料定数の検討，土木学会論文集，第382号 / III-7, pp.167~174, 1987.

(1991.5.8 受付)

A PROPOSAL OF THE FLOW ELEMENT METHOD FOR LARGE DEFORMATION AND FLOW PROBLEMS OF A CONTINUUM

Hideo KIYAMA, Hisashi FUJIMURA and Tsuyoshi NISHIMURA

In this paper, a numerical method named FLEM (FLOW Element Method) will be described. The authors have developed the method to analyze large deformation and flow problems in geomechanics. The processes of making a element stiffness matrix and calculating nodal forces are the same to FEM (a global stiffness matrix is not formed). Each node has a virtual mass representing the mass of the surrounding elements, and under unbalanced nodal forces each node displaces along a direction of nodal force vector according to the equation of motion. FLEM adopts the explicit time-marching solution scheme in solving the equation of motion. This process is the same to DEM, so it may be said that FLEM is a practical method coupling DEM with FEM necessarily. It should be emphasized that FLEM analysis does not need large matrix computations and complex lagrangian coordinate expressions.