

# 弾性厳密解に基づく段階掘削を考慮した 素掘任意形状トンネル問題の順解析および逆解析

平島健一\*・川上哲太郎\*\*・藤原紀夫\*\*\*・  
力間俊行\*\*\*\*

本論文では、等方性弾性岩盤内に掘削された任意形状素掘りトンネル周辺部の変位、応力、ひずみ等を弾性厳密解を用いて算定するいわゆる順解析法と、それをもとにした逆解析法について方法論的に提示するとともに、いくつかの数値計算例を通してその適用性を示した。特に段階掘削を考慮した順解析および逆解析を行い、数値計算によって求められるトンネル内空変位と実際の内空変位計測結果との対応関係を明確に示した。

**Keywords:** back-analysis, progressive excavations, arbitrary shape, exact elastic solution

## 1. 緒 言

トンネル掘削位置の作用地山応力や力学定数を定量的に把握するために、いわゆる逆解析法が NATM 工法に関連して進展してきているが、標題のような任意形状トンネル問題に対する取り扱いには有限要素法や境界要素法等の数値解析法にたよらざるを得ないのが現状である<sup>1),2)</sup>。周知のように、これらの数値的手法ではメッシュサイズや計算時間、精度といった問題で各種の制約を受けることは否めない。

著者らは最近、円形・楕円形のトンネルを有する等方性・異方性弾性岩盤の順解析法および逆解析法についての研究成果を発表した<sup>3),4)</sup>。この論文ではそれらの成果を発展させて等方性弾性岩盤を対象とし、素掘りトンネルの形状が円形・楕円形以外の任意形状の場合の2次元の任意の地山応力下での弾性厳密解による順解析法とそれをもとにした逆解析法の手順についての理論的プロセスを提示する。

本手法は写像関数を用いた複素関数論によって任意形状トンネルの周辺部の変位、応力、ひずみ等を算定することを基本としていることから、現場での素掘りトンネル掘削の段階的進行過程を適切に考慮していくことが出来るようになってきている。なお、この手法では、任意形状のトンネル断面に対する複素写像関数を決定する必要があるが、そのためにはトンネル形状の断面形の座標が与えられれば、自動的に決定できるようなプログラムもすでに整備されており、また、すべてに必要な計算時間については上述した数値解析法に比較して極めて短時間で

よく、しかも高精度の結果が得られるといった利点を有している。

## 2. 順解析のための理論

本節では等方性弾性体内に任意形状のトンネルを掘削した場合の空洞周辺部の変位および応力に関する厳密解の導出すなわち順解析法の概要を示す。

まず、地山作用荷重は2次元面内応力  $\sigma_x^0$ ,  $\sigma_y^0$  および  $\tau_{xy}^0$  がトンネルの径に比較して十分遠い位置から作用するものと仮定すれば、無限遠での主応力  $\sigma_1^0$ ,  $\sigma_2^0$  と  $\sigma_x^0$ ,  $\sigma_y^0$ ,  $\tau_{xy}^0$  の関係は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^0 &= 1/2(\sigma_1^0 + \sigma_2^0) + 1/2(\sigma_1^0 - \sigma_2^0) \cos 2\phi, \\ \sigma_y^0 &= 1/2(\sigma_1^0 + \sigma_2^0) - 1/2(\sigma_1^0 - \sigma_2^0) \cos 2\phi, \\ \tau_{xy}^0 &= 1/2(\sigma_1^0 - \sigma_2^0) \sin 2\phi. \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

ここに、 $\phi$  は  $x$  軸と  $\sigma_1^0$  の作用方向の間を反時計廻りに測った角度である (図-1 参照)。

任意形状のトンネル断面の孔縁境界の座標  $(x_0, y_0)$  として次式のように級数形で与えられるものとする。

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \alpha_0 \cos \theta + \sum_{m=1}^M (\alpha_m \cos m\theta + \beta_m \sin m\theta), \\ y_0 &= \alpha_0 \sin \theta - \sum_{m=1}^M (\alpha_m \sin m\theta - \beta_m \cos m\theta). \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

ここに、 $\theta$  は  $x$  軸より反時計廻りに測った角度であり、 $\alpha_m, \beta_m$  ( $m=0, 1, 2, \dots, M$ ) は断面形状によって定まる実定数、 $M$  は正の整数を表わす。例えば、空洞の断面が円形の場合には、 $\alpha_m = \beta_m = 0$  ( $m=1, 2, \dots, M$ ) に、楕円形の場合には、 $\beta_1 = \beta_m = \alpha_m = 0$  ( $m=2, 3, \dots, M$ ) に設定してやればよい。

ここで、トンネルが存在する断面の座標面の孔縁およびその外部を複素変数  $z_0$  で表わし、これを次式のように  $\zeta$ -平面内の単位円およびその外部に変換する写像関数  $\omega(\zeta)$  を考える。

\* 正会員 工博 山梨大学教授 土木環境工学科  
(〒400 甲府市武田 4-3-11)

\*\* 正会員 工博 山梨大学講師 土木環境工学科  
(現在、大成建設(株) 土木設計部)

\*\*\* 工修 (株) 大林組技術研究所 土木第四研究室

\*\*\*\* 新潟県庁

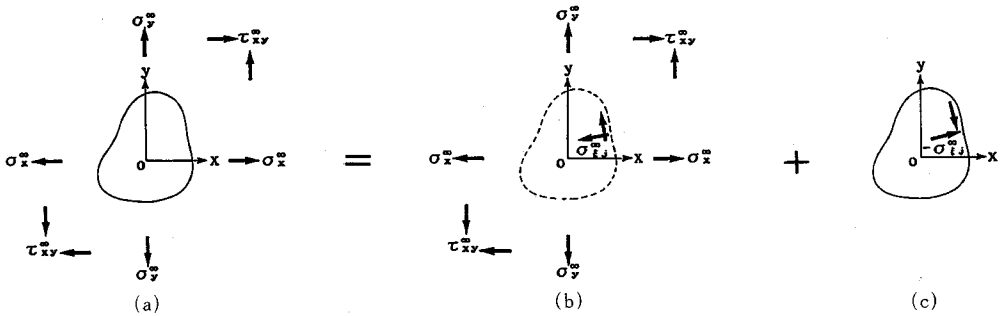


図-2 重ね合せ手法による地山応力問題

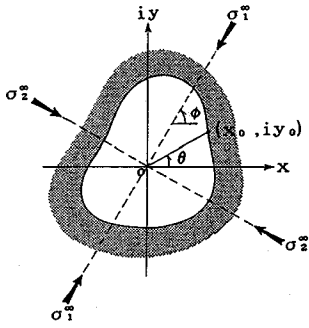


図-1 任意形状トンネルの座標と作用地山応力

$$z = x + iy = w(\zeta) = \alpha_0 \zeta + \sum_{m=1}^M (\alpha_m + i\beta_m) \zeta^m \dots (3)$$

ここに、 $\zeta = \rho e^{i\theta}$  ( $\rho \geq 1$ ) であり、 $\rho = 1$  のとき  $z$  平面の孔縁が、また、 $\rho > 1$  のときその外部領域がそれぞれ対応することになる。

さて、等方性体に対する  $z$  平面内の任意位置における応力、変位は複素解析関数  $\Phi_1(z_0)$ 、 $\Phi_2(z_0)$  を用いて次のように与えられる<sup>4)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4Re[\Phi_1(z)], \\ \sigma_y - \sigma_x + \tau_{xy} &= 2(z\Phi_1'(z) + \Phi_2'(z)), \\ 2G(u - iv) &= k\overline{\Phi_1(z)} - z\Phi_1'(z) - \Phi_2(z). \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

ここに、

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, k = \begin{cases} 3-4\nu, & \text{(平面ひずみ状態)} \\ (3-\nu)/(1+\nu), & \text{(平面応力状態)} \end{cases} \dots (5)$$

$E$ 、 $\nu$  はそれぞれ弾性係数、ポアソン比である。

任意形状のトンネル断面形に沿う直交曲線座標系  $(\xi, \eta)$  での応力、変位は写像関数  $\omega(\zeta)$  を用いて次式で求められる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\eta + \sigma_\xi &= \sigma_y + \sigma_x, \\ \sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} &= \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \cdot \frac{\omega'(\zeta)}{\omega'(\bar{\zeta})} (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}), \\ u_\xi - iv_\eta &= \frac{\zeta}{|\zeta|} \cdot \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} (u - iv). \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

以上から、 $\Phi_k(z)$ 、 $(k=1, 2)$  を決定すれば、必要な力

学量が求められることになる。これらの関数は、孔縁での応力が与えられるような第1種境界値問題、例えば、今対象としている無限遠で  $\sigma_x^\infty$ 、 $\sigma_y^\infty$ 、 $\tau_{xy}^\infty$  が作用するような図-2(a)の問題の場合には、図-2(b)、(c)のように分解して考えることにすれば、図-2(c)の状態に対し、孔の境界 (i.e.  $z_0 = x_0 + iy_0$ ) において次の条件式を満たす必要がある。

$$\Phi_1(z_0) + z_0 \overline{\Phi_1'(z_0)} + \overline{\Phi_2(z_0)} = - \int_0^s (iX_n - Y_n) ds \dots (7)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} X_n &= -(\sigma_x^\infty \cos(n, x_0) + \tau_{xy}^\infty \cos(n, y_0)), \\ Y_n &= -(\tau_{xy}^\infty \cos(n, x_0) + \sigma_y^\infty \cos(n, y_0)). \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

であり、式(7)の右辺は式(8)の  $X_n$ 、 $Y_n$  の孔周縁に沿う積分であるが、これを次式のように Fourier 級数に展開する。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^s Y_n ds &= a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m e^{im\theta} + \bar{a}_m e^{-im\theta}), \\ - \int_0^s X_n ds &= b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (b_m e^{im\theta} + \bar{b}_m e^{-im\theta}). \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

いま、写像関数  $z = \omega(\zeta)$  を使って、 $\Phi_k(z)$  を変換したものを  $\Phi_k(\zeta)$  と表示する。すなわち、

$$\Phi_k(z) = \Phi_k[\omega(\zeta)] \equiv \Phi_k(\zeta) \dots (10)$$

このように書くものとすれば、式(7)は  $\zeta$  平面内の単位円上の関係式としては次のように書き直される。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(\sigma) + \frac{\omega'(\sigma)}{\omega'(\bar{\sigma})} \overline{\Phi_1(\bar{\sigma})} + \overline{\Phi_2(\bar{\sigma})} \\ = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m + ib_m) \sigma^m + \sum_{m=1}^{\infty} (\bar{a}_m + i\bar{b}_m) \sigma^{-m}. \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

ここに、 $\sigma$  は  $\zeta = \rho e^{i\theta}$  の式で  $\rho = 1$  すなわち、写像面での単位円  $\sigma = \zeta|_{\rho=1} = e^{i\theta}$  を表す。

ここで、 $\Phi_k(\zeta)$  を次式のように仮定する。

$$\Phi_1(\zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{A}_m \zeta^{-m}, \Phi_2(\zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{B}_m \zeta^{-m} \dots (12)$$

上式および式(3)を式(11)に代入し、 $\zeta$  の同一べきの係数を等置して整理すれば、最終的に次式のように

$A_m, B_m$  が満たすべき関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} A_p &= (\bar{a}_p + i\bar{b}_p), \quad (p=M-1, M, \dots, \infty) \\ A_p &= (\bar{a}_p + i\bar{b}_p) + \sum_{j=1}^{M-p-1} j\bar{A}_j \gamma_{j+p+1}^*, \quad (p=1, 2, \dots, M-2) \\ \bar{B}_p &= (a_p + ib_p) + \sum_{j=1}^{M+p-1} j\bar{A}_j \gamma_{j-p+1}^*, \quad (p=0, 1) \\ \bar{B}_p &= (a_p + ib_p) + \sum_{j=1}^{M+p-1} j\bar{A}_j \gamma_{j-p+1}^* + \sum_{j=1}^{p-1} j\bar{A}_j \gamma_{p-j-1}. \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

上式中の第 2 番目の式は、二、三の演算ののち、次のように書きかえられる。

$$\left. \begin{aligned} &\sum_{j=1}^p A_j \left\{ \delta_j^p - j \sum_{k=p+2}^M (k-p-1) \gamma_k^* \bar{\gamma}_{k-p+j}^* \right\} \\ &- \sum_{j=p+1}^{M-2} A_j \left\{ j \sum_{k=p+2}^{M+p-1} (k-p-1) \gamma_k^* \bar{\gamma}_{k-p+j}^* \right\} \\ &= (\bar{a}_p + i\bar{b}_p) + \sum_{j=1}^{M-p-1} j^* \gamma_{j+p+1}^* (a_j - ib_j), \\ &\quad (p=1, 2, \dots, M-3) \\ &\sum_{j=1}^{M-2} A_j \{ \delta_j^{M-2} - j \gamma_M^* \bar{\gamma}_{j+2}^* \} \\ &= (\bar{a}_{M-2} + i\bar{b}_{M-2}) + \gamma_M^* (a_1 - ib_1). \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

この  $(M-2)$  元の連立 1 次方程式は簡単に解くことができ  $A_1, A_2, \dots, A_{M-2}$  が求められる。したがって、残りの係数  $A_p$  あるいは  $B_p$  の値は式 (13)<sub>3,4</sub> から求められる。

なお、 $\gamma_p^*, \bar{\gamma}_p$  は次式で与えられる係数である。

$$\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} = \sum_{p=1}^M \gamma_p^* \sigma^{-p} + \sum_{p=0}^{\infty} \bar{\gamma}_p \sigma^p. \dots (15)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \gamma_p^* &= \frac{1}{\alpha_0} \left\{ (\alpha_p + i\beta_p) + h_{1,M-2}^p \sum_{j=1}^{M-p-1} j(\alpha_j - i\beta_j) \gamma_{j+p+1}^* \right\}, \\ \bar{\gamma}_p &= \delta_{1p} + \frac{1}{\alpha_0} \sum_{j=1}^{M+p-1} j(\alpha_j - i\beta_j) \gamma_{j-p+1}^*, \quad (p=0, 1) \\ \bar{\gamma}_p &= \frac{1}{\alpha_0} \left\{ \sum_{j=p}^M j(\alpha_j - i\beta_j) \gamma_{j-p+1}^* + \sum_{j=1}^{p-1} (\alpha_j - i\beta_j) \gamma_{p-j-1} \right\}, \\ &\quad (p=2, 3, \dots, M) \\ \bar{\gamma}_p &= \frac{1}{\alpha_0} \sum_{j=1}^M j(\alpha_j - i\beta_j) \gamma_{p-j-1}. \quad (p=M+1, M+2, \dots, \infty) \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

以上より、関数  $\Phi_1(\zeta)$  および  $\Phi_2(\zeta)$  に含まれるすべての係数  $A_m$  および  $B_m$  が、外荷重形式によって与えられる  $a_m, b_m$  および孔形状によって定まる  $\alpha_k, \beta_k$  の既知定数によって表示されたことになる。

なお、 $B_m$  の決定には式 (11) の複素共役式から直接  $\Phi_2(\zeta)$  を求める方が簡便であり、その結果は次式のようになる。

$$\Phi_2(\zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m - ib_m) \zeta^m + \sum_{m=0}^{\infty} (\bar{a}_m - i\bar{b}_m) \zeta^{-m}$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty} \bar{A}_m \zeta^m + \frac{\bar{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \sum_{m=1}^{\infty} m A_m \zeta^{-(m+1)}. \dots (17)$$

ところで、無限遠より作用する応力  $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$  に対して式 (9) の複素定数  $a_m, b_m$  は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} a_m &= -1/2 h_{1,M}^m \{ \delta_{1m} \alpha_0 (\sigma_y^\infty + i\tau_{xy}^\infty) \\ &\quad + (\alpha_m - i\beta_m) (\sigma_y^\infty - i\tau_{xy}^\infty) \}, \\ b_m &= 1/2 h_{1,M}^m \{ \delta_{1m} \alpha_0 (\tau_{xy}^\infty + i\sigma_x^\infty) \\ &\quad + (\alpha_m - i\beta_m) (\tau_{xy}^\infty - i\sigma_x^\infty) \}. \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

ここに、 $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタであり、また  $h_{k,n}^m$  は次式で定義される量である。

$$h_{k,n}^m = \begin{cases} 1 & \text{for } k \leq m \leq n, \\ 0 & \text{for } m < k \text{ or } n < m. \end{cases} \dots (19)$$

しかるに、上式までで求められる応力、変位は図-2(c) の状態に対するものであり、それらを  $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1, u^1, v^1$  とすれば、図-2(b) のトンネルの孔が存在しない状態での応力  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ 、変位  $u^0, v^0$  との重ね合せによって最終的に求めるべき図-2(a) の応力、変位が次式によって表示される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^0 + \sigma_x^1, \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^1, \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^1, \\ u &= u^0 + u^1, v = v^0 + v^1. \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} u^0 &= \frac{1-\nu^2}{E} \left( \sigma_x^0 - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y^0 \right) x + \left( \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}^0 - \bar{\omega} \right) y + u_0, \\ v^0 &= \frac{1-\nu^2}{E} \left( \sigma_y^0 - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x^0 \right) y + \left( \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}^0 + \bar{\omega} \right) x + v_0. \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

上式中の  $u_0, v_0$  および  $\bar{\omega}$  は剛体移動量および剛体回転角である。なお、式 (21) は平面ひずみ状態とした場合の変位式である。

### 3. 逆解析法の概要

通常の NATM 工法におけるように、トンネルの A 計測、B 計測から、前節で得られた任意形状の空洞断面を有する等方性弾性地山の理論解を利用して地山の力学定数および初期応力を算定するための逆解析法の手順の概要について述べよう。なお、本論文の主題である段階掘削を考慮した逆解析法等の詳細な説明は、具体例と合わせて後述する。

例えば、図-5 の図中に示したように、通常の A 計測によって内空変位計測を天端 A 点および空洞壁面の B、C 点に計測ピンを設置して実施したものとする。これより、A-B、A-C、B-C 各測線で測定された変位量を  $\Delta L_{AB}, \Delta L_{AC}, \Delta L_{BC}$  とし、これらをもとの測線長で除した値を見掛けのひずみとして次式のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{AB} &= \Delta L_{AB} / L_{AB}, \varepsilon_{AC} = \Delta L_{AC} / L_{AC}, \\ \varepsilon_{BC} &= \Delta L_{BC} / L_{BC}. \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

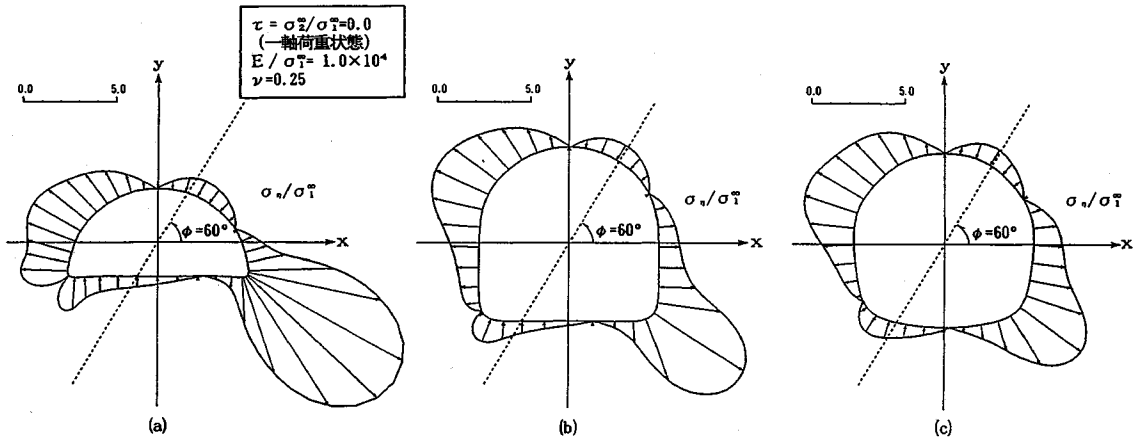


図3 一軸性の初期応力を受けた岩盤内のトンネル孔周縁に生じる  $\sigma_n$  の分布

なお、段階掘削によって断面下部の切り下げを行う場合には側壁面の B, C に相当する計測点を順次、下部断面位置に新たに設置するような方式 (図-5 参照) をとらせることにすれば、上述の定義式がそのまま利用できることになる。本研究では、上式を用いて得られる見掛けのひずみを入力データとして用いることとする。

さて、A, B, C 各点の変位  $u, v$  は、順解析に必要な応力値、主応力比、作用方向および弾性係数などの同定すべきパラメータを適宜与えることにより算定することができるから、式 (22) で定義される値は容易に決定され、それらを例えば  $\epsilon_{AB}^*, \epsilon_{AC}^*, \epsilon_{BC}^*, \dots$  のように表わすことにする。したがって、内空変位計測の実測値より求められたひずみ  $\epsilon_{AB}, \epsilon_{AC}, \epsilon_{BC}, \dots$  の値に対し、次式の条件を満足するまで各パラメータを変化させながら繰り返し計算を行うことによって、最適なパラメータを同定することができる。

$$(\epsilon_{AB} - \epsilon_{AB}^*)^2 + (\epsilon_{AC} - \epsilon_{AC}^*)^2 + (\epsilon_{BC} - \epsilon_{BC}^*)^2 + \dots < \epsilon_{err}^2 \dots \dots \dots (23)$$

ここに、 $\epsilon_{err}$  は適当に設定した許容誤差を表す。

#### 4. 数値計算例

##### (1) 写像関数

従来までに任意形状孔の写像関数を決定した例は Muskheliskivili をはじめ数多く報告されている<sup>6)-8)</sup>。しかし、それらは式 (3) の  $\omega(\zeta)$  の項数  $M$  として 2 ~ 3 と極めて少なくとった場合のものがほとんどで、一般的な断面形状を表示するには必ずしも適切ではない。これに対し Heller ら<sup>9)</sup> は矩形断面の隅角部の曲率半径を系統的に変化させた場合の写像関数を求めているが、ここではトンネルのように上下非対称に孔形状を順次切り抜けていく段階掘削を想定したものを取り扱うために、Melentiev の方法<sup>8)</sup> によって系統的に写像関数を求める

こととした。その幾つかの例を付録の図-A に示し、またそれらの各図形に対する写像関数  $z = \omega(\zeta)$  の具体的な式を式 (A.1) に与えている。ここでは通常よく用いられる断面形状のトンネルを想定して、理論解析を実施するための計算例として付録 A のものとは異なる図-3 (a), (b), (c) のような断面形のものを考えることにすれば、それらの場合の写像関数形は次式で与えられる。

図-3(a) の場合：

$$z = r_0 (0.7698\zeta - 0.2382\zeta^{-1} + 0.1191\zeta^{-2} - 0.0394\zeta^{-3} - 0.0002\zeta^{-4} + 0.0104\zeta^{-5} - 0.0071\zeta^{-6}),$$

図-3(b) の場合：

$$z = r_0 (1.0787\zeta - 0.0063\zeta^{-1} + 0.0836\zeta^{-2} - 0.0784\zeta^{-3} + 0.0290\zeta^{-4} + 0.0050\zeta^{-5} - 0.0050\zeta^{-6}),$$

図-3(c) の場合：

$$z = r_0 (1.0317\zeta - 0.0012\zeta^{-1} + 0.0343\zeta^{-2} - 0.0346\zeta^{-3} + 0.0174\zeta^{-4} + 0.0013\zeta^{-5} - 0.0082\zeta^{-6}).$$

$$\dots \dots \dots (24)$$

ここに、 $r_0$  はトンネル断面形状の内径寸法に関する任意定数である。

その他の断面形のトンネルの場合も同様にして関数形が容易に求められる。前述したように孔形状の座標点を与えられれば自動的に  $\omega(\zeta)$  の係数  $\alpha_m, \beta_m$  が決定出来るような計算プログラムがすでに著者らの研究室において完成している。

##### (2) 順解析による計算例

図-3 および式 (24) で与えられた断面形に対する順解析結果の例として、水平軸より反時計回りに 60° 回転した方向から一軸性の荷重  $\sigma_y^0$  が作用する場合の各断面

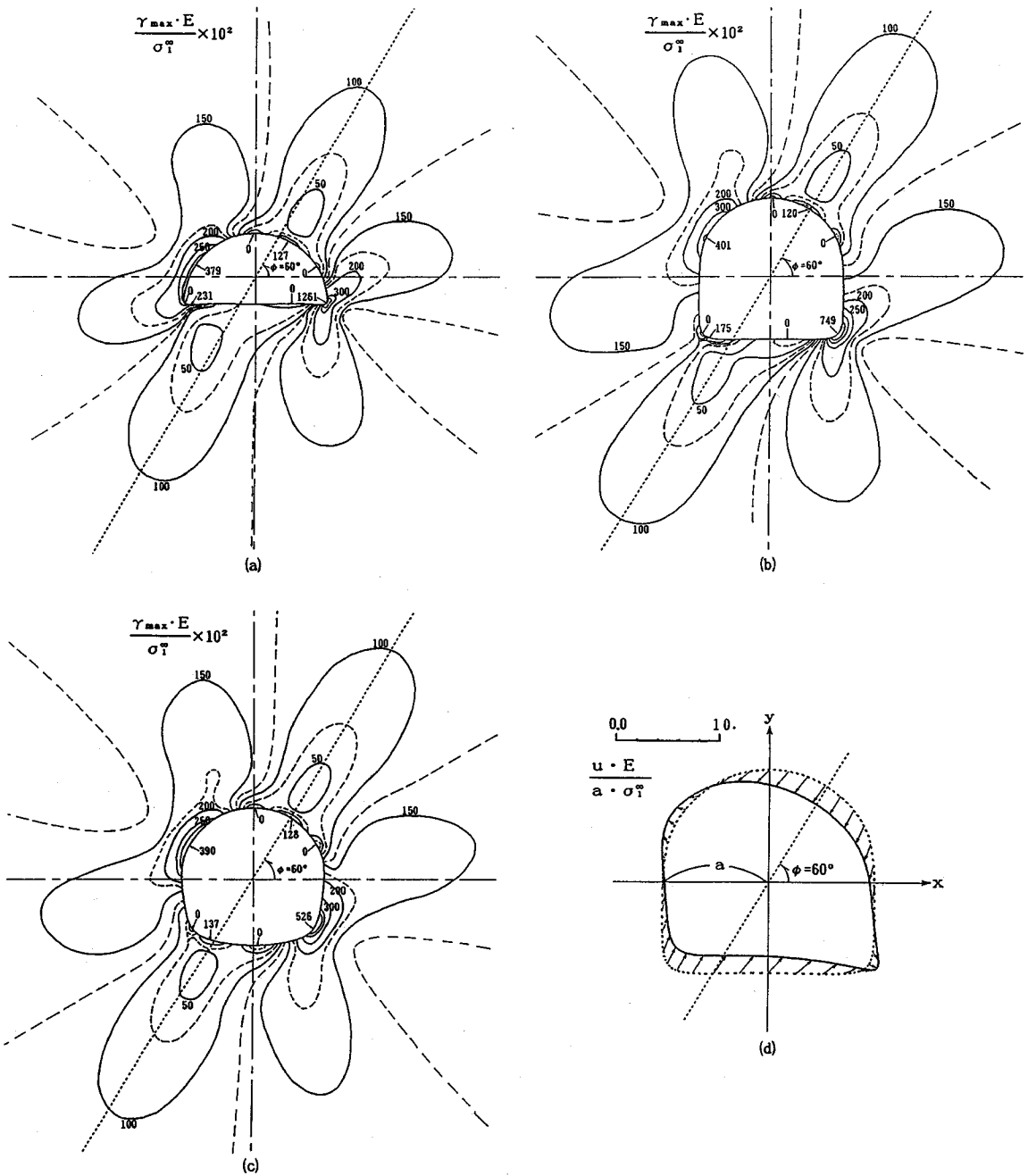
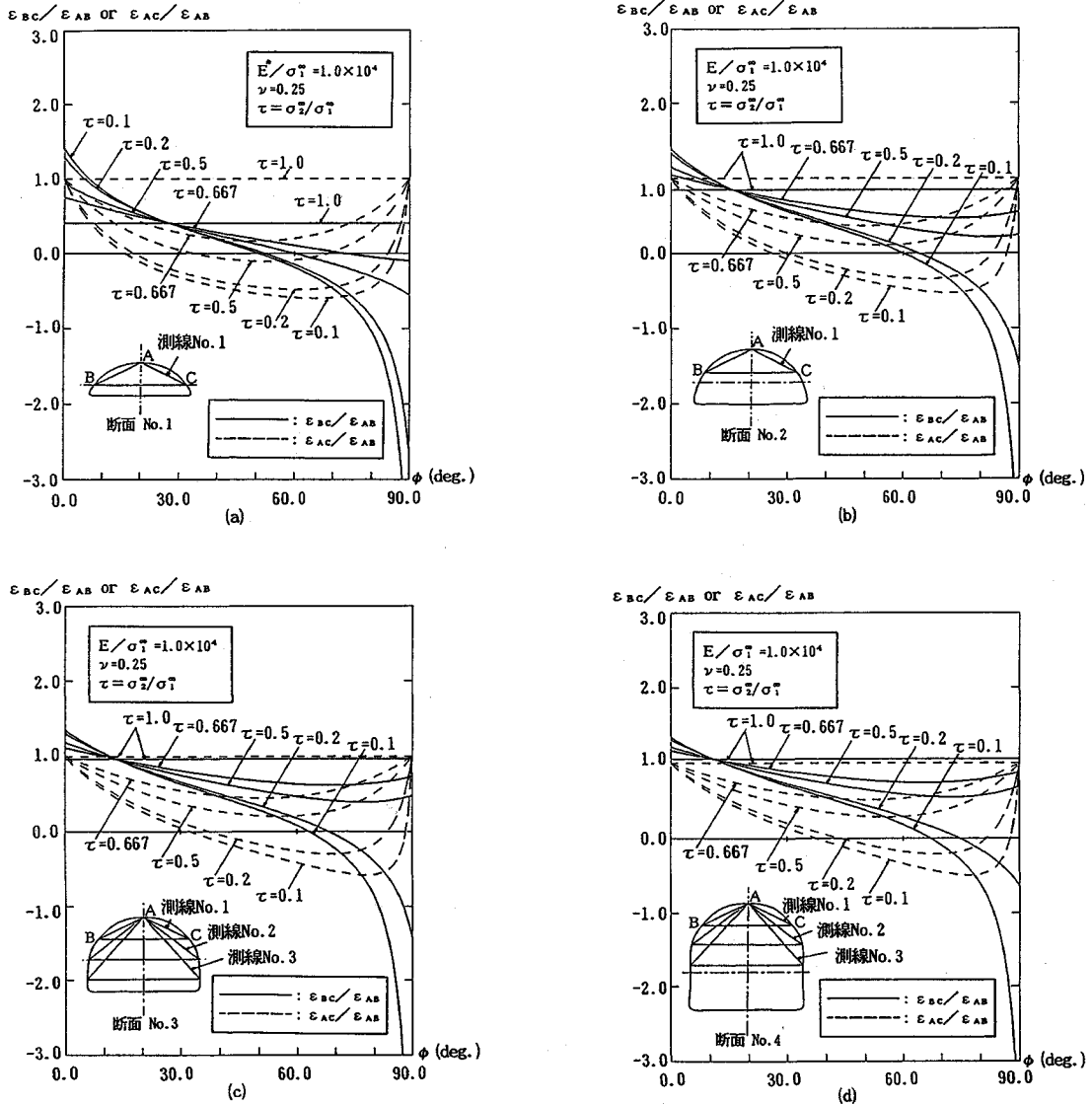


図-4 図-3のトンネル断面に対する孔周辺での最大せん断ひずみ  $\gamma_{max}$  の分布 (図(a)~(c)) および図-3(b) 孔縁における変形状態 (図(d))

のトンネル孔周縁に発生する応力、変位は前節に示した理論式を用いて求めることができるが、その内の接線方向直応力  $\sigma_\theta$  の分布図を図-3に示した。図-3(a)の孔縁の右側下端で大きな応力集中が発生しているのが観察できる。この図-3(a)の断面形をさらに掘削して、例えば最終的なトンネル形状として図-3(b)および(c)の開削がなされた場合を想定して、同様の応力  $\sigma_\theta$  を計

算した結果が同図中に描かれている。このうちの図(c)は図(b)に比較して下端部の曲率がゆるやかであるため、その分、応力集中が大きくなっていないことが指摘できる。これらの図では孔縁の応力  $\sigma_\theta$  のみを描いているが、孔縁および内部位置の任意点での応力、ひずみ、変位も全く同様に求められるのは言うまでもない。その例として、図-3の場合と同じ一軸荷重  $\sigma_1^0$  の作用に対



図—5 掘削進行に伴って変化する断面形状のトンネルに対する順解析結果

して孔周辺部での任意位置の最大せん断ひずみ  $\gamma_{max}$  を求め、それらを図示したものが図—4(a), (b), (c) である。これらは周知のように光弾性実験によって得られる等色線（等主応力差に比例した線）縞模様のもと全く同じものであり、したがって、これらの結果の妥当性はその実験によっても検証できるであろう。この図で  $\gamma_{max}$  が適当な値、例えば  $150 \times 10^{-2} \times (\sigma_1^0/E)$  以上で塑性化が発生するといったような基準が設定されれば、図からその場合の塑性化領域の拡がりが近似的な意味で推定できることになる。なお、図—4で示した  $\gamma_{max}$  は式(4)で求められた応力成分から次の式によって計算することができるものである。

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{max} &= (\epsilon_x - \epsilon_y) \cos 2\beta + \gamma_{xy} \sin 2\beta, \\ \tan 2\beta &= \gamma_{xy} / (\epsilon_x - \epsilon_y). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= (\sigma_x - \nu\sigma_y) / E, \quad \epsilon_y = (\sigma_y - \nu\sigma_x) / E, \\ \gamma_{xy} &= \{2(1+\nu) / E\} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

上式(26)は平面応力状態に対するものであるが、問題を通常のトンネル掘削のような平面ひずみ状態として考える場合には式(26)の  $E, \nu$  の代わりに次のように置き換えてやればよい。

$$E \rightarrow E / (1 - \nu^2), \quad \nu \rightarrow \nu / (1 - \nu). \dots\dots\dots (27)$$

なお、図—3(b)の断面形状、荷重状態下での孔縁での変形状態 ( $u_\xi, u_\eta$  の変位成分を合成して得られる合変

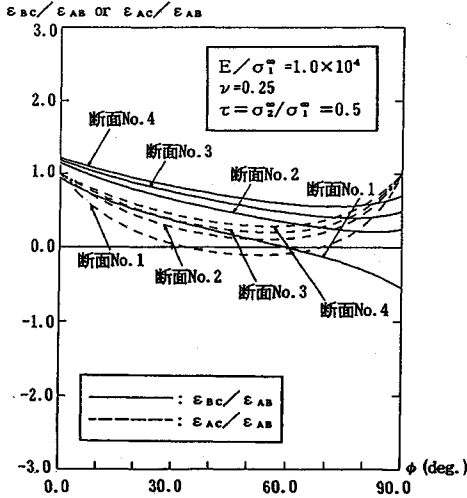


図-6 断面形状が変化した場合のひずみ比の順解析結果 (主応力比  $\tau=0.5$  の場合)

位ベクトルの移動状態)をプロットしたものを参考のために図-4(d)に示してある。

次に、NATM工法のA計測の場合のようにトンネル天端Aおよび側壁B、Cに計測ピンを設置してそれぞれの点の変位から、式(22)で定義したひずみを求め、それらを次式で定義されるように、見掛けのひずみの正規化を行う(以下、ひずみ比と呼ぶこととする)。ただし、ここで定義したひずみ比は、順解析結果の整理の都合上導入したものであり、逆解析における入力データとしては、見掛けのひずみを用いることに注意されたい。

$$\varepsilon_{BC}/\varepsilon_{AB}, \varepsilon_{AC}/\varepsilon_{AB} \quad (\varepsilon_{AB} > \varepsilon_{AC} \text{ の場合}) \dots\dots\dots (28)$$

$$\varepsilon_{BC}/\varepsilon_{AC}, \varepsilon_{AB}/\varepsilon_{AC} \quad (\varepsilon_{AB} < \varepsilon_{AC} \text{ の場合}) \dots\dots\dots (29)$$

例えば、掘削断面が徐々に進行していくという仮定の下でのひずみ比を、地山作用主応力  $\sigma_1^*$ 、 $\sigma_2^*$  の比  $\tau = \sigma_2^*/\sigma_1^*$  をパラメータとし、 $\sigma_1^*$  の作用方向角  $\phi$  を横軸にとってプロットしたものを図-5(a)~(d)に示した。これらの図の断面形状を表す式(3)の写像関数の具体式については付録Aの式(A.2)に与えた。なお、図-6の計算ではトンネル開削後に地山主応力  $\sigma_1^*$ 、 $\sigma_2^*$  が作用するものとして求められていることに注意する必要がある。(ただし、開削前に  $\sigma_1^*$ 、 $\sigma_2^*$  が作用していた時点での初期変位分  $u^0$ 、 $v^0$  は計算結果の中から除外してある。)しかるに、実際には地山応力はトンネル開削以前にすでに作用しているものであるから、例えば、図-5(a)の開削断面の状態で計測ピンA、B、Cを設置したとすれば、この状態でのひずみ  $\varepsilon_{AB}$ 、 $\varepsilon_{BC}$ 、 $\varepsilon_{AC}$  は発生せずすべて零となる。したがって、図-5(b)のように開削断面形が進行したとすれば、計測ひずみ比は次式のように求めるべきものである。

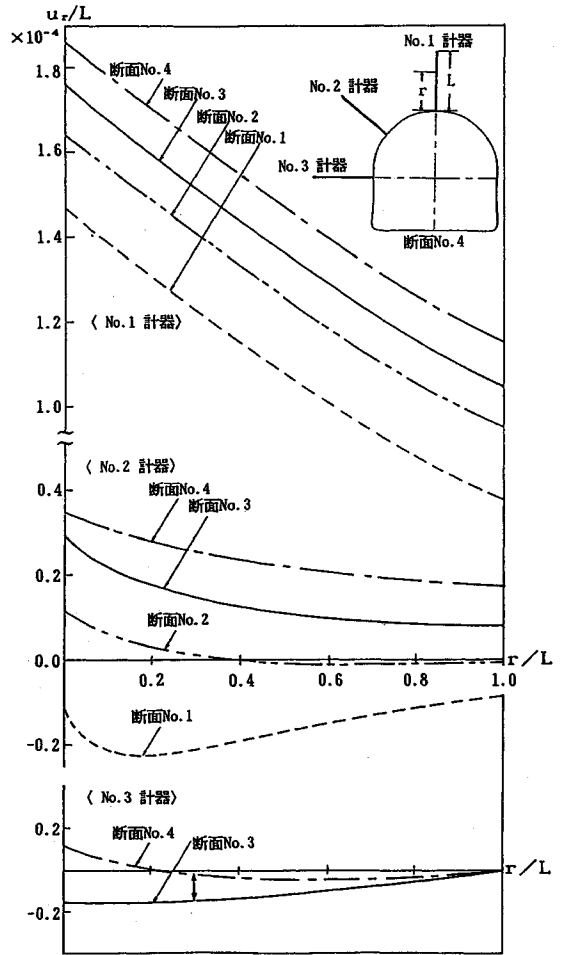


図-7 トンネル周辺の内部変位の計算結果 ( $\tau=0$ ,  $\sigma_1^*=1.0 \text{ kgf/cm}^2$  とした場合)

$$\left. \begin{aligned} \Delta \left( \frac{\varepsilon_{BC}}{\varepsilon_{AB}} \right) &= \left( \frac{\varepsilon_{BC}}{\varepsilon_{AB}} \right)_{\text{断面2}} - \left( \frac{\varepsilon_{BC}}{\varepsilon_{AB}} \right)_{\text{断面1}} \\ \Delta \left( \frac{\varepsilon_{AC}}{\varepsilon_{AB}} \right) &= \left( \frac{\varepsilon_{AC}}{\varepsilon_{AB}} \right)_{\text{断面2}} - \left( \frac{\varepsilon_{AC}}{\varepsilon_{AB}} \right)_{\text{断面1}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

そのことを明確にするために、図-5(a)~(d)の図のうち  $\tau=0.50$  の場合のみを抽出してプロットし直したものが図-6である。この図によれば、式(30)の計算値の理解がより容易になるであろう。なお、当然のことながら、本解析においては線形弾性体を対象としていることから、どのような掘削過程を経ても、最終内空変位は同じとなる。

次に、NATM工法におけるB計測の一つである地中内変位計測を行う場合を想定した計算例について述べよう。いま、地中内部変位計を図-7に示すように天端より鉛直方向にNo.1計器を、その他として図示のようにNo.2、No.3計器を設置した場合にそれぞれの方向に沿う変位  $\hat{u}_r$  を計算する。この場合、 $\sigma_1^*=1.0 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\tau=$

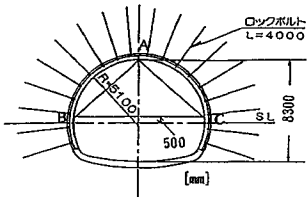


図-8 内空変位計測を実施したトンネル断面形状

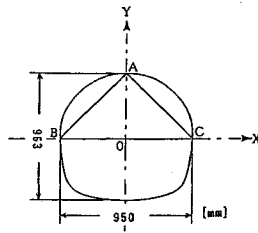


図-9 数値計算に用いたトンネル断面形状

$\sigma_z^0/\sigma_r^0 = 0.0$ ,  $E = 1.0 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\nu = 0.25$  を仮定して  $\bar{u}_r$  の分布を求めたものが図中に表示されている。ところで、実際の計測は埋込み先端 (*i.e.*  $r/L = 1.0$  の位置) を基準にしてその位置の変位を零として、それからの相対的な変化量として求めるのが普通であるので、その場合には  $r/L = 1.0$  の位置での変位を全体的に差し引いてやればよい。さらに、段階掘削による変化を見る場合には  $r/L = 1.0$  の位置での実線、点線、一点鎖線を零の基準線として重ね合せて、図-7の結果のそれぞれの差としてやればよい。例えば、図-7で断面 No.3 から断面 No.4 へ掘削が進行した場合を考えるものとすれば、No.3 計器の内部変位計について、上述の考え方に従ってプロットしたものが図中の最下段の図のようになり、 $r/L = 0.3$  の位置では図中に示した矢印の分だけの変位変化量が発生することを表わしている。

以上に示したように、トンネル形状、作用地山荷重および弾性定数が設定されるならば、孔周縁のみならず岩盤の任意位置での応力、ひずみ、変位が極めて簡単に求められる。

### (3) 逆解析による計算例

本論文で示した逆解析法の計算例としてまず最初に図-8に示すような NATM トンネルにおける実際の内空変位計測結果を用いて逆解析を行った結果を示す。ここで、逆解析において仮定したトンネル形状を図-9に、また、入力データとして内空変位計測値より求めた見掛けのひずみ (式 (22)) 等を表-1に示した。それらをもとにして、第3節に述べた手法を用いて逆解析を実施した結果を表-2に示したが、ここでは参考のためにトンネル形状を円形および楕円形と仮定し、同様の逆解析を行った結果も示してある。なお、この例では内空変位計測は切羽後方において行われることから、計測変位量は切羽進行に伴う応力増加分に対応した量となる。したがって、全変位量から計測変位量を差し引いた残りの量が、全変位量に占める割合、いわゆる発現係数  $\eta$  を設定し逆解析結果に乗じてやる必要がある。この計算例の場合、種々の他のデータを参考にして一応、 $\eta = 0.2$  と設定して表-2の弾性係数および最大主応力値に乗じてある。

表-1 図-9の場合の入力データおよび設定値

見掛けのひずみ			設定値
$\epsilon_{AB}$	$\epsilon_{AC}$	$\epsilon_{BC}$	$\nu$
$1.55 \times 10^{-3}$	$4.10 \times 10^{-4}$	$1.36 \times 10^{-3}$	0.25

表-2 表-1のデータをもとに求めた逆解析結果

トンネル形状	$E (\times 10^6) (\text{kgf/cm}^2)$	$\sigma_r^0 (\times 10^2) (\text{kgf/cm}^2)$	$\sigma_z^0/\sigma_r^0$	$\phi$ (deg.)
任意形状	0.352	0.244	0.510	30.5
楕円形	0.442	0.341	0.425	24.5
円形	0.361	0.254	0.481	28.0

ところで、上述の例のように、単一のトンネル断面形状における内空変位計測結果を用いて2次元逆解析を行う場合、求められた結果にその取り扱い方が必ずしも明確ではない発現係数に乗じて修正を施すというあいまいさがつきまとうことになる。このあいまいさを除去するためには、切羽の影響を考慮した完全な形の3次元解析を行えばよいが、それはまだ実用的な段階までには至っていないのが現状である。この発現係数の問題をある程度取り除くために、本論文では切羽の進行を考慮した段階掘削を取り入れた逆解析を実施することとした。具体的には例えば、トンネルの開削断面形状が図-5(a)~(d)の図中に示されているように4段階で進行したものと仮定し、それぞれの断面において内空変位計測が実施されたものとする。次に、各断面における内空変位計測結果より求められる見掛けのひずみを、式 (30) のように先行変位を差し引いた形で表現する。(式 (30) は、ひずみ比を用いて表わされているが、本逆解析では見掛けのひずみを直接用いることに注意されたい。) すなわち、開削断面形状の変化による応力変動分に対応したひずみとして求め、これを逆解析のための入力データとする。これらのデータは当然各断面に対応してそれぞれ存在する訳であるから、逆解析のための繰り返し計算は式 (23) の条件が各断面において同時に満足するまで実行しなければならない。

以下では、上述の手法を用いた逆解析の一例を示す。表-3は式 (30) の定義に従って求めた開削断面進行に伴うひずみの増分を示したもので、これらを入力データとして用いることとした。ところで、この表に示したひずみの増分の値としては、本手法の確認という意味から順解析結果より求められた値を作為的に一部変化させたものを用いている。なお、実測値に対する適用は、具体的な実測データを利用して検討を行った数値例と本論文の関連について近く提示する予定である。なお、順解析結果より求められた値をそのまま用いて逆解析を行った場合には、同定された応力や物性値等のパラメータは当



表-3 図-5の段階掘削断面に対するひずみの変化量の設定値

測線 No.	1						2	3
	2-1	3-1	4-1	3-2	4-2	4-3	4-3	4-3
$\Delta \varepsilon_{AB} (\times 10^{-5})$	0.763	1.196	1.742	0.433	0.979	0.546	0.245	-0.070
$\Delta \varepsilon_{BC} (\times 10^{-5})$	2.127	3.263	4.988	1.136	2.861	1.725	2.027	3.449
$\Delta \varepsilon_{AC} (\times 10^{-5})$	1.047	1.714	3.451	0.667	2.404	1.737	1.230	1.510

表-4 表-3のデータをもとに求めた逆解析結果

$E (\times 10^8)$ (kgf/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_1^0 (\times 10^2)$ (kgf/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_2^0/\sigma_1^0$	$\phi$ (deg.)
0.202	2.080	0.240	25.2

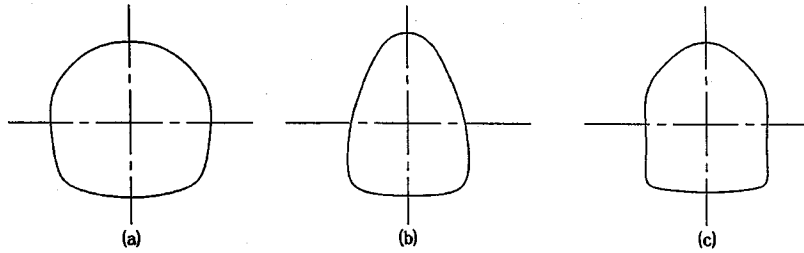


図-A 各種のトンネル断面形状

然のことながら、順解析において用いたそれらと完全に一致することが確認されている。表-4に逆解析結果を示した。この計算例の場合、式(23)の左辺で表わされる誤差の2乗和は、 $0.6 \times 10^{-10}$ 程度の値であった。

### 5. 結 言

本論文では、等方性弾性岩盤内に掘削された任意形状素掘りトンネル周辺部の変位、応力、ひずみ等を弾性厳密解を用いて算定するいわゆる順解析法と、それをもとにした逆解析法について方法論的に提示するとともに、いくつかの数値計算例を通してその適用性を示した。特に段階掘削を考慮した順解析および逆解析を行い、数値計算によって求められるトンネル内空変位と実際の内空変位計測結果との対応関係を明確に示すとともに、2次元の逆解析を行う際問題となる発現係数のあいまいさを段階掘削過程での適切な計測器設置とそれらによる計測によって、ある程度取り除くことが可能であることを示した。

今後さらに多数の現場計測データへの適用を図り、本解析法のトンネル計測管理に対する工学的有用性についての検証を行う予定である。

#### 付録 A. 二、三の断面形状のトンネルに対する写像関数

本文で与えた断面形状とはやや異なる形状のものに対する写像関数の例を以下に示す。これらの形状に類似したものが Derski の本<sup>3)</sup>に与えられているが、係数の項数が少ないこと、 $z_0$ 平面と $\zeta$ 平面の対応が内外逆の写像としている点が著者らのものと異なっている。

図-A(a) の場合：

$$z = r_0(1.031\zeta + 0.002\zeta^{-1} + 0.030\zeta^{-2} - 0.034\zeta^{-3} + 0.017\zeta^{-4} + 0.003\zeta^{-5} - 0.001\zeta^{-6}),$$

図-A(b) の場合：

$$z = r_0(0.918\zeta + 0.173\zeta^{-1} + 0.113\zeta^{-2} - 0.034\zeta^{-3} + 0.007\zeta^{-4} - 0.005\zeta^{-5} - 0.004\zeta^{-6}),$$

図-A(c) の場合：

$$z = r_0(0.922\zeta + 0.088\zeta^{-1} + 0.067\zeta^{-2} - 0.059\zeta^{-3} + 0.032\zeta^{-4} + 0.013\zeta^{-5} - 0.010\zeta^{-6}).$$

..... (A.1)

次に、図-5の図中に示した段階掘削のトンネル断面形状に対する写像関数は次式で与えられる。

図-5(a) の場合：

$$z = r_0(0.5938\zeta - 0.2858\zeta^{-1} + 0.0898\zeta^{-2} - 0.0124\zeta^{-3} - 0.0079\zeta^{-4} + 0.0052\zeta^{-5} - 0.0003\zeta^{-6}),$$

図-5(b) の場合：

$$z = r_0(0.7661\zeta - 0.2407\zeta^{-1} + 0.1164\zeta^{-2} - 0.0348\zeta^{-3} - 0.0032\zeta^{-4} + 0.0104\zeta^{-5} - 0.0045\zeta^{-6}),$$

図-5(c) の場合：

$$z = r_0(0.9010\zeta - 0.1532\zeta^{-1} + 0.1090\zeta^{-2} - 0.0583\zeta^{-3} - 0.0171\zeta^{-4} + 0.0069\zeta^{-5} - 0.0113\zeta^{-6}),$$

図-5(d) の場合：

$$z = r_0(1.0900\zeta - 0.0070\zeta^{-1} + 0.1013\zeta^{-2})$$

$$\left. \begin{aligned} & -0.0948\zeta^{-3} + 0.0360\zeta^{-4} + 0.0070\zeta^{-5} \\ & -0.0159\zeta^{-6} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.2)$$

参 考 文 献

- 1) 門田俊一他：繰り返し拡張カルマンフィルターによる異方性岩盤物性の同定と地下空洞計測管理への適用，土木学会論文集，第406号，Ⅲ-11，pp.107～116，1989.
- 2) 桜井春輔・清水則一・壺内達也：地下空洞における計測変位の境界要素法による三次元逆解析法，土木学会論文集，第382号，Ⅲ-7，pp.55～61，1987.
- 3) 平島健一・川上哲太郎・藤原紀夫：楕円形の等方性および異方性岩盤トンネルにおける変位計測の逆解析，第22回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集，pp.11～15，1990.
- 4) 平島健一・川上哲太郎・藤原紀夫・山下幸夫：弾性厳密解に基づく円形・楕円形トンネルを有する等方性および異方性岩盤の逆解析，土木学会論文集，第439号，Ⅲ-17，pp.1～8，1991.
- 5) Hirashima, K : Stresses in isotropic and anisotropic beams having holes, Mem. Fac. Eng., Kyoto Univ., Vol.34, pp.27～52, 1972.
- 6) Muskhelishvili, NI. : Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff, pp.376～380, 1963.
- 7) 岡本舜三：素掘杭の強さに関する弾性学的考察Ⅰ，Ⅱ，土木学会論文集，No.3，pp.60～79，pp.159～174，1949.
- 8) Derski, W. et al : Rock and Soil Mechanics, Elsevier, pp.237～242, 1989.
- 9) Heller, SR., Brock, JS., and Bart, R. : The stresses around a rectangular opening with rounded corners in a uniformly loaded plate, Proc. 3rd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., pp.357～368,1958.
- 10) Kantorovich, LV. and Krylov, VI. : Approximate Methods of Higher Analysis, Interscience Pub., pp.451～478, 1964. (1990.5.7 受付)

ANALYSIS AND BACK-ANALYSIS OF ROCK GROUND WITH ARBITRARY SHAPE OF TUNNEL CONSIDERING PROGRESSIVE EXCAVATIONS BY MEANS OF EXACT ELASTIC SOLUTION

Ken-ichi HIRASHIMA, Tetsutaro KAWAKAMI, Toshio FUJIWARA and Toshiyuki RIKIMA

In this paper, we discuss a back-analysis method for determining the two-dimensional in-plane initial state of stresses and elastic constants of the ground, from a set of displacements measured during progressive excavations of underground tunnel.

The proposed method of solutions bases on the exact elastic theory by using of complex variable method with a conformal mapping transformation, which can be treated for an arbitrary shape of the tunnel.

The results of stresses, strains and displacements at arbitrary locations in rock ground are exactly computed by the given values of in-plane load, elastic constants and shape of the tunnel.

In order to verify the practical availabilities of this back-analysis, several numerical results are given in relation to the accuracy of the results.