

# 重要サンプリングとカルマンフィルタによる信頼性解析

星谷 勝\*・忽那幸浩\*\*

重要サンプリング法とカルマンフィルタを併用した構造システムの破壊確率算定手法を提案した。この手法は破壊発生領域にサンプルを集中して抽出するものであり、計算の効率化が期待できる。また、カルマンフィルタを用いることにより、破壊確率を漸化的に求める手法である。数値的解析例により、本手法の有用性を示している。

**Keywords :** importance sampling, kalman filter, probability of failure, structure, adaptive method

## 1. 目 的

Weakest link type の構造システムの破壊確率は次式で表すことができる。

$$P_f = P [g_1(\mathbf{x}) \leq 0 \cup g_2(\mathbf{x}) \leq 0 \cup \dots \cup g_m(\mathbf{x}) \leq 0] \dots\dots\dots (1)$$

ここで、

$g_i(\mathbf{x})$  :  $i$  次破壊モードの性能関数

$g_i(\mathbf{x}) \leq 0$  : 破壊モード発生事象

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  : 確率変数ベクトル

式(1)は周知のとおり少なくとも1つの破壊モードが発生すると、システムは破壊するとして構造システムの破壊確率を定義したものである。したがって、構造システムの性能関数は

$$Z(\mathbf{x}) = \min [g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})] \dots\dots\dots (2)$$

で与えられ、 $Z(\mathbf{x}) \leq 0$  が構造システムの破壊事象となる。そして、 $\mathbf{x}$  の結合確率密度関数を  $f(\mathbf{x})$  とすれば、式(1)は形式的には次の多重積分で与えられる。

$$P_f = \int I[Z(\mathbf{x})] f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、

$$I[Z(\mathbf{x})] = \begin{cases} 0 & \text{if } Z(\mathbf{x}) > 0 \\ 1 & \text{if } Z(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases} \dots\dots\dots (4)$$

さて、式(3)に基づいて  $P_f$  を計算しようとしても、破壊モード数  $m$  や  $\mathbf{x}$  の要素数  $n$  の増加、すなわち破壊モードの数や確率変数の数の増加に伴って、また、各破壊モードの性能関数  $g_i(\mathbf{x})$  が非線形関数であると、ほとんど計算は不可能に近い。したがって、構造信頼性解析においては式(3)の近似理論解法が種々提案されて

いる。代表的なものとして性能関数  $g_i(\mathbf{x})$  を設計点のまわりにテーラー展開して線形近似を行い、破壊確率の理論解を与える1次近似2次モーメント法がある<sup>1)</sup>。さらに、高次項まで考慮して改良した手法も提案されている<sup>2),3)</sup>。構造システムの破壊確率の式(3)は、これらの結果を用いて上下限値の形で求めることができる。しかしながら、これらの方法は全て何らかの近似手法であるから、解の精度の問題が残される。

一方、数値シミュレーション法としてモンテカルロ法がある。この方法は、式(3)を  $I[Z(\mathbf{x})]$  の期待値として解釈し、次式より  $P_f$  を推定するものである。

$$P_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[Z(\mathbf{x}_i)] \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $\mathbf{x}_i$  は  $f(\mathbf{x})$  を用いて抽出されるサンプルベクトル値である。

この式に基づけば、サンプル数  $N$  が十分大であれば  $P_f$  は不偏推定値として真値を与えることが知られているが、一般には破壊確率が小さい値であるから多大な計算時間を要することになる。

以上のことより、近似理論的アプローチと数値シミュレーション的アプローチは共にそれぞれの問題点を残していることがわかる。

本研究は、後者の数値シミュレーション法に関するものであり、重要サンプリング密度関数を破壊モードが発生し易い位置に導入し、少ないサンプル数で所定の精度をもって破壊確率の値を推定しようとするものである。本研究の基本は、いわゆる重要サンプリング法に基づいている<sup>4)</sup>。この方法は Harbitz<sup>5)</sup> と Shinozuka<sup>6)</sup> により構造信頼性解析に導入され、次いで Bourgund<sup>7)</sup> や Schueller<sup>8)</sup> により発展したものである。最近では、重要サンプリング密度関数を更新するアルゴリズムを導入し、更に効率化をねらった手法が提案されている<sup>9)-12)</sup>。また、関連した研究には、近似理論解をサンプルデータ

\* 正会員 Ph.D. 武蔵工業大学教授 土木工学科 (〒158 世田谷区玉堤 1-28-1)

\*\* 学生会員 武蔵工業大学大学院修士課程

を用いて更新するハイブリッド法<sup>13)</sup>, 条件付期待値による分散減少法<sup>14)</sup>, その他<sup>15)~17)</sup>などがある。

さて, これらの研究に対して本論は次の特徴を有し, 安定かつ迅速な取れん解を与えるものである。まず重要サンプリング密度関数を用いて, 式(2)の性能関数のサンプル値を抽出する。この密度関数は  $Z(x) \leq 0$  となりやすいように設定するので, 比較的少ないサンプリング回数で十分なデータが得られる。

本論では, (a) 破壊事象  $Z(x) \leq 0$  となるデータのみならず  $Z(x) > 0$  となるデータも有用な情報量として活用する。(b)  $Z(x)$  の確率分布関数形は, 破壊確率が一般に小さな値となることから  $Z(x) = 0$  の近傍では指数関数形状の裾を有するであろうという先験的な情報を活用する。すなわち本研究では,  $Z(x)$  の累積確率分布関数として未知定数を有する指数関数  $F(Z, a_1, a_2, \dots)$  を仮定し, (a) で得られたデータを用いて, 未知定数  $a_1, a_2, \dots$  を Kalman Filter<sup>18)~20)</sup> により漸化的に同定する手法である。システム破壊確率は,  $P_f = F(0, a_1, a_2, \dots)$  と求まる。すなわち, 情報量を十分に活用した適合型の  $P_f$  推定法となっている。

本手法によれば  $a_1$  に関する適当な初期値のもとで, 最初のサンプリングで  $a_1$  が推定され, それに対応した  $P_f$  が求まる。以下サンプリング毎に  $a_1$  と  $P_f$  が更新され真値に漸近するアルゴリズムになっている。故に, サンプリング回数を事前に設定する必要はなく, 取れんしたときに計算は終了する。また, Kalman Filter の出力の1つである推定誤差分散値が取れん過程を評価することになる。

## 2. 重要サンプリング法の概要

サンプリング用の密度関数である重要サンプリング密度関数を  $h(x)$  として, 式(3)を次のように変形する。

$$P_f = \int I[Z(x)] f(x) \frac{h(x)}{h(x)} dx \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[Z(x_i)] \frac{f(x_i)}{h(x_i)} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし,  $x_i$  は  $h(x)$  から抽出されるサンプル値である。

式(7)を式(5)の通常のモンテカルロ法と比較してみると, 破壊事象の発生 ( $I[Z(x_i)] = 1$ ) のとき1回と記録せず  $f(x_i)/h(x_i)$  回と修正して記録することがわかる。もし適当な  $h(x)$  を用いて破壊事象の発生頻度 ( $I[Z(x_i)] = 1$  となる頻度) を高めれば, この修正項により, たとえ小さな  $P_f$  値の場合でも, 少ないサンプル回数  $N$  で精度よく  $P_f$  を推定できることになる。また, 式(7)は不偏推定値を与えるので, 式(7)の推定値  $P_f$  の分散値が小さくなったとき, 真値  $P_f^*$  に取れんすることがわかる。

式(7)の分散値は理論的には

$$\sigma_{P_f}^2 = \frac{1}{N} \left\{ \int [I[Z(x)] \frac{f(x)}{h(x)}]^2 \times h(x) dx - P_f^{*2} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

で与えられる<sup>4)</sup>。したがって,  $\sigma_{P_f}^2 = 0$  を満足する重要サンプリング密度関数  $h(x)$  は

$$h(x) = \frac{I[Z(x)] f(x)}{P_f^*} \quad \dots\dots\dots (9)$$

となり, これを用いれば原理上は1回のサンプル値  $x$  を用いるだけで真値を推定することができる。しかしながら式(9)の  $P_f^*$  を推定しようとしているため, 式(9)を満足する  $h(x)$  を見出すことは不可能であり, できるだけ式(9)に近い適当な  $h(x)$  を用いることになる<sup>7)~12)</sup>。

さて, 構造システムの場合には複数の破壊モードを考えるので,  $h(x)$  の関数形として各モードに対応して公平にサンプル値が抽出できるものが推定の効率化に必要である。本論文では, 文献(15)を参照して,  $h(x)$  を次式で与えることにする。

$$h(x) = \sum_{k=1}^m w_k h_k(x), \quad \sum_{k=1}^m w_k = 1 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$h_k(x)$ :  $k$  次破壊モードに対応したサンプリング密度関数

$w_k$ :  $k$  次破壊モードの重み係数

$h_k(x)$  と  $w_k$  を決定する詳細は後述の計算例で示すことにするが, 1つの方法は  $h_k(x)$  の中心を  $k$  次モードの設計点に一致させ,  $w_k$  は各次モードの安全性指標  $\beta_k$  に逆比例するように与えることである。

また,  $h_k(x)$  の決定に Kernel 法<sup>11)</sup>を用いて精度を高めるのも1つの方法であるが,  $P_f$  値が小さい場合には必ずしも効率化は得られない。

式(10)を式(6)に代入して

$$P_f = \int I[Z(x)] f(x) \frac{\sum_{k=1}^m w_k h_k(x)}{h(x)} dx \quad \dots\dots\dots (11)$$

これより, 期待値の概念を用いて

$$P_f = \sum_{k=1}^m \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} I[Z(x_{ik})] \frac{f(x_{ik}) w_k}{h(x_{ik})} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ただし,  $x_{ik}$  は  $i$  回目のサンプリングにおいて  $h_k(x)$  から抽出されるサンプル値である。各次の破壊モード発生確率は同様にして次式で計算される。

$$P_{fk} = P[g_k(x) \leq 0] \quad ; k=1 \sim m$$

$$= \int I[g_k(x)] f(x) \frac{h_k(x)}{h_k(x)} dx \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$P_{fk} = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} I[g_k(x_{ik})] \frac{f(x_{ik})}{h_k(x_{ik})} \quad \dots\dots\dots (14)$$

本論では式(12), (14)を用いて, 先に述べた適合型のサンプリング法を提案するものである。

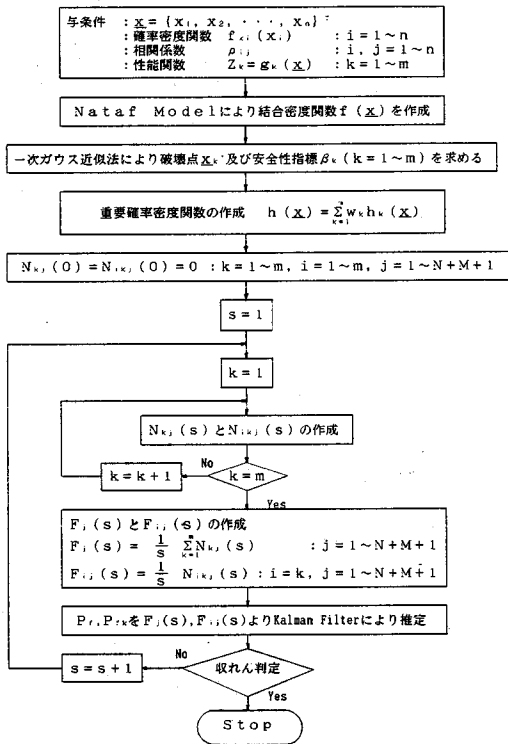


図-1 手法の流れ図

### 3. カルマンフィルタを併用した重要サンプリング法

まず初めに本手法の流れを図-1に示す。最初に確率変数ベクトルの結合確率密度関数  $f(\mathbf{x})$  を構築する。一般には構造信頼性解析において確率変数の情報としては、高々、各変数の確率密度関数と変数間の相関係数が与えられる。このとき、結合確率密度関数は Nataf モデル<sup>21), 22)</sup>により、精度よい近似関数として得られるので、これを採用する。次に重要サンプリング密度関数  $h(\mathbf{x})$  として式 (10) を用意する。 $h(\mathbf{x})$  はサンプリングが容易にできるように、互いに独立な結合確率密度関数とする。

さて、確率変数ベクトル  $\mathbf{x}$  は各破壊モードに対応する  $h_k(\mathbf{x})$  に基づいて抽出する。そこで、 $s$  回目のサンプリングにおいて、式 (2) より

$$Z_{ik}(s) = g_i(\mathbf{x}_k(s)) \quad ; i=k \text{ のとき} \\ ; \mathbf{x}_k(s) \text{ from } h_k(\mathbf{x}) \dots\dots\dots (15)$$

$$Z_k(s) = \min [Z_{1k}(s), Z_{2k}(s), \dots, Z_{mk}(s)] \dots\dots (16)$$

式 (15), (16) の  $Z$  は原理的には全ての実数域の値をとり得るが、サンプリングを破壊発生領域に重点的にしぼって行うので、主として  $Z=0$  の近傍のデータが抽出される。そこで、この領域の上限値と下限値をそれぞれ  $Z_U^*$ ,  $Z_L^*$  として、その間を幅  $\Delta$  の離散区間に分割す

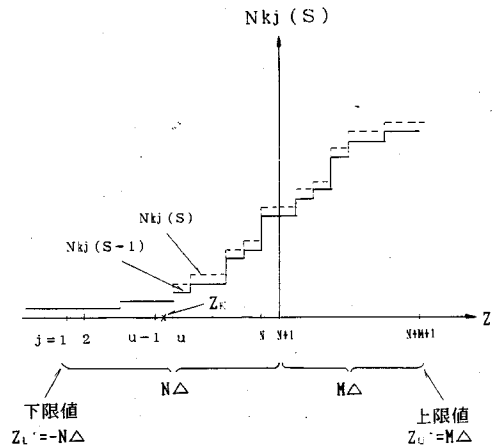


図-2 累積確率分布関数の作成

(図-2)。また図-2において  $N_{ikj}(s)$  は  $Z_{ik}(s) \leq Z_{iL}^* + (j-1)\Delta$  ;  $j=1 \sim N+M+1$  を満足するデータ  $Z_{ik}$  の  $s$  回目のサンプリング時までの累積発生回数。  $N_{kj}(s)$  は  $Z_k(s) \leq Z_L^* + (j-1)\Delta$  ;  $j=1 \sim N+M+1$  を満足するデータ  $Z_k$  の  $s$  回目のサンプリング時までの累積発生回数。

本手法は、これらのデータ  $N_{ikj}(s)$ ,  $N_{kj}(s)$  を観測データとして、区間  $Z_{iL}^* \leq Z_k \leq Z_{iU}^*$ , または各破壊モードに対して  $Z_{iL}^* \leq Z_{ik} \leq Z_{iU}^*$  の内部で  $Z_k$  と  $Z_{ik}$  の確率分布関数を漸化的に同定するものである。図-1の手順を具体的に示すと次のようになる。

手順① 初期条件

$$N_{kj}(0) = N_{ikj}(0) = 0 \\ ; k=1 \sim m, i=1 \sim m, j=1 \sim N+M+1$$

手順② サンプリングおよび累積発生回数データの作成 第1回目のサンプリング ( $s=1$ ) において、次の式を用いて累積発生回数  $N_{kj}(s)$ ,  $N_{ikj}(s)$ ;  $k=1 \sim m$  を作成する。

$$Z_{ik}(s) = g_i(\mathbf{x}_k(s)); i=1 \sim m, \mathbf{x}_k(s) \text{ from } h_k(\mathbf{x}) \\ Z_k(s) = \min [Z_{1k}(s), Z_{2k}(s), \dots, Z_{mk}(s)]$$

もし  $Z_k(s) \leq Z_L^*$  ならば

$$N_{kj}(s) = N_{kj}(s-1) + w_k \frac{f(\mathbf{x}_k(s))}{h(\mathbf{x}_k(s))} \\ ; j=1 \sim N+M+1$$

もし、 $Z_L^* + (u-2)\Delta < Z_k(s) \leq Z_L^* + (u-1)\Delta$

ならば

$$N_{kj}(s) = N_{kj}(s-1); j=1 \sim (u-1) \\ N_{kj}(s) = N_{kj}(s-1) + w_k \frac{f(\mathbf{x}_k(s))}{h(\mathbf{x}_k(s))} \\ ; j=u \sim N+M+1$$

もし、 $Z_{ik}(s) \leq Z_{iL}^*$  ならば;  $i=1 \sim m, i=k$  のとき

$$N_{ikj}(s) = N_{ikj}(s-1) + \frac{f(x_k(s))}{h_i(x_k(s))} ; j=1 \sim N+M+1$$

もし  $Z_{iL}^* + (u_i - 2)\Delta < Z_{ik}(s) \leq Z_{iL}^* + (u_i - 1)\Delta$  ;  $i=1 \sim m, i=k$  のとき

ならば

$$N_{ikj}(s) = N_{ikj}(s-1) ; j=1 \sim (u_i - 1)$$

$$N_{ikj}(s) = N_{ikj}(s-1) + \frac{f(x_k(s))}{h_i(x_k(s))} ; j=u_i \sim N+M+1$$

手順③ Z および  $Z_i$  の確率分布関数の推定用データの作成

Z の確率分布関数を推定するためのデータとして

$$F_j(s) = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^m N_{kj}(s) ; j=1 \sim N+M+1$$

$Z_i$  の確率分布関数を推定するためのデータとして

$$F_{ij}(s) = \frac{1}{s} N_{ikj}(s) ; j=1 \sim N+M+1, i=k$$

手順④ Kalman Filter による Z と  $Z_i$  の確率分布関数の同定

Z の確率分布関数として次式の指数関数形を仮定する。

$$F(Z, a_1, a_2, \dots) = a_1 \exp[a_2 Z + a_3 Z^2 + \dots] \dots \dots (17)$$

ここで未定定数  $a_1, a_2, \dots$  を同定すれば  $F(Z, a_1, a_2, \dots)$  が決定される。

本方法では Kalman Filter で必要となる状態方程式と観測方程式をそれぞれ次式の様 に定式化する。

$$(b_1(s), a_2(s), \dots) \overset{f}{=} (b_1(s), a_2(s), \dots) \overset{f}{=}_{-1} \dots \dots \dots (18)$$

式 (17) より

$$\ln [F_j(s)] = b_1(s)_j + a_2(s)_j Z_j + a_3(s)_j Z_j^2 + \dots + \varepsilon(s) \dots \dots \dots (19)$$

ただし、 $b_1(s) = \ln [a_1(s)] \dots \dots \dots (20)$

式 (18), (19) を用いた Kalman Filter のデータ処理は  $j=1$  から  $N+M+1$  まで行う。式 (18), (19) は共に線形方程式であるから定常カルマンフィルタを用いて処理できる利点がある。

また、破壊モードの発生確率の推定には同様に

$$(b_{i1}(s), a_{i2}(s), \dots) \overset{f}{=} (b_{i1}(s), a_{i2}(s), \dots) \overset{f}{=}_{-1} \dots \dots \dots (21)$$

$$\ln [F_{ij}(s)] = b_{i1}(s)_j + a_{i2}(s)_j Z_j + a_{i3}(s)_j Z_j^2 + \dots + \varepsilon(s) \dots \dots \dots (22)$$

ただし、 $b_{i1}(s)_j = \ln [a_{i1}(s)] ; i=1 \sim m, j=1 \sim N+M+1$

手順⑤ 破壊確率の推定

式 (17), (20) より構造システムの破壊確率は

$$P_f(s) = F(0, a_1(s), a_2(s), \dots) = a_1(s)_j = e^{b_{11}(s)_j} \dots \dots \dots (23) \quad j=N+M+1$$

同様にして破壊モードの発生確率は

$$P_{fi}(s) = F_i(0, a_{i1}(s), a_{i2}(s), \dots) = a_{i1}(s)_j = e^{b_{i1}(s)_j} \dots \dots \dots (24) \quad j=N+M+1$$

なお Kalman Filter により得られる推定誤差の共分散値のうち、特に  $b_{11}(s)_{j=N+M+1}$  (または  $b_{i1}(s)_{j=N+M+1}$ ) に対応する分散値を  $P_{11}(s)_{j=N+M+1}$  とすれば、式 (23) の関係より  $P_f(s) (=a_1(s))$  に関する推定誤差の分散値は次式となる。

$$\sigma_{a_1}^2(s)_{j=N+M+1} \cong P_{11}(s)_{j=N+M+1} \times e^{2b_{11}(s)_{j=N+M+1}} \dots \dots \dots (25)$$

式 (23) の関係と  $b_{11}(s)_j$  が正規分布であることから  $a_1(s)_j$  は対数正規分布となり式 (25) の関係が得られる。

手順⑥ もし取れんが十分でないときには  $s=s+1$  とし以上の手順を①から⑤まで繰り返す。

なお、 $P_f$  値と誤差共分散値の変動が許容レベル内に取れんしたかを判断する基準が必要である。

#### 4. 手法の検証

以下の計算例において Kalman Filter による同定では観測方程式のノイズ  $\varepsilon$  の分散値を  $10^{-5}$  とし、誤差共分散行列の初期値は

$$P_{11}(0) = P_{22}(0) = P_{33}(0) = 0.1$$

$$P_{ij}(0) = 0.0 \quad i \neq j$$

としている。また初期状態ベクトル  $x_0$  の第一要素  $b_1(0)$  は、式 (20)  $b_1 = \ln(P_f)$  の関係を用い、 $0 \leq P_f \leq 1.0$  の範囲を満足すれば任意で良いので、適当なものとして  $b_1(0) = \ln(1.0) = 0.0$ 、第二、第三要素は任意に 1.0 とし、

$$x_0 = [0.0, 1.0, 1.0]^T$$

と設定している。

##### (1) 例題 1

本手法では、性能関数値 Z が破壊領域に発生しやすいようにサンプリングし、その範囲における Z の確率分布関数を同定し、破壊確率を求めるものである。そこで、ここではこの際に必要となるデータ作成における上限値  $Z_U^*$ 、下限値  $Z_L^*$  および離散区間幅  $\Delta$  の同定精度および取れん速度に及ぼす影響を検討する。

採用した性能関数は

$$Z = x_1 - x_2 ; x_1 = N(40, 4)$$

$$x_2 = N(25, 5)$$

ただし、 $x_1$  と  $x_2$  は互いに独立とする。

この性能関数は線形であり、正規確率変数となるから、

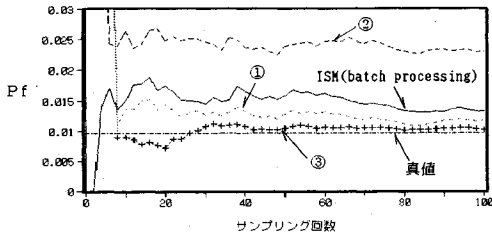


図-3 例題1 破壊確率とサンプリング回数

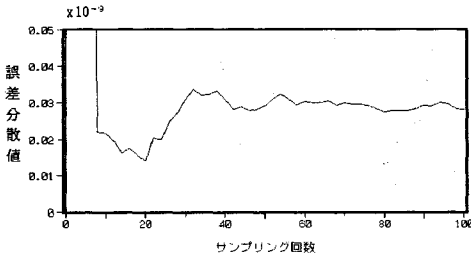


図-4 例題1 誤差分散値とサンプリング回数

設計点は  $x_1^* = x_2^* = 34.146$  で、 $P_f = P(Z \leq 0) = 0.00958$  と容易に求められる。

重要サンプリング密度関数の平均値を設計点に一致させ、標準偏差はオリジナルの密度関数のそれらと同一の値 ( $\sigma_{x1}=4, \sigma_{x2}=5$ ) としてサンプリングを行っている。同定すべき未知の確率分布関数を

$$F(Z) = a_1 \exp(a_2 Z + a_3 Z^2)$$

と仮定し、式 (18), (19) に基づいて同定を行う。

$h(x)$  より  $x$  をサンプリングするので、 $Z$  は平均値  $\mu_z = 0.0$ 、標準偏差  $\sigma_z = \sqrt{\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2} = 6.4$  となる。そこで  $Z$  の上下限値をこの  $\sigma_z$  値を基準とし、その間で刻み幅  $\Delta$  を変化させて同定の効率を検査している。 $Z$  の上下限値を  $\pm 1.5 \sigma_z$  以上と広げると効率が低下し、逆に  $0.5 \sigma_z$  と狭めた場合も結果がおもわしくなかった。そこで、上下限値を  $\pm \sigma_z \div 6$  とし、その間の刻みを変化させて同定結果を調べている。

図-3は  $P_f$  とサンプル回数の関係を示すが、 $\pm \sigma_z$  の間の刻み数を  $M=N=3, 6, 10, 30, 60$  と変えたが、いずれも曲線③のようになって最も効率がよい。一方、正の領域と負の領域の刻みを変化させた場合 ( $N=60, M=5$  で曲線①、 $N=1, M=6$  で曲線②) は収れんが良くない。通常のバッチ処理による重要サンプリング (ISM) の結果も合わせて検討すると図-3より曲線③が最も効率的な結果を与えることがわかる。また図-4は図-3の曲線③に対応した誤差分散値を示すが、破壊確率  $P_f$  に対応し、安定した値に収れんしていることがわかる。

以上より、例題2と3では、モードについての上下限値は1次近似2次モーメント法によって求められた  $\sigma_{zk}$  ( $k=1 \sim m$ ) を、構造システムについては性能関数式 (20)

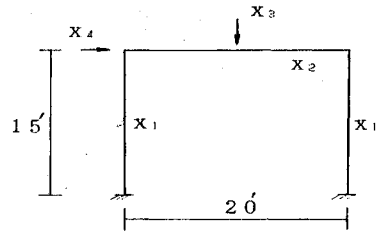


図-5 例題2 門型ラーメン

表-1 例題2 確率変数の特性値

変数	分布形	平均値	標準偏差
$X_1$	NORMAL	360 ft-k	54 ft-l-k
$X_2$	NORMAL	480 ft-k	72 ft-l-k
$X_3$	NORMAL	100 k	10 k
$X_4$	NORMAL	50 k	15 k

表-2 例題2 性能関数と標準偏差

	性能関数	標準偏差
System	$Z(\underline{X}) = \min(g_1(\underline{X}), g_2(\underline{X}), \dots, g_6(\underline{X}))$	3.94
Mode 1	$g_1(\underline{X}) = 4X_1 + 2X_2 - 10X_3 - 15X_4$	3.57
Mode 2	$g_2(\underline{X}) = 4X_1 - 15X_4$	3.12
Mode 3	$g_3(\underline{X}) = 2X_1 + 4X_2 - 10X_3 - 15X_4$	3.94
Mode 4	$g_4(\underline{X}) = 4X_2 - 10X_3$	3.05
Mode 5	$g_5(\underline{X}) = 2X_1 + 2X_2 - 15X_4$	2.88
Mode 6	$g_6(\underline{X}) = 2X_1 + 2X_2 - 10X_3$	2.06

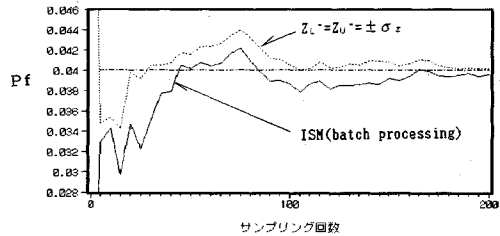


図-6 例題2 構造システム破壊確率とサンプリング回数

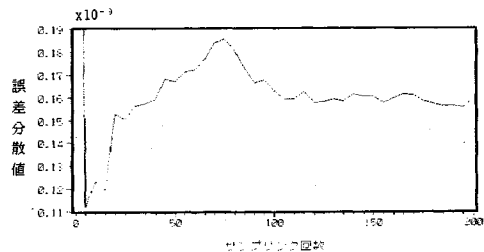


図-7 例題2 誤差分散値とサンプリング回数

の意味あいから  $\sigma_z = \max \sigma_{zk}$  ( $\sigma_{zk}$  の最大値) を基準として設定している。

(2) 例題2 (文献23)

複数の破壊モードを有する構造システムとして、図-5に示す6つの破壊モードの門型ラーメンの破壊確率を

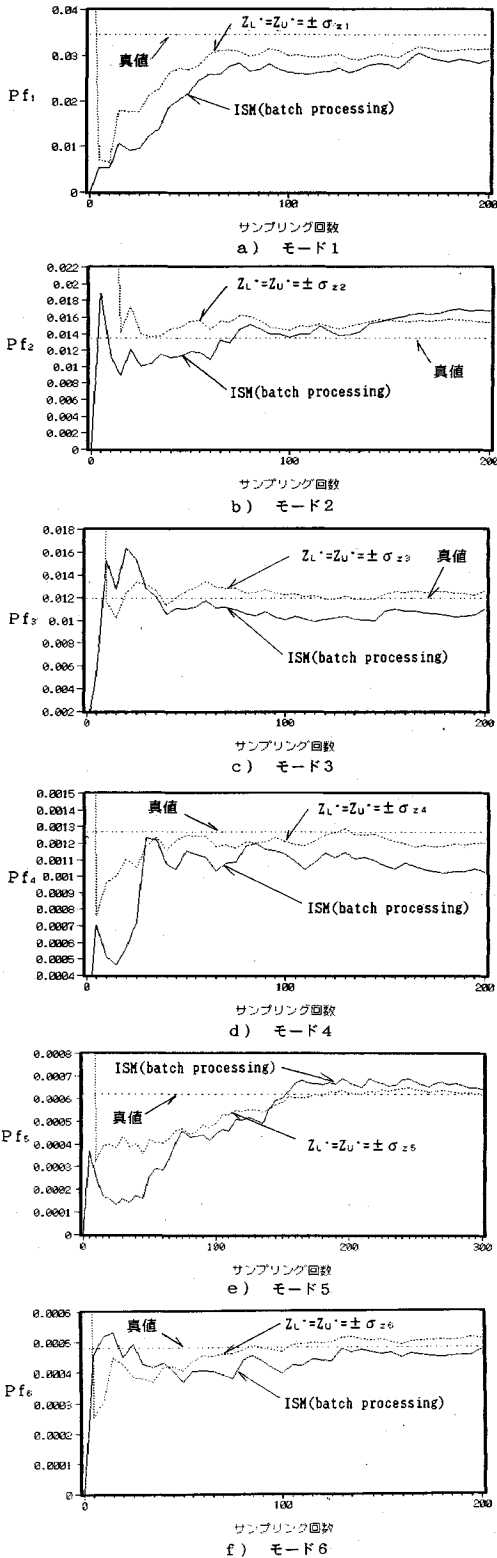


図-8 例題 2 破壊モード発生確率とサンプリング回数

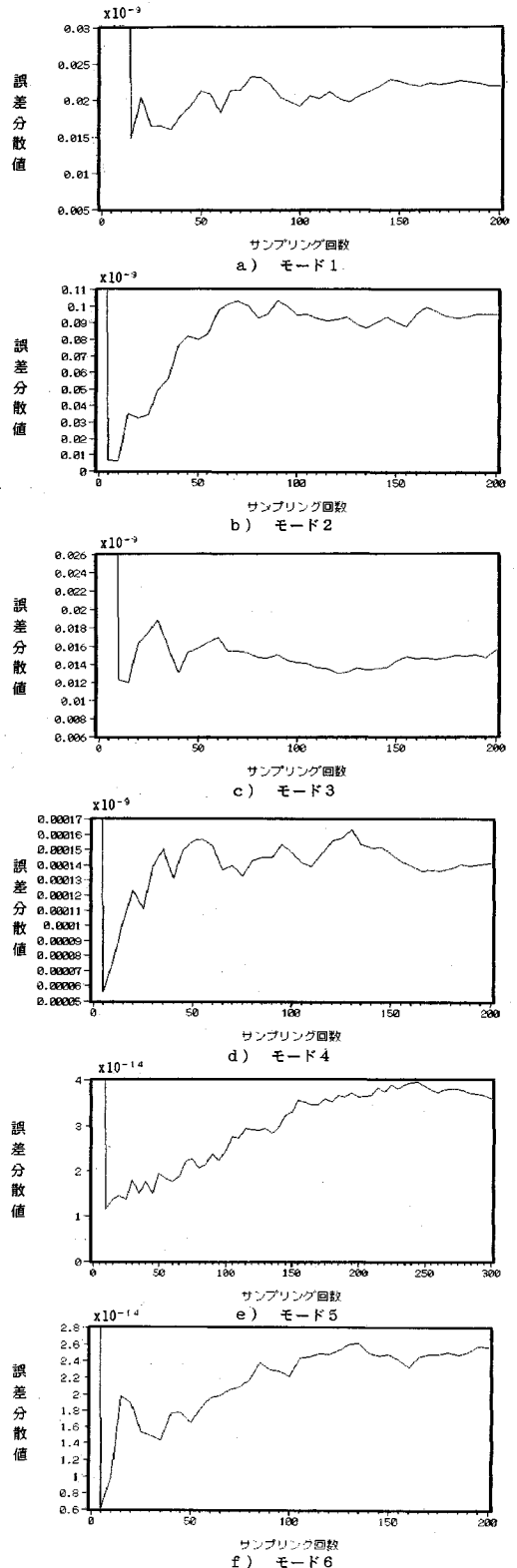


図-9 例題 2 誤差分散値とサンプリング回数

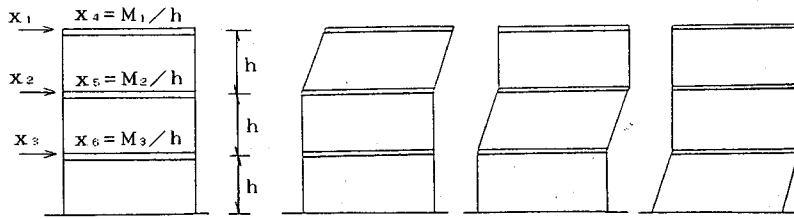


図-10 例題3 多層ラーメン

表-3 例題3 確率変数の特性値

変数	分布形	平均値	標準偏差
$X_1$	GUMBEL	10.0	4.0
$X_2$	GUMBEL	7.0	3.0
$X_3$	LOGNORMAL	5.5	2.0
$X_4$	LOGNORMAL	9.0	1.6
$X_5$	LOGNORMAL	13.0	2.0
$X_6$	LOGNORMAL	15.0	2.4

表-4 例題3 性能関数と標準偏差

	性能関数	標準偏差
System	$Z(\underline{X}) = \min(g_1(\underline{X}), g_2(\underline{X}), g_3(\underline{X}))$	1.1
Mode 1	$g_1(\underline{X}) = 4X_4 - X_1$	8
Mode 2	$g_2(\underline{X}) = 4X_5 - X_1 - X_2$	1.0
Mode 3	$g_3(\underline{X}) = 4X_6 - X_1 - X_2 - X_3$	1.1

求めてみる。表-1に確率変数の特性値を、表-2に性能関数と標準偏差を示し、それぞれの確率変数間に相関関係はないものとする。重要サンプリング密度関数は式(10)とし、重み係数 $w_k$ は各モードの安全性指標 $\beta_k$ の逆数に比例するように定める。すなわち、

$$w_k = \frac{1}{\beta_k} / \sum_{i=1}^m \frac{1}{\beta_i} \dots \dots \dots (26)$$

構造システムの破壊確率(図-6)、各破壊モードの発生確率(図-8)の取れん過程より、少ないサンプリング数で精度よく真値(システムについてはモンテカル口法による2万回サンプリングの結果)に取れんしていることがわかる。なお、これらの図より通常のISMに比べて効率化が達成されていることがわかる。図-7, 9は図-6, 8に対応した $Z_U^* = \sigma_z = -Z_L^*$ とした時の誤差分散値を示すが、同定結果に対応して安定した値に取れんすることがわかる。

(3) 例題3 (文献24)

確率変数間に相関がある場合の計算例である。構造系は図-10に示すように3つの破壊モードを考えている。確率変数の特性値を表-3、確率変数間の相関係数を表-4、性能関数と標準偏差を表-5にそれぞれ示す。また重み係数 $w_k$ は式(26)と同様に定める。

構造システムの破壊確率(図-11)と各破壊モードの発生確率(図-13)の取れん過程よりISMに比べて効

表-5 例題3 相関係数

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$
$X_1$	1.0					
$X_2$	0.5	1.0				
$X_3$	0.2	0.5	1.0			
$X_4$	0.0	0.0	0.0	1.0		
$X_5$	0.0	0.0	0.0	0.3	1.0	
$X_6$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.3	1.0

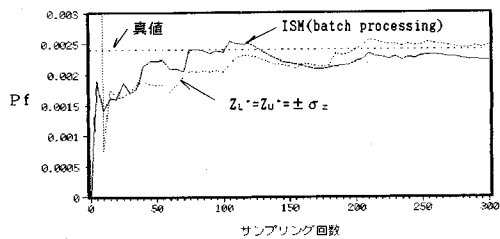


図-11 例題3 構造システム破壊確率とサンプリング回数

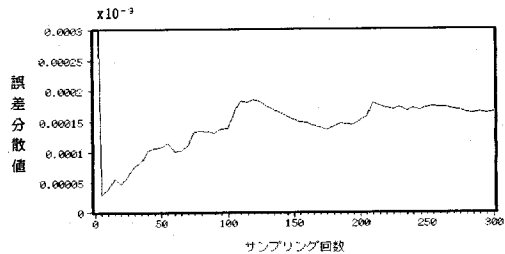


図-12 例題3 誤差分散値とサンプリング回数

率化がなされている(真値はモンテカル口法2万回によるサンプリング結果)。また図-11, 13に対応した誤差分散値を示す図-12, 14より、例題2と同様に安定した値に取れんしていることがわかる。

5. 結 論

本研究で提案したカルマンフィルタを併用した適合型重要サンプリング法は、従来の重要サンプリング法をさらに効率化した手法であることが検証された。本手法の特徴を要約すると、

- (1) 従来の重要サンプリング法は、 $Z \leq 0$ となるサンプルデータの頻度回数の全体に対する相対比で破壊確率を求めている。本手法では、 $Z \leq 0$ となるデータに加えて $Z > 0$ となるデータも情報量として有効に活用する。また、 $Z=0$ 近傍の確率分布関数の形状が指数関数

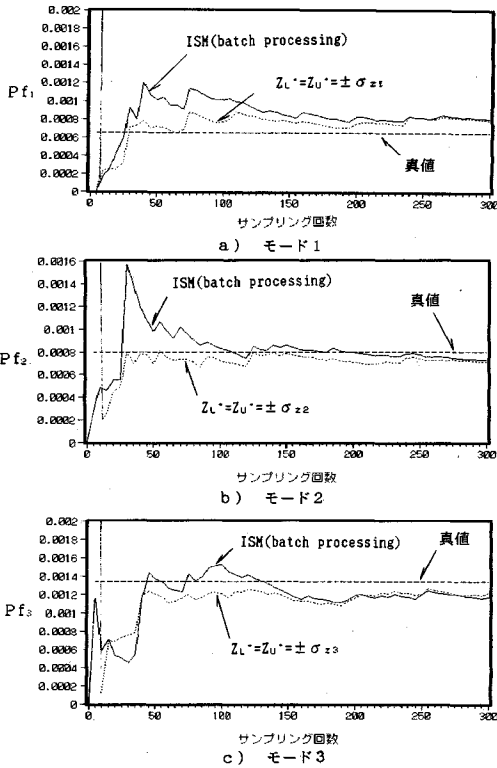


図-13 例題3 破壊モード発生確率とサンプリング回数

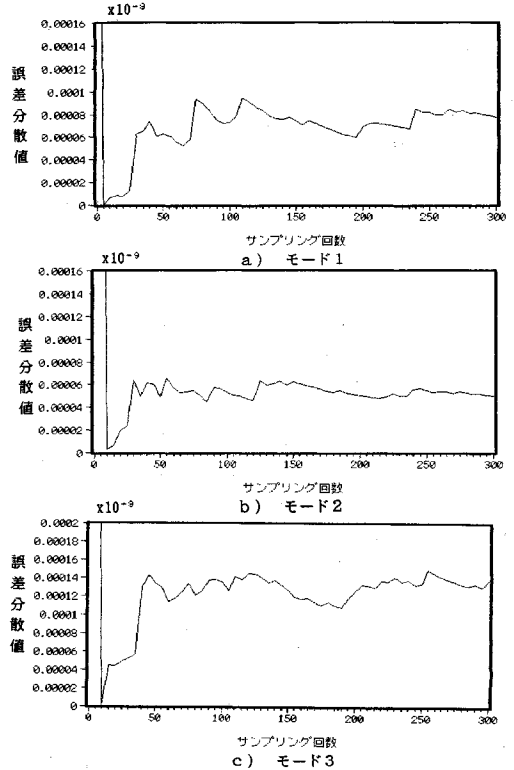


図-14 例題3 誤差分散値とサンプリング回数

表-6 適合型重要サンプリング法の手順

RUN	$h(x)$	サンプル	$\alpha$	$w_i$	$P_f$
初期	$h_0(x) = \phi(x - x^*)$	$\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}   g(x) \leq 0\}_0$	$\alpha_0 = \frac{1}{M_0} \sum_{i=1}^{M_0} \frac{f(x_{i0})}{h_0(x_{i0})}$	$w_{i1} = \frac{1}{\alpha_0} \frac{f(x_{i0})}{h_0(x_{i0})}$	$P_{f0} = \frac{M_0}{N_0} \alpha_0$
1	$h_1(x) = \frac{1}{M_1} \sum_{i=1}^{M_1} \frac{1}{w_{i1}} \phi\left(\frac{x - x_{i1}}{w_{i1}}\right)$	$\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}   g(x) \leq 0\}_1$	$\alpha_1 = \frac{1}{M_1} \sum_{i=1}^{M_1} \frac{f(x_{i1})}{h_1(x_{i1})}$	$w_{i2} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{f(x_{i1})}{h_1(x_{i1})}$	$P_{f1} = \frac{M_1}{N_1} \alpha_1$
:	:	:	:	:	:
k	$h_k(x) = \frac{1}{M_k} \sum_{i=1}^{M_k} \frac{1}{w_{ik}} \phi\left(\frac{x - x_{ik}}{w_{ik}}\right)$	$\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}   g(x) \leq 0\}_k$	$\alpha_k = \frac{1}{M_k} \sum_{i=1}^{M_k} \frac{f(x_{ik})}{h_k(x_{ik})}$	$w_{ik+1} = \frac{1}{\alpha_k} \frac{f(x_{ik})}{h_k(x_{ik})}$	$P_{fk} = \frac{M_k}{N_k} \alpha_k$
k+1	$h_{k+1}(x) = \frac{1}{M_{k+1}} \sum_{i=1}^{M_{k+1}} \frac{1}{w_{i,k+1}} \phi\left(\frac{x - x_{i,k+1}}{w_{i,k+1}}\right)$	$\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}   g(x) \leq 0\}_{k+1}$	$\alpha_{k+1} = \frac{1}{M_{k+1}} \sum_{i=1}^{M_{k+1}} \frac{f(x_{i,k+1})}{h_{k+1}(x_{i,k+1})}$	$w_{ik+2} = \frac{1}{\alpha_{k+1}} \frac{f(x_{i,k+1})}{h_{k+1}(x_{i,k+1})}$	$P_{f,k+1} = \frac{M_{k+1}}{N_{k+1}} \alpha_{k+1}$
:	:	:	:	:	:

但し、 $\phi = N(0, 1)$

$x^*$  = 設計点

$N_i$  = サンプル数

型となることを、情報として活用している。そしてサンプリング開始と同時に破壊確率を推定する適合型手法であり、安定した効率化サンプリング法と言える。

(2) 適合型手法なので推定値が取れんした時が最適なサンプリング回数となる。すなわち、事前にサンプリング回数を決定する必要がない。

(3) 推定破壊確率は Kalman Filter の出力である誤差分散値で評価することができる。

(4) 性能関数により  $Z$  の標準偏差  $\sigma_z$  は、異なった値となるが、確率分布関数の範囲を  $\pm\sigma_z$  程度に設定し

て同定を行うと効率的な結果が得られることがわかる。

## 6. 今後の展望

最後に、重要サンプリング密度関数  $h(x)$  を更新しながら、 $P_f$  を効率的に推定する適合型サンプリング法の可能性を1変数1破壊モードを例として示唆することにする。これは表-6の手順で  $h(x)$  自身を update し、図-15に示すように最終的に比率  $f(x)/h_k(x) \rightarrow P_f$  と取れんさせる方法である。

この方法は Kernel Function (11) に標準正規確率密



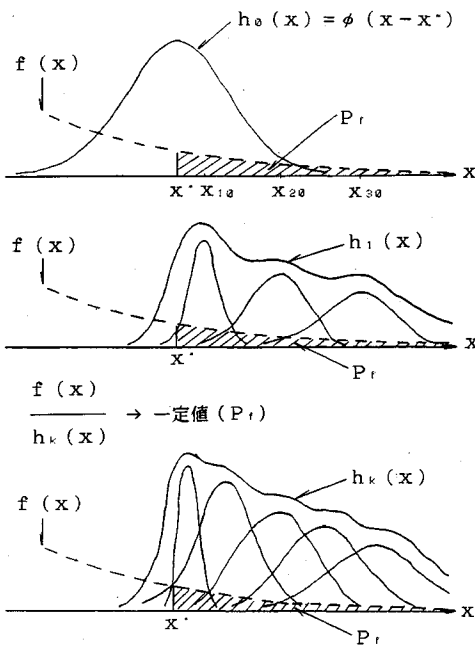


図-15  $h(x)$  の取れん過程

度関数  $\phi(x)$  を用い、重み (標準偏差) を調整しながら、 $h(x)$  を更新していくものである。この方法を多次元空間へと一般化することは容易であろう。これは今後の課題である。

本研究は星谷が手法の開発を行い、忽那が手法の検討および例題の計算を行ったものである。計算に際して、武蔵工業大学土木工学科応用力学研究室の卒論学生の協力を得ている。

参考文献

- 1) Ang, A. H.S. and Tang, W.H. : Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Vol.2, John. Wiley & Son. Inc, 1984.
- 2) Kiureghian, A.D., Lin, H.Z. and Hwang, S.J. : Second Order Reliability Approximations, Jour. of Eng.Mech. Vol.113, ASCE, Sept., 1987.
- 3) Madsen, H.O. : First Order Vs. Second Order Reliability Analysis of Series Structures, Jour. of Structural Safety, 2, 1985.
- 4) Rubinstein, R.Y. : Simulation and Monte Carlo Method, John Wiley & Sons, New York, 1981.
- 5) Harbitz, A. : Efficient and Accurate Probability of Failure Calculation by Use of the Importance Sampling Technique, Proc. of ICASP 3, Italy, June, 1983.
- 6) Shinozuka, M. : Basic Analysis of Structural Safety, Jour. of Struct. Eng., Vol.109, ASCE, March, 1983.
- 7) Bourgund, U. : Ouypornprasert, W. and P.H.W. Prenninger, Advanced Simulation Methods for the Estimation of Systems Reliability, Internal Working Report No.19, Univ. of Innsbruck, Nov., 1986.

- 8) Schuëller, G.I. and Stix, R. : A Critical Appraisal of methods to Determine Failure Probabilities, Jour. of Struct. Safety, 4, 1987.
- 9) Schuëller, G.I. et. al. : On Efficient Computational Schemes to Calculate Structural Failure Probabilities, US-Austrian Joint Seminar on Applications of Stochastic Structural Mechanics, Boca Raton, USA., May, 1987.
- 10) 白木 渡, Schuëller, G. I. : 条件付き破壊確率を用いた繰り返し高速モンテカルロ法とその構造物の動的信頼度評価への応用, 構造工学論文集, Vol. 35 A, 1989. 3.
- 11) Ang, G.L., Ang, A.H.-S. and Tang, W.H. : Kernel Method in Importance Sampling Density Function, ICOSSAR, San Francisco, Aug. 1989.
- 12) Bucher, C.G. : Adaptive Sampling—An Iterative Fast Monte Carlo Procedure, Structural Safety, Vol.5, 1989.
- 13) Fujita, M. and Rackwitz, R. : Updating First and Second Order Reliability Estimates by Importance Sampling, Proc. of JSCE, No.392/I-9, April, 1988.
- 14) Ayyub, B.M. and Haldar, A. : Improved Simulation Techniques as Structural Reliability Models, Proc. of ICOSSAR 85, Kobe, Japan, 1985.
- 15) Fu, G. and Moses, F. : Importance Sampling in Structural System Reliability, Proc. of Probabilistic Methods in Civil Eng., ASCE, Blacksburg, Va., USA, May, 1988.
- 16) Ibrahim, Y. and Cornell, C.A. : Experiences with Applications of Importance Sampling in Structural Reliability Computations, Proc. of Probabilistic Methods in Civil Eng., ASCE, Blacksburg, Va., USA, May, 1988.
- 17) Iman, R.L. and Conover, W.J. : Small Sampling Sensitivity Analysis Techniques for Computer Models with an Application to Risk Assessment Communications in Statistics, Theory and Models, Vol.49, No.17, 1980.
- 18) Hoshiya, M. and Saito, E. : Structural Identification by Extended Kalman Filter, Jour. of Eng. Mech., ASCE Vol.112, Dec., 1984.
- 19) Hoshiya, M. and Maruyama, O. : Identification of Running Load and Beam System, Jour. of Eng. Mech., ASCE Vol.113, June, 1987.
- 20) Hoshiya, M. : Application of the Extended Kalman Filter-WGI Method in Dynamic System Identification, Stochastic Structural Dynamics Progress in Theory and Applications, Elsevier Applied Science, pp.103-124, 1988.
- 21) Liu, P.L. and Der Kiureghian, A. : Multivariate Distribution Models with Prescribed Marginals and Covariances, Probabilistic Engineering Mechanics, Vol.1, No.2, 1986.
- 22) Nataf, A. : Determination des Distribution dont les Marges Sont Donnes, Comptes Rendus de l'academ des Sciences, Paris, 1962.
- 23) Ma, H. -F. and Ang, A.H. -S. : Reliability Analyses of Redundant Ductile Structural Systems Reserch Series, No.494, Univ. of Illinois Urbana, 1981.
- 24) Bucher, C.G. : Adaptive Sampling—An Iterative Fast Monte Carlo Procedure, Struct. Safety 5, pp.119-126, 1988.

(1990. 11. 29 受付)

## RELIABILITY ANALYSIS BY IMPORTANCE SAMPLING AND KALMAN FILTER

Masaru Hoshiya and Yukihiro Kutsuna

A hybrid method of importance sampling and Kalman filtering is proposed for evaluation of probability of failure of structural systems. In this method, data are effectively sampled from an importance sampling density function, and with them as observation data, probabilities of limit state functions are adaptively updated by using Kalman Filter.

Efficiency and stable convergency of estimated probabilities to true ones are examined through numerical examples.

---