

粒状要素法による粒状体の3次元変形機構の解析

土倉 泰*・岸野佑次**・佐武正雄***

粒状体の準静的挙動のシミュレーション解析手法として提案された粒状要素法を、球要素を用いることによって3次元に拡張した。簡単な応用例として、等方材料を想定した規則配列モデルの三主応力下でのせん断を行い、現実の砂と共通する挙動を確認し、その機構をいくつかのモードで発生する各接点における滑りと接点の分離によってとらえた。また、解析結果から相似条件について検討した。

Keywords : granular materials, computer simulation, 3D calculation, slip modes, similarity condition

1. まえがき

砂のような粒子集合体である粒状体の力学特性に関しては、いまだ十分に定式化がなされていない現状にある。これは粒状体内部の個々の粒子の間の滑動や、粒子間接触点の生成消滅などの微視的な現象が巨視的な現象を複雑に支配するためと考えられる。したがって、粒状体の変形機構を本質的に把握し、これを定式化するためには、マイクロメカニックスの研究を行うことが必要であると考えられる。

従来より粒状体内部の変形機構を観察する手段として種々の粒状体モデルが用いられている。たとえば、光弾性材料より成る2次元粒状体モデルを用いた実験^{1),2)}により、載荷方向へ接触力が集中することやせん断時に滑りの発生する接触点の数が限られていることなどが明らかにされた。一方、計算機シミュレーションによる粒状体モデルの解析法としてDEM (Distinct Element Method)³⁾が考案され、現在この手法を用いてさまざまな研究が行われ、光弾性実験と共通する力学特性や動的な性質の解明がなされている^{4),5)}。DEMは、粒子間の相互作用が、各粒子に対する外力としてのみ評価される動的な近似解析手法である。これに対して、著者の1人は粒状体の準静的挙動の解析を行うために、粒子の接続関係により定まる剛性行列を考慮した解析手法として粒状要素法⁶⁾⁻⁹⁾を提案した。

ところで、現実の粒状体の構成要素は立体的であり、その集合体は3次元的な構造をもっている。したがってモデル実験も本来3次元で行うべきものと考えられる。しかし、これまでの粒状要素法による粒状体のシミュ

レーション解析は2次元でのみ行っていた。

そこで、本文においては3次元における粒状体の準静的な変形機構の解析を行うために粒状要素法を3次元に拡張する。解析アルゴリズムの基本的な考え方は2次元の場合に準じるが、ここでは球要素を用いて具体的な定式化を行う。各要素の剛性を表すマトリックスは 6×6 の大きさをもつことになる。応用例として、単純な粒状体モデルの三主応力下でのせん断を行う。そして要素間の滑りの発生や接点の分離によってその変形機構をとらえ、相似条件について検討する。

2. 3次元接点に関するモデル化

粒状要素法⁶⁾⁻⁹⁾は、DEMと同様に個々の粒子を要素とし、それぞれの要素自体が剛体的に移動・回転できるものとして粒子集合体の変形を解析するシミュレーションである。粒状要素法がDEMと異なるのは、解析に時間項を含まない点と解析結果として常に力の釣合状態を得る点である。変形の解析に当たり、粒子集合体の境界に外力を与えると、各要素の力の釣合が損なわれ、粒子の集合体としても不釣合状態となる。新たな力の釣合状態は、接触状態に応じた剛性に基づいて各要素を移動・回転させることによって求める。なお要素の移動によって、接触点の生成消滅の可能性があるので、解析結果として常に釣合状態を得るためには、繰り返し計算が必要となる。

ここでは各要素の剛性を考える場合に重要となる接触点の考え方について述べる。まず3次元での接触点のモデル化に関して説明し、これをもとに接点における3次元剛性マトリックス S_c を導く。なお本文では要素として球を考える。したがって、以下の3次元接触に関する議論も球要素を前提として行うこととする。

(1) 接触についての基本的仮定

2つの球体の間の接触問題に関してはHertzの理論が

* 正会員 工博 山梨大学助手 工学部土木環境工学科 (〒400 甲府市武田4-3-11)

** 正会員 工博 東北大学助教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工博 東北学院大学教授 工学部土木工学科

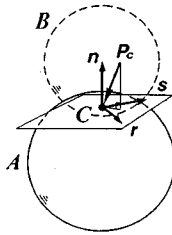


Fig.1 Contact plane

知られている¹⁰⁾。この理論などにおいて論じられているように、粒子間の接触は厳密には面を介してなされる。しかし、ここでは粒子間接触の簡単な近似として点接触を仮定する。したがって、接触点に作用する集中的なモーメントやトルクは考慮しないものとする。この仮定は従来の粒状体のシミュレーションにおいて一般に行われていることである。

(2) 接触点の決定と接触力の算定方法

各要素は剛体と考え、それ自体は変形しないものとする。ただし隣接要素間に要素の直径と比較して十分に小さい重なりを許す。2要素が重なるか接する場合にのみ接触点があるものと考え、重なっている場合にはその部分の重心を接触点とみなす。要素の移動に伴って接触点が消滅したり新たに生成される場合も有り得る。

いま接触点において接平面とその法線を考える。これを Fig.1 に例示する。接触力は法線方向の成分と接平面内の成分に分けて考えることができる。法線方向成分は2要素間の重なり具合に応じて算定する。また接平面内の成分は摩擦が生じることによって得られるものであり、接触点における接平面内方向の剛性と相対変位増分により算定する。

(3) 接触点における剛性マトリックス S_c

Fig.1 に示したような接触を想定し、要素 A に着目したときの、接触点 C における剛性マトリックス S_c を以下に誘導する。

いま接触点 C を原点とし、 n, r, s を基底ベクトルとする直交デカルト座標系を考える。 n は接触点 C における外向き接触法線に合わせ、 r, s は右手系の座標となるように接平面内に任意にとる。

ここで接触点 C における要素 A の要素 B に対する相対変位増分ベクトルを上記の座標系において $\Delta U_c = (\Delta u_n, \Delta u_r, \Delta u_s)c'$ と表すことにする。また C 点に作用する接触力ベクトルを $P_c = (p_n, p_r, p_s)c'$ 、 ΔU_c によって接触点に生じる接触力ベクトルの増分を $\Delta P_c = (\Delta p_n, \Delta p_r, \Delta p_s)c'$ と表すことにする。接触力の増分 ΔP_c と相対変位増分の関係に線形性を仮定すれば、 ΔP_c は次式で与えられる。

$$\Delta P_c = S_c \Delta U_c \dots\dots\dots (1)$$

ただし、相対変位増分ベクトル ΔU_c および接触力ベク

トル P_c とその増分 ΔP_c の各成分については、Fig.1 において B が固定されていると考えたとき A が n, r, s の向きに移動する場合に対して正と定める。 S_c の成分を以下のように表す。

$$S_c = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}_c \dots\dots\dots (2)$$

一般に Δu_n は接平面内の力に影響を及ぼさず、 $\Delta u_r, \Delta u_s$ は接触法線方向の力に影響しないと考えられるので、 $k_{12} = k_{13} = k_{21} = k_{31} = 0$ となる。また k_{11} を k_n と表す。ここに k_n は法線方向の剛性である。

一方、接平面内には等方的な剛性を仮定できる。いま r, s の方向に剛性 k_t を設定し、接触点の相対変位増分と接触力増分の間の関係として次式が成り立つと考え

$$\begin{bmatrix} \Delta p_r \\ \Delta p_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_t & 0 \\ 0 & k_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_r \\ \Delta u_s \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

ここに $(\Delta p_r, \Delta p_s)'$ は接触点における接平面内の接触力ベクトルの増分、 $(\Delta u_r, \Delta u_s)'$ は接触点における接平面内の相対変位増分ベクトルである。なお、上式中のマトリックスは等方であり、接平面内における座標の取り方によらない。

以上より、式 (2) は次のようになる。

$$S_c = \begin{bmatrix} k_n & 0 & 0 \\ 0 & k_t & 0 \\ 0 & 0 & k_t \end{bmatrix}_c \dots\dots\dots (4)$$

(4) クーロンの摩擦則の導入

接触力の接平面内の成分には接触力の法線方向成分から決まる限界値の存在を仮定する。ここではこの値をクーロンの摩擦則によって定めることにする。すなわち式 (1) を用いて算定される接触力の接平面内の成分 $p_t = \sqrt{(p_r)^2 + (p_s)^2}$ には限界値 $p_n \tan \varphi_u$ を与える。 φ_u は粒子間摩擦角である。これは、Fig.2 に示すように、接触力の傾きに円錐形の限界を設定することに対応する。

3. 3次元粒状要素法の接触剛性マトリックス

粒状要素法では各要素の剛性を表すマトリックスを接触剛性マトリックスと称する。それぞれの要素には、平行移動と回転からなる剛体運動を考えるので、その変形の自由度は2次元では3、3次元では6となる。したがって3次元での接触剛性マトリックス S は 6×6 の大きさをもつ。ここでは球要素の接触剛性マトリックス S を示す。

接触剛性マトリックス S は、隣接する要素を固定した状態で、接触点における剛性マトリックス S_c を着目要素の全接触点に関して加えあわせて算定される。 S_c を加えあわせるためには、要素重心を原点とした要素固有の座標系と、接触点を原点とした各接触点ごとに定ま

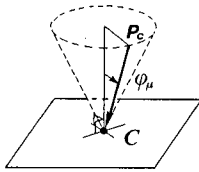


Fig.2 Inclination limit of contact force

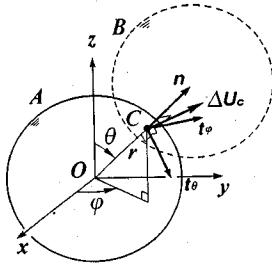


Fig.3 Incremental relative displacement and base vectors for spherical polar coordinates

る座標系との間の変換が必要となる。そこで変換マトリックス T_c を導入する。

本章では、まず接触点における要素間の相対変位増分と接触力について上述の2つの座標系間の変換を考え、次にこれを用いて S を導く。

(1) 要素の変位・回転増分の変換

いま Fig.3 の要素 A に着目し、これに接触する要素 B との接触点を C と表す。ここでは B は固定し、 A のみ動かすことを考える。この場合、接触点 C の相対変位増分は A 自身の変位増分と回転増分のみで決まる。

ここに2つの座標系を与える。1つは球要素 A の重心を原点とした直交デカルト座標系で、これは要素 A に固有の座標系である。その座標軸は x, y, z で表すものとする。いま1つは C 点を原点とした座標系で、前章において導入した n, r, s を基底ベクトルとする直交デカルト座標系である。 n, r, s には球座標 r, θ, ϕ の基底ベクトルを考え、これを n, t_θ, t_ϕ と表すことにする。

要素 A の変位増分を、球の重心を原点とした座標系において $\Delta X' = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)'$ と表すことにする。本文においては要素を剛体と考えているので、要素に回転のない場合、 A の重心の変位増分と C 点の変位増分は等しい。したがって、デカルト座標系の基底ベクトルを球座標系の基底ベクトルに変換する式 (5) に示すマトリックスを用いれば、上に与えた $\Delta X'$ を、 n, t_θ, t_ϕ を基底ベクトルとした座標系で与えられる C 点の変位増分に変換することができる。

$$R = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \dots\dots (5)$$

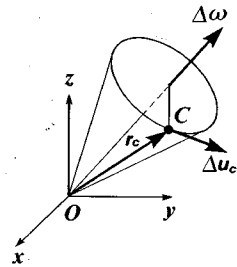


Fig.4 Incremental displacement induced by rotation

一方、Fig.4 に示すように、要素 A の回転増分 $\Delta \omega$ によって生じる C 点の変位増分 Δu_c は次のようなベクトルの外積で与えられる。

$$\Delta u_c = \Delta \omega \times r_c \dots\dots (6)$$

ここに r_c は要素 A の重心 O から C 点に向かうベクトルである。

式 (6) より、要素 A の回転増分によって生じる C 点の変位増分は、球の重心を原点とした座標系において $\Delta X'' = (r\Delta \omega_y \cos \theta - r\Delta \omega_z \sin \theta \sin \phi, -r\Delta \omega_x \cos \theta + r\Delta \omega_z \sin \theta \cos \phi, r\Delta \omega_x \sin \theta \sin \phi - r\Delta \omega_y \sin \theta \cos \phi)'$ となる。ここに r は要素 A の半径、 $\Delta \omega_x, \Delta \omega_y, \Delta \omega_z$ はそれぞれ要素 A の x, y, z 軸周りの回転量で、着目する軸の正の向きにみて右回りを正とする。またこれは式 (5) に示した R によって、 n, t_θ, t_ϕ を基底ベクトルとした座標系で与えられる C 点の変位増分に変換することができる。

以上より、要素 A の変位・回転増分を C 点における変位増分とする変換が次のように求められる。

$$\Delta U_c = R(\Delta X' + \Delta X'') \dots\dots (7)$$

ここに $\Delta U_c = (\Delta u_n, \Delta u_\theta, \Delta u_\phi)'$ は n, t_θ, t_ϕ を基底ベクトルとした座標系で与えられる C 点の変位増分である。式 (7) は次のように整理できる。

$$\Delta U_c = T_c \Delta X \dots\dots (8)$$

ここに $\Delta X = (\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta \omega_x, \Delta \omega_y, \Delta \omega_z)'$ は A の重心の変位・回転増分を表すマトリックスである。 T_c は変換マトリックスで、以下のようになる。

$$T_c = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \theta \cos \phi & -\cos \theta \sin \phi & \sin \theta \end{bmatrix} \dots\dots (9)$$

(2) 接触力の変換

Fig.5 は、要素 A に対して要素 B との間の接触点 C に接触力 $P_c = (p_n, p_\theta, p_\phi)'$ が作用している状態を示す。図中の2つの座標系は Fig.3 のものと同一である。 P_c の正の向きは ΔU_c に正値を与えたときに正の増分が与

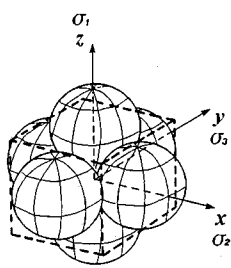


Fig.7 Packing model and unit volume

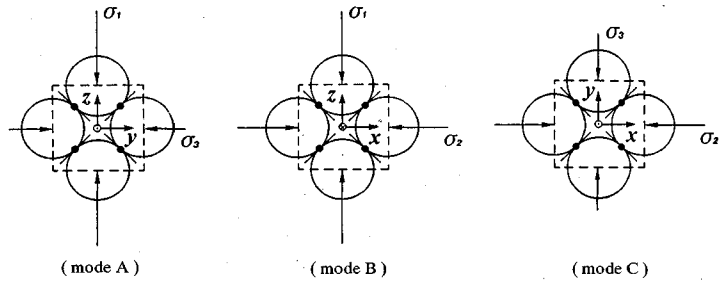


Fig.8 Slip modes

$$\begin{matrix}
 -k_t \sin \theta \sin \varphi \\
 k_t \sin \theta \cos \varphi \\
 0 \\
 -k_t \cos \theta \sin \theta \cos \varphi \\
 -k_t \cos \theta \sin \theta \sin \varphi \\
 k_t \sin^2 \theta
 \end{matrix}
 \left. \vphantom{\begin{matrix} -k_t \sin \theta \sin \varphi \\ k_t \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \\ -k_t \cos \theta \sin \theta \cos \varphi \\ -k_t \cos \theta \sin \theta \sin \varphi \\ k_t \sin^2 \theta \end{matrix}} \right\} c \quad \dots \dots \dots (13)$$

4. 単純な粒状体モデルの三主応力下でのせん断に対する応用

本章では3次元粒状要素解析の実例を示し、せん断変形特性に及ぼす中間主応力の影響について調べることとする。ここで扱う規則配列モデルのせん断の解析は粒子回転のない簡単なものであるが、不静定問題に相当する。解析例について、滑りのモードを仮定した上で手計算より変形を追跡することは可能である。しかしながら、すべてのモードを的確に場合分けして解析するのは煩雑である。また剛性が特異となるために変形を追えなくなる状態も存在する。そこで本章では前章に示した接触剛性マトリックスSを用いた繰り返し計算を行う。ここでは示さないが、実際に簡単な例について本解析結果と手計算で得られた結果が一致することを確認している。

(1) 解析モデルと基本的な滑りのモード

解析モデルは、半径が等しく表面の粗い6つの球要素の集合体である。これをFig.7に示す。Fig.8は後述の滑りのモードを説明するものであるが、同図はモデルの断面図を示している。解析領域は図中に破線で示す立方体とし、これを単位領域と呼ぶことにする。解析モデルに3つの主応力軸に関する等価な構造をもたせるため、最大主応力σ₁をz軸、σ₂をx軸、最小主応力σ₃をy軸に一致させたせん断を行うものとする。

この解析モデルはFig.7に示した単位領域を一要素として無限に続く密詰め配列とみなすことができる。これはいわゆる面心立方構造である。Fig.9には面心立方構造中に解析モデルの占める位置を斜線で示している。

無限に続く密詰め配列を想定すると、各球要素は単位領域の境界上に4つ、単位領域外に4つの接触点を持ち、それぞれに外部からの力が作用する。本解析では、各要

素の接触剛性の算定に領域外の4接触点を考慮するものとする。また外力は、球の重心に作用する合力により与えることとする。

x, y, z軸を応力主軸に一致させた本解析のようなせん断を考えた場合、モデルには3つの基本的な滑りのモードがある。Fig.8はモデル内の12の滑り面と3つの基本的な滑りのモードを示している。σ₁とσ₃の差によるせん断応力によって、x軸と平行な滑り面で滑りが生じる。この滑りのモードをAモードと呼ぶことにする。またσ₁とσ₂の差によるせん断応力によって、y軸と平行な滑り面で滑りが生じる。この滑りのモードをBモードと呼ぶことにする。さらにσ₂とσ₃の差によるせん断応力によって、z軸と平行な滑り面で滑りが生じる。このモードをCモードと呼ぶことにする。A, B, Cの3つのモードの滑りは、一般には同時に発生しない。

(2) 応力とひずみの算定

粒状体の応力は仮想仕事の原理を用いて次のように定義できる^{7),9)}。

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2V} \sum_B (x_j f_i + x_i f_j) \quad (i, j=1, 2, 3) \dots \dots \dots (14)$$

ここにVは粒状体の体積、Σ_Bは領域境界上の点についての和を表す。またx_i, f_iはそれぞれ領域境界上の点の位置座標とその点に作用する外力である。解析モデルの場合、Vは単位領域とした立方体の体積、x_iは球要素の重心の座標である。

対象としているモデルはFig.9に示すような周期性があるので、ひずみテンソルは構成各要素の重心の移動量から容易に算定される。なお、このモデルでは対称性によって、ひずみの主軸は応力主軸と一致する。

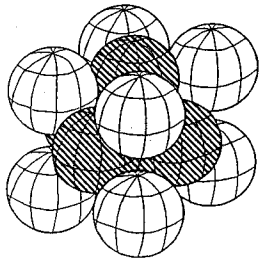


Fig.9 Face-centered cubic array

(3) 解析条件と記号の定義および用いた定数の値

粒子の直径は 2×10^{-2} cm, 粒子間摩擦角 φ_p は 25° とする。重力は考えない。初期状態は等方圧縮状態とし、平均応力は 5 kgf/cm^2 ($4.9 \times 10^5 \text{ Pa}$) と定める。また、収束判定の精度⁶⁾⁻⁹⁾を $1 \times 10^{-10} \text{ kgf}$ ($9.8 \times 10^{-10} \text{ N}$) とした繰り返し計算を行うこととし、収束計算の過程で各要素に与える移動量は、個々の要素に対して接触剛性マトリックスを用いて算定される値に修正係数⁶⁾⁻⁹⁾ α をかけて求めるものとする³⁾。法線方向、接平面内方向の剛性は球を対象とした Hertz の接触の理論¹⁰⁾ を参考にし、砂の粒子を想定して、以下のように定める。

法線方向の剛性 k_n は次のように与えられる。

$$k_n = \frac{2Ga}{1-\nu} \dots\dots\dots(15)$$

ここに ν はポアソン比, G はせん断弾性係数である。 a は接触面の半径で次式より求められる。

$$a = (rp_n K)^{1/3} \dots\dots\dots(16)$$

ただし, r は球の半径, p_n は接触力の法線方向成分である。 K は次式で与えられる。

$$K = \frac{3(1-\nu^2)}{4E} \dots\dots\dots(17)$$

ここに E は弾性係数である。

いま, $E = 5 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ ($4.9 \times 10^{10} \text{ Pa}$), $\nu = 0.2$ とする。初期の等方圧縮状態において, 解析モデルには 12 の接触点が存在し, それぞれに作用する接触力については, 法線方向成分は等しく, 接平面内の成分はない。そこで, このときの接触力の法線方向成分 p_n を求めることを考える。

要素間の重なりを δ とすると, 単位領域の体積 V は次のように与えられる。

$$V = \{\sqrt{2}(2r-\delta)\}^3 \dots\dots\dots(18)$$

また式 (14) より初期状態の平均応力 p は次式で表せる。

$$p = \frac{4p_n}{V}(2r-\delta) \dots\dots\dots(19)$$

注3) α の設定については経験的判断が必要であるが, 本解析では α を 0.25 とした場合と 0.75 とした場合で同一の結果が得られた。なお, 0.75 とした方が収束に要する繰り返し計算の回数が少なかった。以下の結果は $\alpha = 0.75$ として得られたものである。

ここで剛性 k_n に線形性を仮定すると次式が成立する。

$$\delta = p_n/k_n \dots\dots\dots(20)$$

式 (15)~(20) を用いて p_n , k_n は, $p_n = 1.413 \times 10^{-3} \text{ kgf}$ ($1.386 \times 10^{-2} \text{ N}$), $k_n = 1.422 \times 10^2 \text{ kgf/cm}$ ($1.395 \times 10^5 \text{ N/m}$) と求められる。

なお, Hertz の理論に厳密に従えば, 接触力の大きさによって剛性 k_n は変化する。これを解析に導入することもできる^{4),5)} が, ここでは計算を簡単にするため, 接触力の大きさによらない線形な剛性を仮定し, k_n は上記の値で一定とする。また, 接線方向の剛性 k_t は k_n の 0.7 倍の $9.954 \times 10 \text{ kgf/cm}$ ($9.762 \times 10^4 \text{ N/m}$) と定める⁴⁾。

以下に用いた記号の定義式を示す。

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \dots\dots\dots(21)$$

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{1}{3}\{(\sigma_1 - p)^2 + (\sigma_2 - p)^2 + (\sigma_3 - p)^2\}} \dots\dots\dots(22)$$

$$\mu_o = 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1 \dots\dots\dots(23)$$

$$v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \dots\dots\dots(24)$$

$$\gamma_{oct} = 2\sqrt{\frac{1}{3}\left\{\left(\varepsilon_1 - \frac{v}{3}\right)^2 + \left(\varepsilon_2 - \frac{v}{3}\right)^2 + \left(\varepsilon_3 - \frac{v}{3}\right)^2\right\}} \dots\dots\dots(25)$$

$$\mu_{de} = 2 \frac{d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3} - 1 \dots\dots\dots(26)$$

$$\mu_{de}^p = 2 \frac{d\varepsilon_2^p - d\varepsilon_3^p}{d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_3^p} - 1 \dots\dots\dots(27)$$

ここに $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ は主ひずみ, $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3$ は主ひずみ増分, $d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p$ は塑性主ひずみ増分である。

解析は応力制御で行う。 μ_o を -1 から 1 までの間でいくつかの値に固定し, 平均応力 p は一定として, せん断応力 τ_{oct} を単調に増加させる。応力増分は平均応力と比較して十分に小さい値とする。

(4) 応力比~せん断ひずみ関係と種々の境界線

Fig.10 は応力比 τ_{oct}/p と八面体せん断ひずみ γ_{oct} との関係である。初め μ_o の値によらず同一の直線となるが, 要素間の接触点において滑りが発生し始めると直線が折れ曲がる。すなわち, この時点までは弾性変形であったのに対し, この点において変形が滑りを伴うために, 同じ応力比の変化量に対する変形量が大きくなる。なお, 滑りが生じ始めた後も, 本解析で得られる結果は常に力の平衡を満たした状態となっている。

滑りの発生する点を π 面上に応力比 τ_{oct}/p の値で示したのが Fig.11 である。図中の放射状に延びる一点鎖線は載荷径路である。まず Fig.8 に示した A モードの

注4) Cundall⁵⁾ は k_t の大きさの影響は小さいことを示している。また, 筆者らは線形接触剛性を用いる場合に, $k_t/k_n = 0.7$ とすると非線形接触剛性を用いる場合に近いせん断変形量を与えることを確認している¹²⁾。

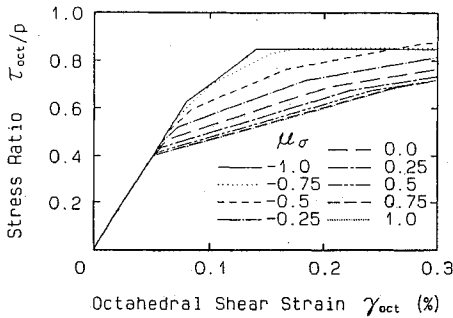


Fig.10 Stress-strain relationship

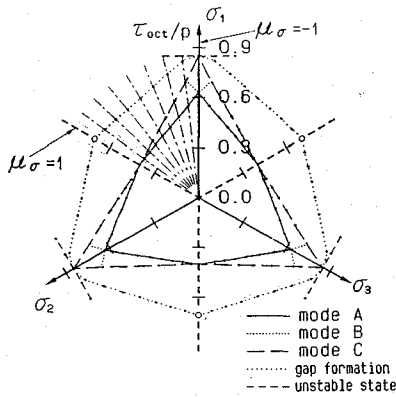


Fig.11 Critical lines corresponding to slip modes and gap formation

滑りが生じる。これらの点を結んだ限界線はモール・クーロン基準に類似した形となる。しかし、完全には一致せず、モール・クーロン基準に合わせた場合の内部摩擦角 φ_0 は三軸圧縮に対応する $\mu_{\sigma} = -1$ では 33° 、三軸伸張に対応する $\mu_{\sigma} = 1$ では 30° となる。これは、平均応力一定とする本解析において、三軸圧縮では A モード (B モードも同時に発生する) の滑りを生じる接触点で接触力の法線方向成分がせん断とともに増加するのに対し、三軸伸張では A モード (C モードも同時) の同じ成分がせん断とともに減少することに対応している。A モードの滑りが生じた後、せん断を続けてある応力状態に達すると、A モードの滑りとともに B モードあるいは C モードの滑りが生じる。この場合、B と C のどちらのモードで滑り始めるかは中間主応力 σ_2 の相対的大きさによって決まり、その境に相当する μ_{σ} の値が存在する。 μ_{σ} がこの値より小さい場合には B モードの滑りが生じる。 μ_{σ} がこの値より大きい場合には C モードの滑りが生じる。前者においては、引き続きせん断を進めてある応力状態に達すると、C モードの滑りが生じる。このとき、B モードの滑りは止まる。さらにせん断を続けると Fig.12 に示すように σ_1 と直交する方向の 4 接触点の分離が起こる。Fig.11 にはこの限界線も示して

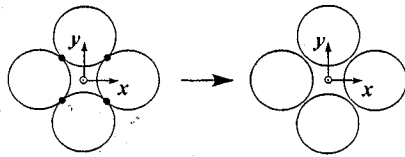


Fig.12 Formation of gaps between initially contiguous spheres

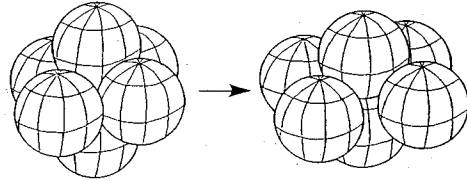


Fig.13 Unstable state

いる。なお図中の白抜きのプロットは $\mu_{\sigma} = 1$ の場合に接触点の分離があり得ないことを表している。また μ_{σ} の値にかかわらず、最大主応力 σ_1 が一定の値に達すると不安定状態となり、Fig.13 に示すように σ_1 方向の 2 つの要素が接触するまで変形が止まらなくなる。Fig.11 では、この限界は三軸圧縮に対応する軸に直交する線上に並ぶ。径路によって不安定状態に至っていない場合がある。これは平均応力を一定とした解析を行っているために μ_{σ} が大きい径路では不安定状態となる以前に σ_3 が 0 となり、解析を終えているからである。なお、以上述べた個々の滑りの発生形態は、 φ_u の値により若干異なるものと考えられる。

(5) 等 τ_{oct} 線

Fig.14 は、各載荷径路において得られた同一の τ_{oct} の値に対応する応力比 τ_{oct}/p の値を π 面上にプロットし、それらを結んで得られた曲線群である。Fig.11 に示した滑りの始まる点に達する以前は、弾性的に変形しており、この範囲内では径路によらず、同一の τ_{oct} に対する応力比は等しく、曲線は円となる。滑り発生以降は、一般に砂の破壊基準を表すと考えられているような曲線が得られている。図中、 $\mu_{\sigma} = -1$ 付近で応力比に限界値があつて、いくつかの曲線が重なっているが、その応力状態は σ_1 方向の 2 要素が急に近づく不安定状態に相当する。また、ひずみが大きくなると曲線の間隔は全体的に狭まる。これは滑りや接触点の分離が生じることによって同じ応力比の変化量に対する変形量が増すことを示している。 $\mu_{\sigma} = 1$ 付近でこの変化がみられないのは $\mu_{\sigma} = 1$ 付近でのみ σ_1 と直交する方向の 4 つの接触点の分離が生じていないことに対応する。

(6) 相似条件の検討

Fig.15 は解析結果から応力比 τ_{oct}/p を一定とした時の μ_{σ} と μ_{ds} の関係を示したものである。(f) でプロット数が減っているのは、プロットのない径路では応力比

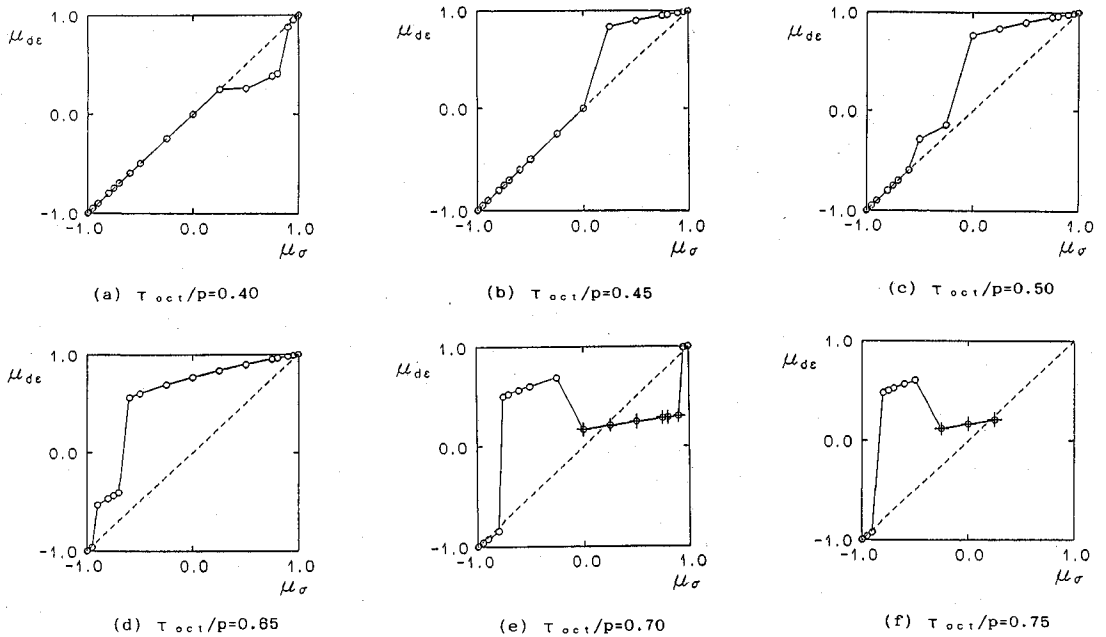


Fig.15 $\mu_{de} \sim \mu_{de}$ relationship at constant stress ratio

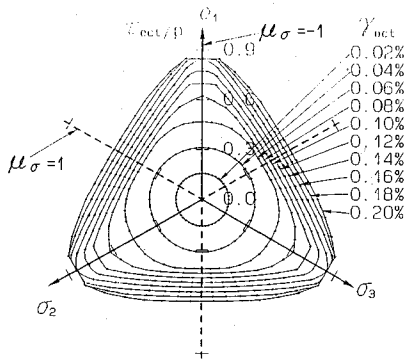


Fig.14 Octahedral shear strain

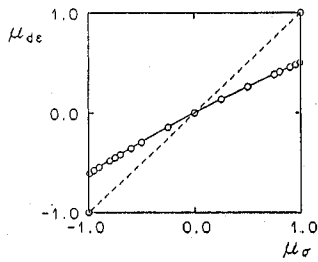
が所定の値となる以前に $\sigma_3=0$ となり解析を終えているからである。また (e), (f) の中で+印の付いているプロットは、 σ_1 と直交する方向の4つの接触点が分離してからの値であることを示す。各径路とも弾性変形時には $\mu_{de} = \mu_{de}$ であるが、滑りの生じた時点で順次 μ_{de} は値を変え、以後別のモードの滑りが生じるか接触点が消失するまでその値を保つ。また μ_{de} の値によって滑りの生じる応力比が異なるので、 $\mu_{de} \sim \mu_{de}$ 曲線は応力比の増加に従って徐々に変化する。 μ_{de} の変化の状況を整理すると以下ようになる。1) $\mu_{de} = \pm 1$ では常に $\mu_{de} = \mu_{de}$ である。2) $\mu_{de} = 0$ ではAモードの滑りの生じた時点では変化は見られないが、Cモードの滑りが生じると μ_{de} が大きくなる。3) $-1 < \mu_{de} < 0$ ではAモードの滑りが生じると μ_{de} が若干大きくなり、Cモードの滑りが生じると

μ_{de} はさらに大きくなる。なお、Bモードの滑りの発生する径路では、Bモードの滑りが生じた時点で μ_{de} は一旦 μ_{de} より小さくなる。4) $0 < \mu_{de} < 1$ ではAモードの滑りが生じると μ_{de} が若干小さくなり、Cモードの滑りが生じると μ_{de} は μ_{de} よりも大きくなる。

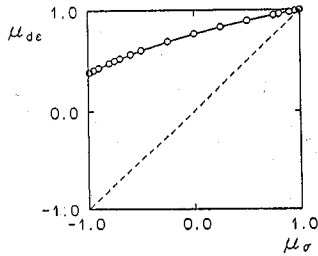
Fig.16 は各載荷径路においてAモードとCモードの滑りの生じている時点での μ_{de} と μ_{de} の関係である。Cモードの滑りの発生中はAモードの滑りも生じている。なお、 $\mu_{de} = -1$ ではCモードの滑りは生じ得ず、プロットはない。

ところで、塑性流れ理論においては $\mu_{de} = \mu_{de}^p$ の関係が仮定される。これを相似条件という。金属を対象とした実験結果は、僅かではあるがこの条件から系統的に偏る¹³⁾。岸野¹⁴⁾ は散逸関数に基づく理論展開から粒状体においてこのずれは応力比によって変化することを指摘している。

本解析においては、要素間の接触点において滑りが発生し始める前には弾性変形をしている。そこで、滑り発生後の全ひずみ増分から弾性変形時のひずみ増分を差し引いた値で塑性ひずみ増分を定義できる。Fig.17にはFig.16と対応させて μ_{de} と μ_{de}^p の関係を示す。相似条件は成立しない。上述の μ_{de} と μ_{de} との関係の変化が μ_{de} と μ_{de}^p との間にも同様に成立する。またAモードの滑りのみが生じている間の μ_{de}^p の値は $\mu_{de} = \pm 1$ を除いてすべて零となる。これは σ_2 方向の変形に弾性成分しか含まれないことを表している。なお、この場合の μ_{de}^p の μ_{de} からのずれの方向は金属の実験結果と一致している。

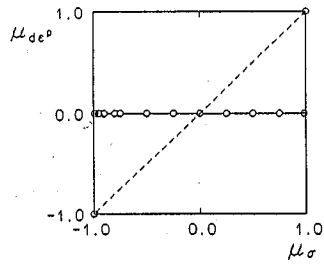


(a) mode A

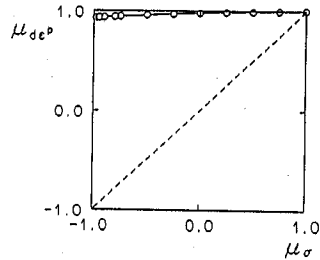


(b) mode A,C

Fig.16 $\mu_\sigma \sim \mu_{de}$ relationship during slip



(a) mode A



(b) mode A,C

Fig.17 $\mu_\sigma \sim \mu_{de}^p$ relationship during slip

一方、A、C両モードの滑りが同時に生じている場合には、 $\mu_{de}^p \geq \mu_\sigma$ となる。これは砂の実験結果¹⁵⁾と一致する。したがって、解析モデルの変形を砂の塑性変形と対応させるには、A、C両モードの滑りを考慮すべきであることがわかる。

5. あとがき

本文では、3次元粒状要素法の考え方とその応用例を示した。まず3次元接触点における接平面内の剛性を定式化し、球要素を考える場合の接触剛性マトリックスを球座標を用いて導いた。本文に示した応用例において、3次元の粒状要素法は2次元の場合と同様に粒状体のシミュレーション解析を行う上で有効な方法と考えられる。

粒状要素法の簡単な応用として面心立方構造を対象とし、等方材料に対するせん断を想定した載荷形態において、三主応力下での要素間の滑りと接触点の分離を考慮した変形機構の解析を行い、せん断変形に及ぼす中間主応力 σ_2 の影響について調べた。

主な解析結果を以下にまとめる。

- 1) 本解析条件下では各主応力の差 $\sigma_1 - \sigma_3$ 、 $\sigma_1 - \sigma_2$ 、 $\sigma_2 - \sigma_3$ で決まる三種のせん断応力によって、3つのモードの滑りが段階的に発生する。
- 2) 応力 \sim ひずみ関係に対する σ_2 の影響や、 π 平面上に示した等 γ_{oct} 線は現実の砂のそれに対応する。
- 3) 相似条件は成立せず、 $\mu_\sigma \sim \mu_{de}$ あるいは $\mu_\sigma \sim \mu_{de}^p$ の関係は応力比によって変化する。

- 4) μ_σ の μ_{de}^p からのずれの方向はFig.8に示すAモードの滑りのみ生じている場合に金属の実験結果と一致し、AとCの両モードの滑りが同時に生じている場合には砂の実験結果と一致する。

本文中では触れなかったが、 σ_1 と直交する方向の接触点が発離すると解析モデルは膨張し始める。しかし、それ以前でのダイレイタンスはみられない。これは、接触点における法線方向の剛性を全接触点について重ね合わせたときに得られる等方向性が、接触点の分離によって初めて失われるということに対応している。なお、解析モデルは最密構造に相当するので、体積は膨張するのみである。

ここに扱った配列は特殊なものであったが、現実の砂の変形と対応した結論も得ることができた。このことは、粒状体内部の変形機構において、粒子移動の幾何学的拘束が重要であることを示唆していると考えられる。本文では主として解析結果を示すにとどまったが、変形機構の詳細な検討結果は別の機会に報告したい。

現実の砂のような粒状体の配列は不規則であり、その変形機構を把握するためには不規則配列を解析することが必要である。今後さらに、特定の配列のみでなくさまざまな粒子配列の集合体を念頭に置いた統計的な解析を進めたいと考えている。

参考文献

- 1) Oda, M. and Konishi, J. : Microscopic deformation mechanism of granular material in simple shear, Soils and Foundations, Vol.14, No.4, pp.25-38, 1974.

- 2) Drescher, A. and de Josselin de Jong, G. : Photoelastic verification of a mechanical model for the flow of a granular material, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.20, pp.337~351, 1972.
- 3) Cundall, P.A. and Strack, O.D.L. : A discrete numerical model for granular assemblies, *Géotechnique*, Vol.29, No.1, pp.47~65, 1979.
- 4) R. Dobry and T.-T. Ng : Discrete modeling of stress-strain behavior of granular media, *Proc. 1st U.S. Conf. on Discrete Element Methods*, Golden Colorado, Oct., 1989.
- 5) Cundall, P.A. : Computer simulation of dense sphere assemblies, *Micromechanics of Granular Materials* (Satake, M. and Jenkins, J.T. eds.), Elsevier, pp.113~123, 1988.
- 6) 岸野佑次 : 新しいシミュレーション法を用いた粒状体の準静的挙動の解析, *土木学会論文集*, 第406号, III-11, pp.97~106, 1989.
- 7) Kishino, Y. : Simulations of quasi-static behavior, *Mechanics of Granular Materials*, Report of ISSMFE technical committee on mechanics of granular materials, Rio de Janeiro, pp.102~107, 1989.
- 8) Kishino, Y. : Computer analysis of dissipation mechanism in granular media, *Powders and Grains* (Biarez and Gourves eds.), Balkema, pp.323~330, 1989.
- 9) Kishino, Y. : Quasi-static simulation of liquefaction phenomena in granular materials, *Science on Form* (Ishizaka ed.), KTK Scientific Publishers, pp.157~174, 1990.
- 10) R.D. Mindlin and H. Deresiewicz : Elastic spheres in contact under varying oblique forces, *J. Appl. Mech.* Vol.20, pp.327~344, 1953.
- 11) R. K. リブスレイ (山田嘉昭・川井忠彦訳) : マトリックス構造解析入門, 培風館, p.46, 1968.
- 12) 土倉 泰・佐武正雄・岸野佑次 : 粒状体シミュレーションの接触剛性に関する考察, *土木学会第46回年次学術講演会講演概要集第3部*, pp.468~469, 1991.
- 13) カチャノフ (大橋義夫訳) : 塑性理論の基礎, 養賢堂, 第6版, p.63, 1983.
- 14) 岸野佑次 : 散逸関数に基づく粒状体の流れ則の誘導, *土木学会論文集*, 第394号, III-9, pp.115~122, 1988.
- 15) 中井照夫・松岡 元 : 3主応力下の土のせん断挙動に関する統一的理解, *土木学会論文報告集*, 第303号, pp.65~77, 1980.

GRANULAR ELEMENT ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL DEFORMATION MECHANISM OF GRANULAR MATERIALS

Tohru TSUCHIKURA, Yuji KISHINO and Masao SATAKE

The quasi-static mechanical characteristics of granular materials are governed by complicated deformation mechanism such as the slippage between grains and the evolution of contact points in three dimension. To investigate such micro-mechanism, a discrete element method has been developed. This method is the three-dimensional version of the granular element method proposed by one of the authors. In this paper, in addition to the general explanation of the method, an application to a regular packing of spheres was shown. The application, regardless of its simplicity, led to the results showing reasonable agreement with real behaviors of sands, which include the failure of similarity condition for the non-elastic deformation.