

**投稿論文** (和文ノート)

**TECHNICAL  
NOTE**

# 数式処理言語 (REDUCE) を用いたナビエ・ストークス方程式の一般化座標への変換

山田 正\*

本研究においては数式処理言語の一つである REDUCE を用いてナビエ・ストークス方程式および連続式を曲線斜交座標を含むいわゆる一般化座標において書き換える方法が提示されている。本研究でははじめにテンソル解析の一般的な導入を行った後にこれをナビエ・ストークス方程式および連続式に適用し一般化座標上での表現形式を得る。次に REDUCE を用いて具体的な曲線斜交座標上で書き換える方法を示している。

**Keywords :** generalized coordinates, Navier-Stokes equations, Riemann geometry, REDUCE

## 1. はじめに

本研究ではナビエ・ストークス方程式を一般化座標で表現する方法とそれを数式処理言語の一つである REDUCE を用いて書き換える方法を定式化しておくことがなされている。ここでは Lie 微分等を使わない古典テンソル解析の枠内で N. S. 方程式を書き換える著者の方法を紹介する。

## 2. 一般化座標での N. S. 方程式と連続式の表現

一般にテンソル解析を導入する目的の1つは座標系によらない式形で現象を表現することであるが、一般化座標で表現した N. S. 方程式は以下のようなものである<sup>1)</sup>。

$$\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial t} + \bar{u}^j \bar{u}_{,j}^i = -\frac{1}{\rho} \delta^{ij} p_{,j} + \delta^{i3} g + \frac{1}{\rho} \tau_{ij}^i \dots \dots \dots (1)$$

ここに  $\bar{u}^i$  は  $i$  座標での流速成分 (反変成分),  $i=3$  は鉛直方向,  $\delta^{ij}$  はクロネッカーのデルタを意味する。; は後述する共変微分である。連続式は以下の式で表現される。

$$\bar{u}_{,j}^j = 0 \dots \dots \dots (2)$$

## 3. 一般化座標での N. S. 方程式と連続式の書き換え

デカルト座標での空間座標を  $x=(x, y, z)$  あるいは  $(x^1, x^2, x^3)$ , 基本ベクトルを  $i, j, k$  とすると任意のベクトル  $f=(f^1, f^2, f^3)$  は,

$$f=f^1 i+f^2 j+f^3 k \dots \dots \dots (3)$$

と書ける。図-1 に示すような斜交座標 (terrain following coordinates) を考える。このとき座標系を表現する基本ベクトルには2通り考えられる。そのうちの1つは  $i$ -面に接するベクトル  $\tau_i$  ともう一つは  $i$ -面に直交

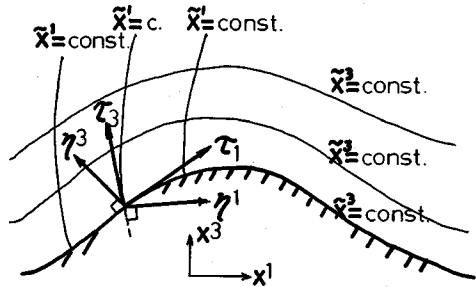


図-1 地形に沿う座標系 (terrain following coordinates) と記号の定義

するベクトル  $\eta^i$  であり,

$$\tau_i = \frac{\partial X}{\partial x^i}, \quad \eta^i = \nabla x^i$$

で与えられる。ここに,

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x^1} + j \frac{\partial}{\partial x^2} + k \frac{\partial}{\partial x^3}$$

である。これらの基本ベクトルを使用すると上記のベクトルは次のように表し得る。

$$f = \bar{f}^1 \tau_1 + \bar{f}^2 \tau_2 + \bar{f}^3 \tau_3 = \bar{f}^i \tau_i \dots \dots \dots (4)$$

$$= \bar{f}_1 \eta^1 + \bar{f}_2 \eta^2 + \bar{f}_3 \eta^3 = \bar{f}_i \eta^i \dots \dots \dots (5)$$

$\bar{f}^i$  は反変成分と呼ばれ,  $\bar{f}_i$  は共変成分と呼ばれ, 以下の関係も成立している。

$$\bar{f}^i = \eta^i \cdot f, \quad \bar{f}_i = \tau_i \cdot f \dots \dots \dots (6)$$

ここに  $\cdot$  は内積を意味する。

次にメトリックを導入する。一般にデカルト座標系では2点間の距離要素  $ds$  は次式で与えられる。

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dx^i)^2 \dots \dots \dots (7)$$

一般化座標では次式が成立している。

$$dx^i = \left( \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right) d\bar{x}^j \dots \dots \dots (8)$$

\* 正会員 工博 中央大学助教授 理工学部土木工学科 (〒112 文京区春日 1-13-27)

$\bar{x}^i$  は新たに導入した一般化座標である。上式より

$$(ds)^2 = (dx^i)^2 = \tilde{G}_{ij} d\bar{x}^i d\bar{x}^j \dots \dots \dots (9)$$

となる。ここに、

$$\tilde{G}_{ij} = \left( \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} \right) \left( \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j} \right) = \tau_i \cdot \tau_j \dots \dots \dots (10)$$

を反変計量テンソルと呼ぶ。その逆テンソル (共変計量テンソル) を  $\tilde{G}^{ij}$  とすると、

$$\tilde{G}^{ij} = \left( \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} \right) \left( \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^m} \right) = \eta^i \cdot \eta^j \dots \dots \dots (11)$$

となる。さらに  $\tilde{G}_{ij}$  の行列式を  $G$  とおくと、

$$\sqrt{G} = \left| \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m} \right| \dots \dots \dots (12)$$

である。

ここで以後の計算に必要となるクリストッフェル記号  $\Gamma_{jk}^i$  を導入する。

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \tilde{G}^{im} \left( \frac{\partial \tilde{G}^{km}}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial \tilde{G}^{jm}}{\partial \bar{x}^k} - \frac{\partial \tilde{G}^{kj}}{\partial \bar{x}^m} \right) \dots \dots \dots (13)$$

ここで前出の共変微分は;  $p, \bar{u}^i, \bar{A}^{ij}$  を 0, 1, 2 次のテンソル量とすると、それぞれ以下のようになる<sup>2), 3), 9), 12)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} p_{,j} &= \tilde{G}^{ij} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}^j} = (\tilde{G}^{ij} p)_{,j} \\ &= \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial (\tilde{G}^{ij} G^{1/2} p)}{\partial \bar{x}^j} + \Gamma_{mn}^i (\tilde{G}^{ij} p) \\ &= \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial (\tilde{G}^{ij} G^{1/2} p)}{\partial \bar{x}^j} - \frac{p}{G^{1/2}} \frac{\partial (G^{1/2} \tilde{G}^{ij})}{\partial \bar{x}^j} \\ \bar{u}_{,j}^i &= \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial \bar{x}^j} + \Gamma_{jk}^i \bar{u}^k \\ \bar{A}_{,j}^i &= \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial (G^{1/2} \bar{A}^{ij})}{\partial \bar{x}^j} + \Gamma_{mn}^i \bar{A}^{mn} \end{aligned} \right\} \dots \dots (14)$$

これだけの準備をすると先に示した N. S. 方程式は古典テンソル解析の表現で以下の式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial t} + \bar{u}^j \left( \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial \bar{x}^j} + \Gamma_{jk}^i \bar{u}^k \right) \\ = -\frac{1}{p} \tilde{G}^{ij} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^3} g + \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial (G^{1/2} \bar{\tau}^{ij})}{\partial \bar{x}^j} + \Gamma_{mn}^i \bar{\tau}^{mn} \end{aligned} \right\} \dots \dots (15)$$

式 (15) 中のせん断応力  $\bar{\tau}^{ij}$  は以下のように与えられる。

$$\bar{\tau}^{ij} = \rho \nu \bar{e}^{ij} \dots \dots \dots (16)$$

上式中のひずみ速度  $\bar{e}^{ij}$  は以下の式で与えられる<sup>12)</sup>。

$$\bar{e}^{ij} = \tilde{G}^{ij} \left( \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial \bar{x}^i} \right) + \tilde{G}^{ji} \left( \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial \bar{x}^j} \right) - \bar{u}^k \left( \frac{\partial \tilde{G}^{ij}}{\partial \bar{x}^k} \right) \dots \dots \dots (17)$$

最後に連続式は以下の式となる<sup>12)</sup>。

$$\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial (G^{1/2} \bar{u}^j)}{\partial \bar{x}^j} = 0 \dots \dots \dots (18)$$

#### 4. REDUCE による N. S. 方程式の一般化座標への書換えプログラムとその結果

図—2 は著者の変換プログラムである。ここでは例題として直交曲線座標の場合として (1) 円柱座標の場合、斜交座標の場合として (2) 山地標高に沿う座標系 (terrain following coordinates), (3) 河川工学の例題として sine generated curve 座標 (直交曲線座標) を示しているが、紙面の制約から解説は (2) につき行っている。以下に図—2 中の番号の文の簡単な解説を記す。

- ① 微分幾何学パッケージ “EXCALC” を呼び出す。
- ② 出力を格納するディメンション宣言
- ③ sin, cos が現れたときの処理方法
- ④ 例題 1 として円柱座標を使用するとき
- ⑤ 例題 2 として山地標高  $h(x, y)$  に沿う座標系 (terrain following coord.) を使用するとき (% はコメント)
- ⑥ メトリックの出力
- ⑦ クリストッフェル記号の計算と出力
- ⑧ 反変成分による N. S. 方程式の非定常項と移流項の書換えと出力
- ⑨ 圧力勾配項の計算
- ⑩ ひずみ速度, せん断応力, 粘性項の計算と出力
- ⑪ 反変成分での連続式の計算
- ⑫ 物理成分への書換え
- ⑬ 物理成分で表示した N. S. 方程式と出力 (NSEQ (i), PRES (i), VISC (i) はそれぞれ i 方向の N. S. 方程式中の左辺, 圧力勾配項, 粘性項)
- ⑭ 物理成分で表示した連続式

#### 5. 例題—山地地形に沿う座標系 (terrain following coordinates) による解説

図—3 はこの座標系と記号を示す。双対 (co-frame) は⑤で与えられる。なぜなら  $d\bar{x}^i$  を計算してみると

$$\left. \begin{aligned} x^1 = \bar{x}^1 = \xi, \quad x^2 = \bar{x}^2 = \zeta, \\ \bar{x}^3 = \eta = H_0 \frac{x^3 - h(\bar{x}^1, \bar{x}^2)}{H_0 - h(\bar{x}^1, \bar{x}^2)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

より、

$$\left. \begin{aligned} dx^1 = d\xi, \quad dx^2 = d\zeta \\ dx^3 = \frac{H_0 - \eta}{H_0} \frac{\partial h}{\partial \xi} d\xi + \frac{H_0 - \eta}{H_0} \frac{\partial h}{\partial \eta} d\eta + \frac{H_0 - h}{H_0} d\eta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

となる。これから式 (9) の表現を得る。この co-frame と  $g = (ds)^2$  を与えると以後反変, 共変メトリックが自動的に計算され, たとえば  $g$  (GZ, TS) と入力することにより共変メトリック  $\tilde{G}^{ij}$  が出力される。⑥は反変, 共変メトリックを出力する。これにより  $\tilde{G}^{ij}, \tilde{G}_{ij}$  がわかるので式 (13) に基づきクリストッフェル記号

```

% File name is Rieman.red
LOAD "EXCALC";
ARRAY GM(3, 3, 3), XX(3), XxB(3), NSEQ(3), Q(3), VIS(3),
GH(3, 3), GK(3, 3), PRES(3)
FORALL X LET COS(X)**2 = 1-SIN(X)**2;
FORALL X LET COSH(X)**2 = 1+ SINH(X)**2;
***** 1 ENCHUU ZAHYOU *****
%PPORM R=0, TH=0, Z=0
%XXB(1):=R;XXB(2):=TH;XXB(3):=Z$
%XX(1):=R*COS(TH);XX(2):=R*SIN(TH);XX(3):=Z$
%for i:=1:3 do write d xx(i);
%coframe e(R)=d R, e(TH)=d TH, e(Z)=d z
%with metric g=(COS(TH)*E(R)-R*SIN(TH)*E(TH))**2 +
% (COS(TH)*R*E(TH)+SIN(TH)*E(R))**2 +
% E(Z)**2;
***** 2 Terrain following coordinate2 *****
fdomain h=h(GZ, TS);
PFORM GZ=0, TS=0, YT=0, h=0$
XxB(1):=GZ;XxB(2):=TS;XxB(3):=YT;
XX(1):=GZ;XX(2):=TS;XX(3):=(YT/HO)*h;
for i:=1:3 do write d xx(i);
coframe e(xb(1))=d gz, e(xb(2))=d ts, e(xb(3))=d yt
with metric g=e(xb(1))**2+e(xb(2))**2+
((e(xb(1))*h.gz)*(h0-yt)+
e(xb(2))*h.ts*(h0-yt)+
e(xb(3))*(h0-h)/h0)**2;
***** 3 SINE GENERATED CURVE *****
%operator fnc:FDOMAIN THT=THT(SA)$
%PFORM SA=0, NA=0, ZA=0$
%XXB(1):=SA;XXB(2):=NA;XXB(3):=ZA$
%depend fnc, sa;
%THT:=COS(K*SA);
%XX(1):= fnc(COS(THT))-NA*SIN(THT)*COS(AL)+ZA*SIN(AL);
%XX(2):= fnc(SIN(THT))+NA*COS(THT);
%XX(3):=-fnc(COS(THT))-NA*SIN(THT)*SIN(AL)+ZA*COS(AL);
%forall xo let @fnc(xo), sa=xo;
%forall xo let d fnc(xo)=xd sa;
%XD1:=@XX(1), SA)*d SA+@XX(1), NA)* d NA+@XX(1), ZA)*d ZA;
%XD2:=@XX(2), SA)*d SA+@XX(2), NA)* d NA+@XX(2), ZA)*d ZA;
%XD3:=@XX(3), SA)*d SA+@XX(3), NA)* d NA+@XX(3), ZA)*d ZA;
%for i:=1:3 do write d xx(i);
%COFRAME E(XXB(1))= d SA, E(XXB(2))= d NA, E(XXB(3))= d ZA
%with metric g=( COS(COS(K*SA))*COS(AL)
%e SA*SIN(K*SA)*K*NA+ cos(cos(k*sa))
%cos(al)*e(sa)-COS(AL)*e NA*SIN(COS(K*SA)) +
%e ZA*SIN(AL)**2 + (COS(COS(K*SA))*e NA + e SA*
%SIN(COS(K*SA))*SIN(K*SA)*K*NA+e(sa)*sin(cos(k*sa)))**2
%+ (COS(COS(K*SA))*e SA*SIN(K*SA)*SIN(AL)*K*NA
%+ cos(cos(k*sa))*e(sa)*sin(al)- COS(AL)*e ZA
%- e NA*SIN(COS(K*SA))*SIN(AL)**2;
%GH(I, J)=CONTRAVARIANT METRIC TENSOR = HANNHENN TENSOR
% (=HENSU NO UWATUKI, G NO SHITATUKI, =G(-0, -0)
% GK(I, J)=COVARIANT METRIC TENSOR = KYOUHENN TENSOR
% (=HENSU NO SHITATUKI, G NO UWATUKI, =G(0, 0)
for i:=1:3 do
for j:=1:3 do write GH(I, J):=g(-xxb(i), -xxb(j));
for i:=1:3 do
for j:=1:3 do write GK(I, J):=g(xxb(i), xxb(j));
%DTMNT IS THE DETERMINANT OF COTRAVARIANT METRICS
ON RAT, DIV;
DTMNT:=detn!#;ABG2:=SQRT(DTMNT);DTMNT:=ABG2**2;
factor @, e;
***** GM(I, J, K)= CHRISTOFFEL SYMBOL *****
FOR I:=1:3 DO
FOR J:=1:3 DO
FOR K:=1:3 DO
write GM(I, J, K):=FOR M:=1:3 SUM
1/2*G(xxb(I), xxb(M))
*(G(-XXB(K), -XXB(M)), XxB(J))
+G(G(-XXB(J), -XXB(M)), XxB(K))
-G(G(-XXB(K), -XXB(J)), XxB(M)));
***** NAVIER-STOKES EQUATIONS *****
FDOMAIN P=P(xxb(1), xxb(2), xxb(3));
FDOMAIN u=u(t, xxb(1), xxb(2), xxb(3));
FDOMAIN v=v(t, xxb(1), xxb(2), xxb(3));
FDOMAIN w=w(t, xxb(1), xxb(2), xxb(3));
q(1):=u; q(2):=v; q(3):=w;
FOR I:=1:3 DO WRITE
NSEQ(I):=@(Q(I), T)+(FOR J:=1:3 SUM Q(J)*
@(Q(I), XxB(J)) +
(FOR M:=1:3 SUM GM(I, J, M)*Q(M)));
FOR I:=1:3 DO WRITE
PRES(I):=FOR M:=1:3 SUM GK(I, M)*@(P, XxB(M))/rho;
FOR I:=1:3 DO WRITE
NSEQ(I):=@(Q(I), T)+(FOR J:=1:3 SUM Q(J)*
@(Q(I), XxB(J)) +
(FOR M:=1:3 SUM GM(I, J, M)*Q(M)))+
(FOR M:=1:3 SUM GK(I, M)*@(P, XxB(M))/rho);
%
ARRAY SV(3, 3), TAU(3, 3), viscl(3), visc2(3), visc3(3)
% SV WA SHEAR VELOCITY
for i:=1:3 do
for j:=1:3 do
write sv(i, j):=for n:=1:3 sum
gk(j, n)*@(q(i), xxb(n))+gk(i, n)*@(q(j), xxb(n))
-@(gk(i, j), xxb(n))*q(n);
for i:=1:3 do
for j:=1:3 do
write tau(I, J):=nu*sv(i, j);
for i:=1:3 do
write viscl(i):=for j:=1:3 sum
@(abg2*tau(i, j), xxb(j))/abg2;
for i:=1:3 do
write visc2(i):=for m:=1:3 sum for n:=1:3 sum
gm(i, m, n)*tau(m, n);
for i:=1:3 do
write visc(i):=viscl(i)+visc2(i);
%
% EQUATION OF CONTINUITY
EQCONT:= FOR I:=1:3 SUM @(ABG2*Q(I), XxB(I));
%buturi seibun de hyouji suruto
FDOMAIN PB=PB(xxb(1), xxb(2), xxb(3));
FDOMAIN ub=ub(t, xxb(1), xxb(2), xxb(3));
FDOMAIN vb=vb(t, xxb(1), xxb(2), xxb(3));
FDOMAIN wb=wb(t, xxb(1), xxb(2), xxb(3));
u:=ub/sqrt(gh(1, 1)); v:=vb/sqrt(gh(2, 2));
w:=wb/sqrt(gh(3, 3));
FOR I:=1:3 DO WRITE
NSEQ(I):=@(Q(I), T)+(FOR J:=1:3 SUM Q(J)*
@(Q(I), XxB(J)) +
(FOR M:=1:3 SUM GM(I, J, M)*Q(M)));
FOR I:=1:3 DO WRITE
PRES(I):=FOR M:=1:3 SUM GK(I, M)*@(P, XxB(M))/rho;
FOR I:=1:3 DO WRITE
NSEQ(I):=@(Q(I), T)+(FOR J:=1:3 SUM Q(J)*
@(Q(I), XxB(J))
(FOR M:=1:3 SUM GM(I, J, M)*Q(M)));
(FOR M:=1:3 SUM GK(I, M)*@(P, XxB(M))/rho;
FOR I:=1:3 DO WRITE
visc(i):=visc(i);
% ue no visc no +- wa sahenn ni
%motte itta toki no mono de aru
% EQUATION OF CONTINUITY
EQCONT:=EQCONT;
end;

```

図-2 ナビエ・ストークス方程式の一般化座標への変換プログラム (@ (a, b) は  $\partial a / \partial b$  を意味する)

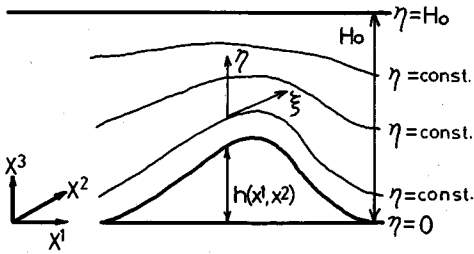


図-3 地形に沿う座標系 (terrain following coordinates) と記号の定義

```
FOR I:=1:3 DO WRITE          ナビエ・ストークス方程式の
NSEQ(1):=@(Q(I),T)+@(FOR J:=1:3 SUM Q(J))* 打ち出し
(@(Q(I),XXB(J)) +
(FOR M:=1:3 SUM GM(I,J,M)*Q(M)))+
(FOR M:=1:3 SUM GK(I,M)*@(P,XXB(M))/rho);
```

$$\text{NSEQ}(1) := - \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} H * \frac{\partial}{\partial \tau} P * RHO \right) * \xi \text{ (GZ) 方向の N.S. 方程式}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} H_0 - H_0 * H - H_0 * Y T + H * Y T - \frac{\partial}{\partial \zeta} P * RHO - \frac{\partial}{\partial \zeta} U * U - \frac{\partial}{\partial \tau} U * V - \frac{\partial}{\partial \tau} U - \frac{\partial}{\partial \tau} U * W$$

$$\text{NSEQ}(2) := - \left( \frac{\partial}{\partial \tau} H * \frac{\partial}{\partial \tau} P * RHO \right) * \zeta \text{ (TS) 方向の N.S. 方程式}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} H_0 - H_0 * H - H_0 * Y T + H * Y T - \frac{\partial}{\partial \tau} P * RHO - \frac{\partial}{\partial \zeta} V * U - \frac{\partial}{\partial \tau} V * V - \frac{\partial}{\partial \tau} V - \frac{\partial}{\partial \tau} V * W$$

図-4 図-3の座標系の反変成分で表示したξ, ζ方向のナビエ・ストークス方程式 (粘性項, 重力項は省略してある)

$\Gamma_{jk}$  と  $\tilde{G}_{ij}$  の行列式  $G$  を計算する。次に⑧以降の計算によって N.S. 方程式が計算される。ここで注意しなければならないのはデカルト座標以外の新座標で表される流速成分  $\vec{u}'$  はあくまで  $\sqrt{\tilde{G}_{ii}}$  を基準として計量された数

学上の流速であり, 物理成分として表したいときには

$$\left. \begin{aligned} u^1 &= \sqrt{\tilde{G}_{11}} \cdot \vec{u}'^1, & u^2 &= \sqrt{\tilde{G}_{22}} \cdot \vec{u}'^2, \\ u^3 &= \sqrt{\tilde{G}_{33}} \cdot \vec{u}'^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

の操作によって新しい成分 ( $u^1, u^2, u^3$ ) を用いなければならない。この部分が⑨である。図-4はこのようにして得られた地形に沿う座標系での粘性項を除く N.S. 方程式の  $i=1, 2$  ( $=\xi, \zeta$ ) 方向の成分の表示 (反変成分での表示) である ( $\eta$  方向および粘性項は項数が多いので紙面の関係から省略している)。表示方法にまだ改善の余地はあるもののパソコン上で手軽にナビエ・ストークス方程式を一般化座標で書き換える (PC-9801ES で約 1 分) という所期の目的は達せられたと思われる。

参考文献

- 1) 日野幹雄・太田猛彦・砂田憲吾・渡辺邦夫：洪水流出解析 (その第 1 歩), 森北出版, 1989.
- 2) Pielke, R.A. : Mesoscale Meteorological Modelling, Academic Press, 1984.
- 3) 横道英雄：工学系のためのテンソル解析, 技報堂出版, 1983.
- 4) 横道英雄：テンソルとレオロジー, 技報堂出版, 1975.
- 5) 栗田 稔：リーマン幾何, 至文堂, 1965.
- 6) Flanders, H. : Differential Form with Applications to the Physical Science, Academic Press, 1963 (岩堀長慶訳：微分形式の理論および物理科学への応用, 岩波書店, 1967).
- 7) Shutz, B.F. : Geometrical Methods of mathematical Physics, Cambridge University Press, 1980 (家政則ほか 3 名訳：物理学における幾何学的方法, 吉岡書店, 1987).
- 8) ランダウ=リフシッツ：場の古典論, 東京図書.
- 9) 矢野健太郎：アインシュタイン, 講談社, 1980.
- 10) Schrufer, E. : A System for Doing Calculations in the Calculus of Modern Differential Geometry, REDUCE 操作マニュアル.
- 11) 岩堀長慶：ベクトル解析, 裳華房, 1960.
- 12) Gal-Chen, T. and Somerville, R.C.J. : On the Use of a Coordinate Transformation from the Navier-Stokes Equations, Journal of Computational Physics, 17, pp. 209~228, 1975.

(1990. 12. 3 受付)

TRANSFORMATION OF NAVIER-STOKES EQUATIONS IN GENERALIZED COORDINATES WITH ALGEBRIC COMPUTER LANGUAGE (REDUCE)

Tadashi YAMADA

The present paper proposes a useful computer program for transforming of Navier-Stokes equations from the cartesian to generalized coordinates. After brief reviews of tensor analysis and Riemann geometry, the Navier-Stokes equations expressed in the cartesian coordinates are transformed into generalized coordinates by applying a computer program written in the algebric-language REDUCE. The program is then tested for terrain following coordinates and confirmed its validity.

# SAT/UNSAT

(SATURATED / UNSATURATED ANALYSIS PROGRAM)

## 適用例

- ダムや堤体の外水位の上昇・下降や 降雨に伴う地下水解析
- トンネル掘削等による地下水への影響解析
- 矢板や連続壁による水の回り込みや止水効果の評価

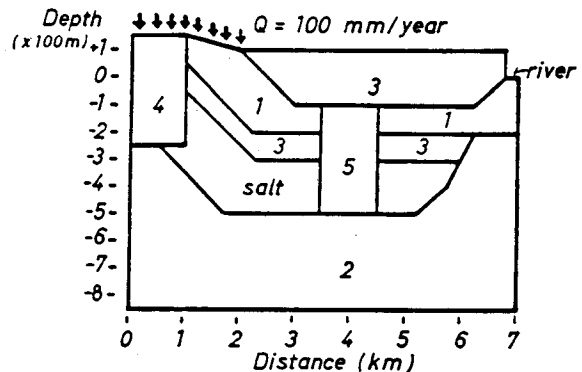


図1 放射性廃棄物処理場モデル

1: Sandstone 2: Sandstone 3: Shale 4: Limestone  
5: Rubble zone Salt: Unpermeable

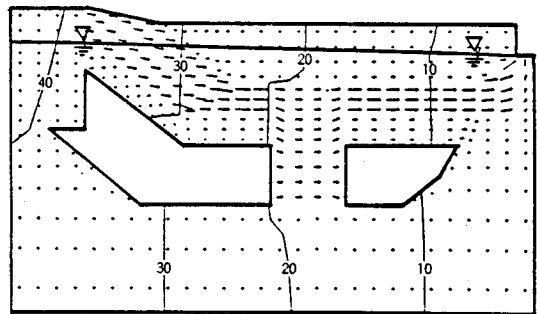


図2 放射性廃棄物処理場モデルの定常浸透流

## EWS版 新発売!!

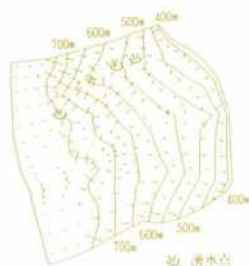
グラフィック機能に優れ、しかもコストパフォーマンスの高いエンジニアリング・ワークステーション(EWS)上で、ご利用いただけます。

NEWS, SUN, HP 等に対応。

## あの地下水解析ソフトがさらに機能充実!

# UNISSF<sub>ユニセフ</sub>(V-2)

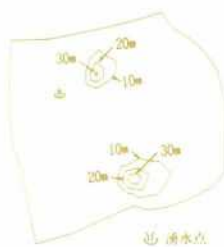
スピーディな同定・安価な解析



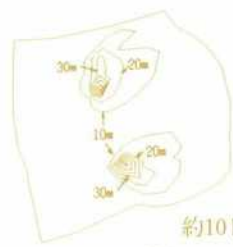
初期状態の地下水流



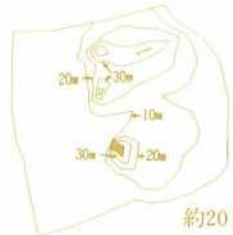
トンネル掘削開始直後



約4日後



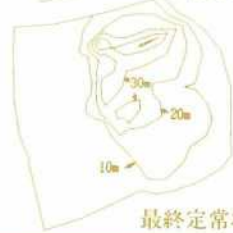
約10日後



約20日後



約30日後



最終定常状態

特長 ○有限要素法による準3次元解析を中心とした地下水の流れのトータルシステムです。

○観測水位と計算水位より、非線形最小二乗法を用いて帯水層定数の同定が可能です。(逆解析手法)

○建設・土木工事(掘削・ディープウェルその他)の解析に対応する多くの機能を備えています。

○メッシュ・ジェネレータにより、モデル(要素分割)作成の手間を軽減できます。

○図化処理プログラムにより、結果の確認が容易に行えます。

適応機種: SUN, NEWS, HP,  
IBM 30XX, FACOM-Mシリーズ 他

このシステムは、情報処理振興事業協会の委託を受けて開発したものです。

## IPA 情報処理振興事業協会

株式会社 **CRC** 総合研究所 西日本支社

大阪市中央区久太郎町4丁目1-3  
(06)241-4121 営業担当: 岩崎